

有限解析法에 의한 流動解析

姜 信 榮

<서울대 工大 機械工學科 · 工博>

1. 序 言

최근에 와서 고속 대형전자계산기의 발달로 熱流體流動의 지배방정식인 연속방정식, Navies-Stokes 방정식, 에너지 방정식을 수치해석에 의하여 계산하게 되었고 이제는 電算流體力學이란 말은 自然스럽게 받아들여지고 있다. 물론 전산 유체역학이란 열유체역학의 범위만큼 다양하고 광범위한 분야가 될 것이다. 즉 비압축성 유동, 압축성 유동, 일반 점성유동, 경계층 유동, 자연대류, 난류유동 등등 그 대상에 따라 특수한 문제점이 있을뿐만 아니라 그 수치해석 방법도 크게 나누어 유한차분법(finite difference method)과 유한변분법(finite element method)이 잘 알려져 있다. 국내에서도 이미 위의 방법을 이용하여 많은 연구가 진행되어 왔다. 그래서 본 강좌에서는 새로운 수치해석방법으로 알려지고 있는 有限解析法을 소개하고자 한다.

有限解析法이란 말은 Finite Analytic Method를 필자가 임의로 번역한 용어인 바 그 뜻에 적합한지 염려스러우나 실은 원어 자체가 아직 생소하고 公認된 용어는 아니다. 왜냐하면 전통적인 방법에 비하여 아직 제안되고, 그 실용성과 장점이 개발되고, 여러가지 유동해석에 적용되고 있는 단계이기 때문에 하나의 독립적인 이론의 체계를 갖추기에는 다소 시간이 걸릴것 같다. 줄여서 FAM이라고 하면 이 방법은 미국 Iowa 大學의 기계공학파에 있는 陳景仁 教授가 1978년에 처음으로 제안한 방법이다. 그 후 國內에

서도 한국과학기술원의 郭柄晚, 金文彥 教授가 지도한 학생의 석사학위 논문으로 구조해석에 응용된 바 있으나 열유체 분야에서는 응용연구되지 못하였고 본인이 한국기계연구소에 재직하고 있었던 1981년 12월 Chen 教授를 초빙하여 연구소에서 세미나를 개최하여 國內의 학계 및 연구소의 관심있는 많은 연구인들이 참여한 가운데 FAM이 소개된 바 있다. 그 후 서울大學校에서도 이 方法에 관심을 갖고 연구를 수행하고 있기에 이번 기회를 통하여 소개 하고자 한다.

FAM의 기본적인 구상은 해석 하고자 하는 線型 또는 非線型 편미분 방정식을 局部的으로 解析的인 해를 구하여 이를 이용하자는 것이다. 그러기 위하여 유한차분법(FDM)과 유한변분법(FEM)에서와 같이 전체 유동장을 작은 요소로 나누고 그 요소내에서 국부해를 구한 다음 이들 요소를 중첩시킴으로써 각 요소의 미지수에 대한 대수식을 얻어서 수치해를 구하자는 것이다. 그러나 FDM에서와 같이 국부요소에서 미분항을 구하지 않고, FEM에서와 같이 요소에서 형상함수를 도입하지 않는 상태에서 해석적인 해를 구하고 있기 때문에 수치해석에서 얻어지는 미분양들은 비교적 정확하게 구해진다. 따라서 Navier-Stokes 방정식이나 에너지 방정식에서 畵고차항이 작은 파라메타, 즉 레이놀즈수나 피크리수의 역수로 곱하여서 있는 경우에도 안정된 해를 구할 수 있다고 알려져 있다. 요소자체의 계수를 구하는데는 계산시간이 많이 소요되지만 수치해석상의 안정성이나 수렴성이 좋기 때문에 전체계산시간은 오히려 적게 걸리는 경우도 있

다고 한다. 본 강좌에서는 참고문헌 (9)~(12)의 보고서 내용을 발췌하여 소개하고자 한다.

2. 有限解析法の 기본 理論

기본 理論을 간략히 소개하기 위하여 그림 1과 같은 2차원 영역 R 에 다음의 편미분 방정식을 생각한다.

$$L(\phi) = -G(x, y) \quad (1)$$

타원형의 편미분 방정식이라고 하면 R 의 모든 경계에서 경계조건이 주어지면 된다. R 을 그림 1에서와 같이 여러개의 요소로 분할한다. 그림 2의 특정한 요소에 대하여 내부점 $P(i, j)$ 는 8개의 노드로 정해지는 경계로 쌓이게 된다. 그래도 식(1)이 비선형이라면 해석적인 해를 구하기 어려우므로 선형화 시킨다. 즉 Navier-Stokes 방

정식과 같은 경우 관성력 항의 속도는 요소내의 평균속도로 치환한다. 이는 FDM과 FEM에서 하는 선형화 작업과 같다. 그림 2의 경우 네개 경계에서 조건이 주어지면 해를 구하게 된다.

$f_N(x)$: 북쪽경계

$f_S(x)$: 남쪽경계

$f_E(y)$: 동쪽경계

$f_W(y)$: 서쪽경계

위 경계조건은 각 노드에서의 값으로 주어진다 고 하면, 예로

$$f_N = f(\phi_{NE}, \phi_{NC}, \phi_{NW}, x) \quad (2)$$

$$f_W = f(\phi_{NW}, \phi_{WC}, \phi_{SW}, x)$$

과 같다. 쉽게는 f_N, f_S, f_E, f_W 을 2차 다항식으로 나타낼수 있게 된다.

이와 같이 식(1)이 선형화되고 각 요소에서 경계조건이 주어지면 局部解는 각 경계조건과 G 에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$$\phi(x, y) = f(f_N, f_S, f_E, f_W, x, y, h, k, G) \quad (3)$$

여기서 h, k 는 x, y 방향으로 그리드의 크기이다. 식(2)의 경계조건을 식(3)에 대입하면

$$\phi(x, y) = f(\phi_{NE}, \phi_{SE}, \phi_{EC}, \phi_{SC}, \phi_{SW}, \phi_{WC}, \phi_{NW}, \phi_{NC}, x, y, h, k, G) \quad (4)$$

가 된다. 위 식은 요소내에서, 해가되며 미분이 가능하다. 이를 점 P 에 대하여 구하면 9점의 노드에 대한 대수식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \phi_P = & C_{NE}\phi_{NE} + C_{EC}\phi_{EC} + C_{SE}\phi_{SE} + C_{SC}\phi_{SC} + \\ & C_{SW}\phi_{SW} + C_{WC}\phi_{WC} + C_{NW}\phi_{NW} + C_{NC}\phi_{NC} + \\ & C_P G_P \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 C_{NE}, C_{EC}, \dots 등은 국부해에서 계산된다. 이와 같이 요소를 중첩시키면서 적용하면 점 P 는 다음 요소의 경계면이 되므로 전체적으로 보아 9점 유한해석법의 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \phi(i, j) = & C_{i+1, j+1}\phi_{i+1, j+1} + C_{i+1, j}\phi_{i+1, j} \\ & + C_{i+1, j-1}\phi_{i+1, j-1} + C_{i, j+1}\phi_{i, j+1} \\ & + C_{i-1, j+1}\phi_{i-1, j+1} + C_{i-1, j}\phi_{i-1, j} \\ & + C_{i-1, j-1}\phi_{i-1, j-1} + C_{i, j-1}\phi_{i, j-1} \\ & + C_{i, j}G_{i, j} \end{aligned} \quad (6)$$

이상의 방법을 정리하면 다음의 다섯단계로 된다. 즉

1. 영역을 작은 요소로 분할한다.

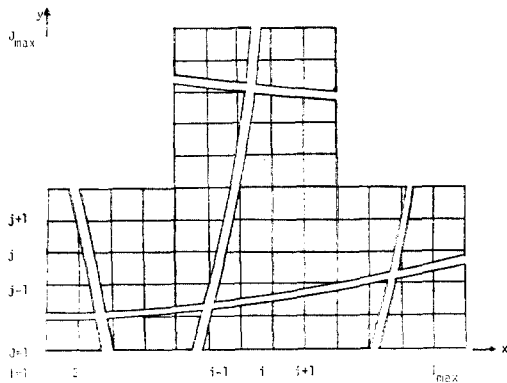


그림 1 유동영역의 분할

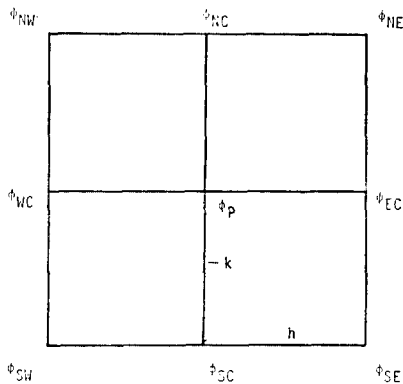


그림 2 FAM 요소

2. 요소내에서 편미분 방정식을 선형화 한다.
3. 경계조건을 다항식등으로 개략함수로 정의한다.
4. 요소내에서 해석적 해를 구하여계수를 구한다.
5. 최종적으로 얻어지는 대수식을 푼다.

3. 熱流動解折에 應用

有限解折法을 층류 2차원 流動 및 熱傳達 解折에 적용해 보기 위하여 관계식을 정리하면 다음과 같다. 먼저 연속방정식은

$$u_x + v_y = 0 \quad (7)$$

이고 代表속도 U 와 길이 L 에 대하여 무차원화된 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 된다.

$$uu_x + vv_y = -p_x + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) \quad (8)$$

$$uv_x + vw_y = -p_y + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) \quad (9)$$

여기서 $Re = \frac{UL}{\nu}$ 로서 레이놀즈 수이다. 압력의 변화를 구하기 위해서는 식(8)과 식(9)에서

$$P_{xx} + p_{yy} = 2(u_x v_y - v_x u_y) \quad (10)$$

가 된다. 위에서는 미지수가 u, v, p 가 된다. 한편 유선함수 ϕ 와 와도 ξ 를 도입하여 와도확산 방정식을 이용하면 해석하고자 하는 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = Re[u\xi_x + v\xi_y] \quad (11)$$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = -\xi \quad (12)$$

여기서 $\xi = V_x - v_y$ 이고

$$v = -\phi_x, u = \phi_y \quad (14)$$

이다.

무차원화된 온도 $\theta = (T - T_w)/(T_i - T_w)$ 를 도입하면 에너지 방정식을 다음과 같다.

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = Pe[u\theta_x + v\theta_y] \quad (15)$$

여기서 Pe 는 피크리수이고 $Re \cdot Pr$ 즉 레이놀즈수와 프란틀수의 곱이다.

식(22)의 와도확산방정식으로 유동을 해석할 경우에 A 와 B 를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \frac{1}{2} Re \bar{u} = \frac{1}{2} Re \int_{-k-h}^{kh} u dx dy / 4hk$$

$$B = \frac{1}{2} Re \bar{v} = \frac{1}{2} Re \int_{-k-h}^{kh} v dx dy / 4hk$$

여기서 $h = \Delta x$, $k = \Delta y$ 이고 \bar{u}, \bar{v} 는 요소내의 평균속도라고 할 수 있다. 그러면 식(11)은

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 2A\xi_x + 2B\xi_y \quad (16)$$

가 된다. 한편 경계조건을 구하기 위하여 예로 $\xi_E(x)$ 는

$$\xi_E(x) = a_E + b_E x + c_E x^2 \quad (17)$$

로 가정한다. 이때

$$a_E = \xi_{EC}$$

$$b_E = \frac{1}{2k} [\xi_{NE} - \xi_{SE}]$$

$$c_E = \frac{1}{2k^2} [\xi_{NE} - 2\xi_{EC} + \xi_{SE}]$$

로 나타낼 수 있다. 이와 같이 ξ_w, ξ_N, ξ_S 를 가정한다면 식(16)은 변수분리법에 의하여 요소내에서의 해를 구할 수 있다.

P 점에서 해의 값을 구하면 다음의 형태로 주어 질 것이다.

$$\xi_P = \sum_{n=1}^8 C_n \xi_n = C_{EC} \xi_{EC} + C_{WC} \xi_{WC} + C_{NC} \xi_{NC} + C_{SC} \xi_{SC} + C_{NE} \xi_{NE} + C_{NW} \xi_{NW} + C_{SW} \xi_{SW} + C_{SE} \xi_{SE} \quad (18)$$

여기서 계수는 극부해에 의하여 계산되겠으나 $h = k$ 의 경우에는 다음과 같다.

$$C_{NE} = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{-Ah}(E_2 + E_3) + e^{-Bh}(\bar{E}_1 + \bar{E}_3)]$$

$$C_{EC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-Ah}[E_1 - E_2]}{2 \cosh f_n}$$

$$C_{SE} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{-Ah}(-E_2 + E_3) + e^{Bh}(\bar{E}_2 + E_3)]$$

$$C_{SC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{Bh}}{2 \cosh f_n} [\bar{E}_1 + \bar{E}_2]$$

$$C_{SW} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{Ah}(-E_2 + E_3) + e^{Bh}(-\bar{E}_2 + \bar{E}_3)]$$

$$C_{WC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{Ah}}{2 \cosh f_n} [E_1 - E_3]$$

$$C_{NW} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{Ah}(E_2 + E_3) + e^{-Bh}]$$

$$C_{NC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-Bh}}{2\cosh f_n} [\bar{E}_1 - \bar{E}_3]$$

여기서

$$E_j = \int_{-1}^1 x^{j-1} e^{-Bhx} \cos(a_n x) dx$$

$$\bar{E}_j = \int_{-1}^1 y^{j-1} e^{-Ah y} \cos(a_n y) dy$$

$$a_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

이다. 일반적으로 위의 계수는 A, B, h, k 의 함수가 된다.

식(12)는 ϕ 에 대한 프와송 방정식이 된다. 이 경우 우변의 $\xi(x, y)$ 는 적당한 함수로 가정을 해야하는데 2차 다항식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\xi(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy + a_7 x^2 y + a_8 x y^2 + a_9 x^2 y^2 \quad (19)$$

여기서 계수 a_i 는 요소내의 9개 노드에서의 ξ 값에 의하여 정해진다. 와도확산방정식에서와 같이 경계조건과 함께 방정식 $\Delta^2 \phi = -\xi$ 의 해를 구한후 점 P 에서 값을 구하면 다음의 형태로 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_P = & D_{NE} \phi_{NE} + D_{EC} \phi_{EC} + D_{SE} \phi_{SE} + D_{SC} \phi_{SC} \\ & + D_{SW} \phi_{SW} + D_{WC} \phi_{WC} + D_{NW} \phi_{NW} + D_{NC} \phi_{NC} \\ & + B_{NE} \xi_{NE} + B_{EC} \xi_{EC} + B_{SE} \xi_{SE} + B_{SC} \xi_{SC} \\ & + B_{SW} \xi_{SW} + B_{WC} \xi_{WC} + B_{NW} \xi_{NW} + B_{NC} \xi_{NC} \\ & + B_P \xi_P \end{aligned} \quad (20)$$

계수 D_{NE} 등은 $\Delta^2 \phi = 0$ 의 해에서 구해지며 이는 앞에서 계수 C_{NE} 등에서 $A=B=0$ 의 경우에 해당된다. 참고로 $h=k$ 일때 이 계수값은 다음과 같다.

$$D_{EC} = D_{WC} = D_{NC} = D_{SC} = 0.205313$$

$$D_{NE} = D_{NW} = D_{SW} = D_{SE} = 0.044685$$

계수 B_{NE} 등을 포함하는 항들은 $\Delta^2 \phi = -\xi$ 의 homogeneous 경계조건으로부터 구해지는 해로 $h=k$ 의 경우 계수값들은 다음과 같다.

$$B_{EC} = B_{WC} = B_{NC} = B_{SC} = 0.018522h^2$$

$$B_{NE} = B_{SE} = B_{SW} = B_{NW} = 0.01895h^2$$

$$B_P = 0.21289h^2$$

ϕ 가 정해지면 u_P, v_P 는 식(20)의 계수의 미분치, 즉 $D_{x, NE}, D_{y, NE}$ 등에 의하여 다음과 같이 주

어진다.

$$u_P = \sum_{n=1}^8 D_{x, n} \phi_n + \sum_{m=1}^9 B_{x, m} \xi_m \quad (21)$$

$$-v_P = \sum_{n=1}^8 D_{y, n} \phi_n + \sum_{m=1}^9 B_{y, m} \xi_m \quad (22)$$

온도의 분포를 구한다면 에너지 방정식(15)를 선형화 하기 위하여

$$E = \frac{1}{2} Pe \bar{u}, \quad D = \frac{1}{2} Pe \bar{v}$$

라고 놓으면 식(15)는 다음과 같이 된다.

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 2E\theta_x + 2D\theta_y \quad (23)$$

이는 식(16)과 마찬가지로 다음의 형태로 유한 해석법의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \theta_P = & C_{NE} \theta_{NE} + C_{EC} \theta_{EC} + C_{SE} \theta_{SE} + C_{SC} \theta_{SC} \\ & + C_{SW} \theta_{SW} + C_{WC} \theta_{WC} + C_{NW} \theta_{NW} + C_{NC} \theta_{NC} \end{aligned} \quad (24)$$

각 계수의 유도, 수치해석과정 등 자세한 내용은 여기서 생략하기로 한다.

4. 계산에 및 고찰

위에서 설명된 방법을 간단한 2차원 층류 열 유동해석에 적용한 예를 보면 먼저 2차원 닥트에 있는 캐비티내의 유동을 들 수 있다. 캐비티의 폭 W 와 입구에서 평균유속 \bar{U} 에 의한 Re 를 변화시키면서 계산을 수행하였는데 $Re=1000$ 일때의 결과를 그림 3과 그림 4에 나타내었다. 그림 5에는 캐비티의 벽면온도를 일정온도로 유지하였을때의 온도분포를 나타내었다. Chen and Obasih⁽¹⁰⁾은 위 계산을 통하여 FAM이 FDM에 비하여, 특히 Re 수와 Pe 수가 큰 경우에 계

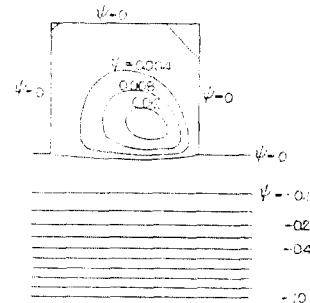


그림 3 캐비티에서의 등 유선도, $Re=1,000$

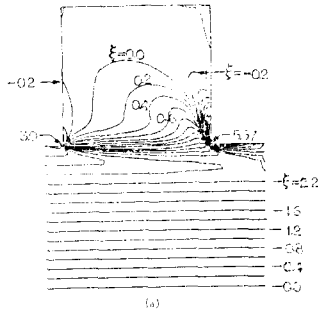


그림 4 캐비티에서의 등 와도선도, $Re=1,000$

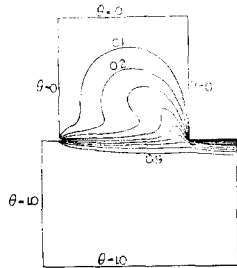


그림 5 캐비티에서의 등온선도, $Re=1,000, Pr=1$

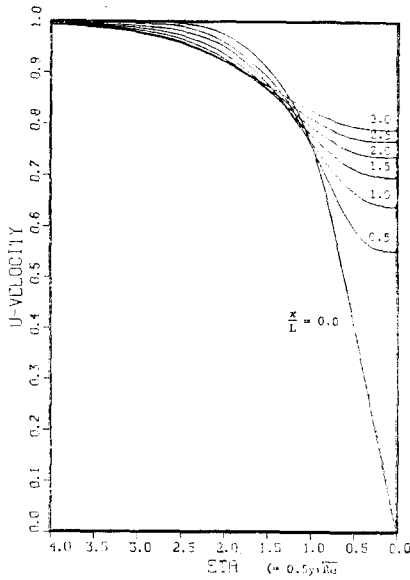


그림 6 평관후류에서의 속도분포, $Re=800$

산이 안정하고 수렴성이 좋으며 계산결과 정확하다고 하였다. 유동계산의 경우 PRIME 컴퓨터에 의하여 $Re=10, 100, 300, 1000, 3700$ 일때 각각 3.5 분, 5.0 분, 25 분, 60 분, 150 분의 CPU 시간이 소요 되었다고 보고 되었다. 물론 계산시간은 오차한계에 따라서 다르겠지만 질량과 와류를 약 0.5% 정도로 계산한 것이다. 유동해석을 한 후 온도분포계산은 Re 수와 Pr 수의 증가에 따라서 계산시간이 많이 소요된다.

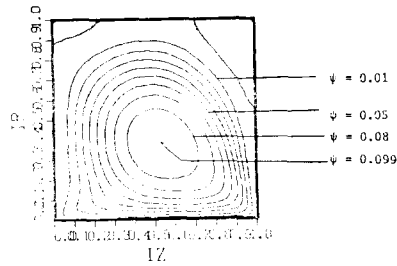


그림 7 사각 캐비티내에서 등 유선도, $Re=400$

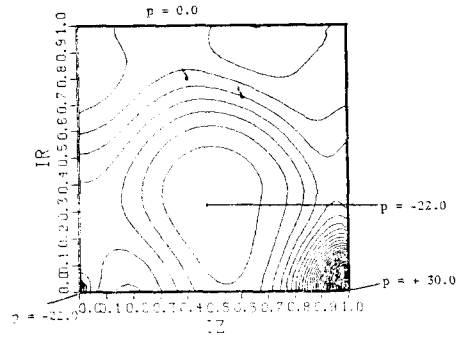


그림 8 사각 캐비티 내에서 압력분포도, $Re=400$

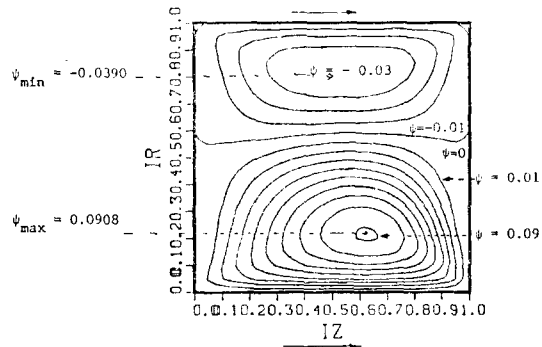


그림 9 사각 캐비티내에서의 유선, $Re=100, U_{top} = \frac{1}{2} U_{bottom}$

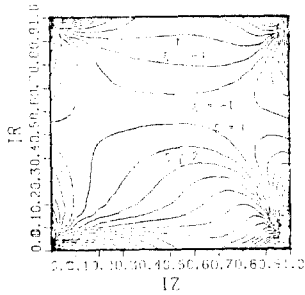


그림 10 사각 캐비티내에서 등 와도선도, $Re=100$,

$$U_{top} = \frac{1}{2} U_{bottom}$$

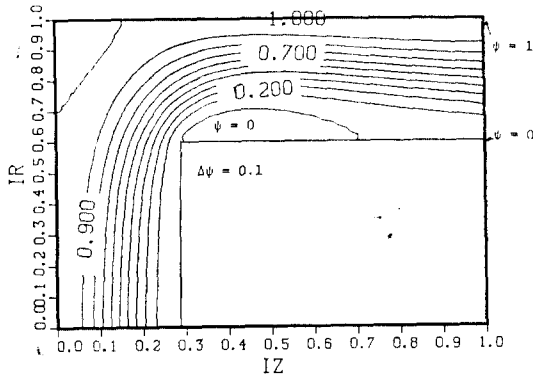


그림 11 직각 유로에서 유선, $Re=100$

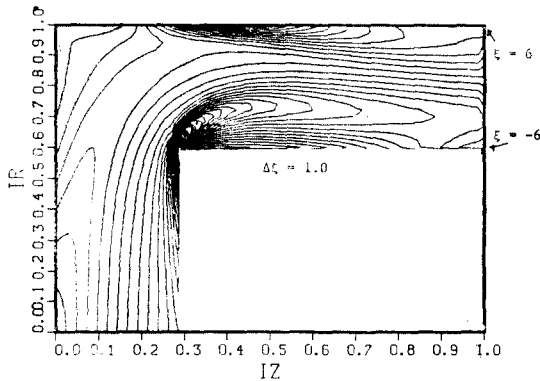


그림 12 직각 유로에서 등 와도선도, $Re=100$

그림 6에는 평판후류(Near wake of flat plate)의 계산결과를 보여주고 있다. Re 수가 크다는 가정하에 해석된 Gold Stein의 해와 Navier-Stokes 방정식의 해를 Chen and Singh⁽¹¹⁾은 비교하였다. 그들은 평판위의 Blasius 해와 Wake의 상호작용을 해석하여 본 것이었다.

그림 7에는 캐비티의 3면이 고정되고 하부

1면이 일정속도로 움직일때의 캐비티내의 유동 해석을 나타내었다. 이 유동은 과거 FDM, FEM에 의하여서 많은 계산이 시도된 유동이기 때문에 서로 비교하기 좋은 유동이다. 그림 8에서는 계산된 압력의 분포를 나타내었다. 그림 9와 그림 10에서는 캐비티의 마주보는 두벽이 고정되고 상하 벽이 다른속도로 움직일때 유동을 계산하였다. 그림 11과 그림 12에서는 90° 꺾어진 유로내에서의 유동해석 결과를 보여주고 있다. 이 외에도 각종 2차원의 열 유동해석 결과가 있으나 생략하기로 한다.

이상의 설명을 통하여 볼 때 유한해석법은 계수의 계산에 많은 시간이 요하고 계수의 일부는 유동속도의 함수가 되기 때문에 매 반복계산때마다 계산을 하여야 한다. 이에 비하면 유한차분법은 요소분활이 이루어지면 간단하게 수치해석을 위한 계수가 쉽게 구하여 진다. 이러한 점으로 미루어 본 필자의 생각으로는, FAM의 계수처리를 효과적으로 한 후 이의 장점, 즉 수치계산상의 안정성, 수렴성을 효과적으로 이용하기 위하여 기존 FDM과 혼용하여 문제를 해석하는 것도 좋다고 생각한다. 즉 불규칙적인 경계의 형상, 조건의 처리가 FAM에서는 어렵기 때문이다. 또한 요소형태에 따른 FAM의 확장에 관한 연구, 즉 여러가지 좌표계에 따른 국부해의 개발도 이루어져야겠고 3차원에서의 확장도 시도되어야겠다. 한편 parabolic type, hyperbolic type의 편미분 방정식의 해법에 관해서도 연구가 가능하리라 생각된다. 아직 이분야의 구체적 연구를 다루어 보지 못한 필자가 감히 FAM에 대하여 소개하였음을 송구스럽게 생각하나 전산유체역학에 관심을 갖고 있는 연구자들이 관심을 두어 볼 만한 방법이라고 생각된다.

참 고 문 헌

1. Chen, C. J. and Li, P., "The Finite Differntila Method in Heat Conduction-Application of Analytic Solution Technique," ASME Paper 79-

- WA/HT-50, Decmeber 2-7, 1979, ASME Winter Annual Meeting, New York, N.Y.
2. Li, P. and Chen, C. J.: "The Finite Analytic Method for Steady and Unsteady Heat Transfer Problems," Paper No. 80-HT-86, ASME/AICE National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida, July 27-30, 1980.
 3. Khalighi, B.: "Numerical Solution of Two-Dimensional Poisson and La-Place Equations by Finite Analytic Methods," M.S. Thesis, Mechanical Engineering Program, 1980, Univ. of Iowa Iowa City, Iowa.
 4. Chen, C. J. and Yoon, H. Y., "Finite Analytic Numerical Solution of Convective Heat Transfer in Axisymmetric Energy System", TR-ECJC, 2-80, Energy Division, The University of Iowa, 1980.
 5. Sheikhalami, M.Z.: "Application of Finite Analytic Method to the Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems of Ordinary Differential Equations," M.S. Thesis, Mechanical¹ Engineering Program, 1980, Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa.
 6. Chen, C. J. and Ho, K.S., "Calculation of Finite Analytic Coefficients for Two Dimensional Navier-Stokes Equation". Report E-CJC 81-4, Energy Division, Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa.
 7. Chen, C. J., Naseri-Neshat, H. and Li, P.: "The Finite Analytic Method Applications of Analytic Soluioni Techniques to the Numerical Solutions of Ordinary and Partial Differential Equations," Report No. E-CJC-1-80, 1980, Energy Division, Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa. Also see Journal of Numerical Heat Transfer, Vol. 4, 1981, pp. 179-197.
 8. Chen, C. J., Naseri-Neshat, H. and Ho, K-S., "Finite Analytic Numerical Solution of Heat Transfer in Two-Dimensional Cavity Flow," ASME Paper, HTD, Vol. 13, ASME Winter Annual Meeting, November, 1980, Chicago, IL. [To be published in the *Journal of Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, 1981.]
 9. Chen, C. J., Naseri-Neshat, H. and Ho, K-S., "The Finite Analytic Method-The Finite Analytic Numerical Solution for Two-Dimensional Navier-Stokes and Energy Equations," Vol. 1, The Finite Analytic Method Technical Report, Iowa Institute of Hydraulic Research, The Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa, August 1981.
 10. Chen, C.J. and Obasih, K., "The Finite Analytic Method-The Finite Analytic Numerical Solution of Heat Transfer and Flow Past a Square Channel Cavity," Vol. 2, The Finite Analytic Method Technical Report, Iowa Institute of Hydraulic Research, The Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa August, 1981.
 11. Chen, C.J. and Singh K., "Finite Analytic Numerical Solution of Two-Dimensional Navier-Stokes Equations In Primitive Variables," Vol. 3, The Finite Analytic Method Technical Report, IIHR, The Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa, August, 1981.
 12. Chen, C. J. and Chang, S.M., "Finite Analytic Numerical Soluione for Steady Two-Dimensional Heat Transfer and Flow in Bends Vol. 4, The Finite Analytic Method Technical Report, IIHR, The Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa, August 1981.
 13. Chen, C. J. and Chen, H. C., "The Finite Analytic Method-The Finite Analytic Numerical Solution for Unsteady Two-Dimensional Navier-Stokes Equations," Vol. 6, The Finite Analytic Method Technical Report, Iowa Institute of Hydraulic Research, The Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa, August 1981.

