大韓交通學會誌 第一卷 第一號, pp.43～47. TRSK JOURNAL VOL. 1 NO. 1

□論 文□

個人別 選擇行爲에서의 重力模型의 有效性

Validity of Gravity Models for Individual Choies

陰 盛 稷*
(國土開發硏究院・首席硏究員)

目 次

ABSTRACT

Within the conventional transportation planning process, "trip distribution" has a significant role to play. The most widely applied trip distribution model is the gravity model, for which Wilson provided the theoretical basis in 1967. The concept of the gravity model, however, still remains ambiguous if we analyze the "trip distribution" with a disaggregate data set.

Thus, this paper hypothesizes that the gravity technique is still valid even with the disaggregate data set, by proving that the estimated coefficients of the gravity model, which is derived under the principle of entropy maximization, are identical with those of the multinomial logit model, which is derived under the principle of individual utility maximization.

Ⅰ. 序 論

重力模型은 전통적인 交通計劃 樹立의 여러 과정 중 通行分布量을 推定하는 과정에서 가장 널리 이용되는 技法이며 윌슨(1967)에 의해 그 理論的 기초가 제시되었음은 이미 알려진 사실이다. 즉 윌슨은 「엔트로피 最大化 原理(Entropy-maximizing principle)」에 의거하여 重力 模型을 유도함으로써 그때까지 交通計劃家들 사이에 논의되던 重力模型의 理論的 根據, 解析上의 혼동 등을 거의 해결하였다. 「엔트로피」의 개념은 物理學의 「熱力學 第二法則」에 그 起源을 두고 있으며 섀논(1948)이 情報理論에 「엔트로피」를 導入함으로써 情報를 定量化하는 分析手段으로 이용하였다.

한편, 最近에는 通行分布量을 推定하는 또 하나의 技法으로 個人別 選擇模型이 대두되었는 바, 맥화든(1973)은 미시경제학에서 널리 利用되던 消費者 行態理論, 즉 「效用 極大化

*本 學會 理事, 都市 및 地域計劃學博士・本稿는 筆者가 Northwestern 大學校에서 參與한 硏究의 結果 一部를 要約한 것이다. 本 論題開發에 도움을 준 A. Anas 敎授에게 感謝를 드린다.

原理 (Utility maximizing principle) 」에 의거하여 새로운 通行 需要 推定模型 (즉, 個人別 選擇 模型) 을 유도하였다.

그러나 위와 같이 相異한 두가지 接近方法에 의해 유도된 通行分布量 豫測模型은 본질적으로 그 模型 形態가 同一함에도 불구하고 利用資料의 相異性으로 인하여 서로 다른 模型으로 간주되어 왔다. 다시 말하면 「엔트로피 極大化 原理」에 의하여 유도된 重力模型은 一般的으로 統合된 資料를 利用하여 推定하게 되고 「效用 極大化 原理」에 의하여 유도된 「로짓」 模型은 個人別 資料를 利用하여 推定하기 때문에 그 結果를 서로 比較하기에 어려움이 있었다.

따라서 本 稿에서는 위의 두가지 相異한 接近方法이 같은 資料를 利用할 경우에 同一한 결과를 얻을수 있다는 것을 증명함으로써 統合된 資料를 주로 利用하는 重力模型이 個人別 資料를 이용하여 推定하는 경우에도 그 有效性이 충분히 입증됨을 설명하였다.

Ⅱ. 統合된 資料를 利用할 경우의 重力模型의 有効性

윌슨이 「엔트로피 極大化 原理」에 의해 유도한 重力模型은 統合된 資料의 利用을 기본전제로 하고 있기 때문에 (즉 相對度數) 통합된 자료를 이용할 경우에는 重力模型의 有效性은 논의할 필요도 없다. 즉 아래와 같이 두개의 情報源이 있다고 하고

$O_i = \{ o_1, o_2, \cdots\cdots o_I \}$: 通行의 出發地 ··(1)

$D_j = \{ d_1, d_2, \cdots\cdots d_J \}$: 通行의 到着地 ··(2)

O_i에 따른 確率 (相對度數) 을 P_i, D_j에 따른 確率을 P_j라고 하면 全體 情報源은 $S = O_i \otimes D_j = \{ o_1d_1, o_2d_2 \cdots\cdots o_Id_J \}$가 되고 各 情報源 間의 結合 確率은

O_i \ D_j	d_1	d_2 ········	d_J
o_1	p_{11}	p_{12} ········	p_{1J}
o_2	p_{21}	p_{22} ········	p_{2J}
⋮	⋮	⋮	⋮
o_I	p_{I1}	p_{I2} ········	p_{IJ}

가 된다. 이 경우 結合 「엔트로피」(joint entropy) 는

$$H_{(S)} = -\sum_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij} \cdots\cdots (3)$$

이며 [1] 이 「엔트로피」를 最大化 혹은 $-H_{(S)}$ 를 最小化하는 문제는

$$\underset{(P_{ij})}{\mathrm{Min}} \; -H_{(S)} = \sum_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij} \cdots\cdots (4)$$

但, $\sum_i \sum_j P_{ij} = 1$, $i = 1,2, \cdots\cdots I$, $j = 1,2, \cdots\cdots J$ ·······(5)

$$\sum_j P_{ij} = O_i / N, \; i = 1,2, \cdots\cdots I \cdots\cdots (6)$$

$$\sum_i P_{ij} = D_j / N, \; j = 1,2, \cdots\cdots J \cdots\cdots (7)$$

$$\sum_i \sum_j P_{ij} X_{ijk} = X_k / N, \; k = 1,2 \cdots K \cdots\cdots (8)$$

으로 구성된다. 여기서 選擇 確率 P_{ij}는 未知이며 가장 確率的이고 情報를 最小化하는 豫測値를 발견하려는 것이 目的函數가 된다. 또 N은 總 通行者數, X_{ijk}는 出發地 i에서 到着地 j로 通行할 때의 交通低抗 (예 : 交通時間, 交通費用, 交通料金 等)을

1) : $-H_{(S)}$ 는 섀논의 情報量 測定値 (Shannon's measure of information) 혹은 負의 「엔트로피」라고 한다.

나타내는 變數로서 線型模型일 경우

$$\sum_k X_{ijk} = a_1 X_{ij1} + a_1 X_{ij2} + \cdots\cdots + a_k X_{ijk}$$

로 表示할 수 있다.

式(5)~式(7)에 各各 對應하는 라그란쥐 乘數 (Lagrangian multiplier)를 λ_{oi}, λ_{dj}, λ_k 라고 하면 위 最小化 問題는

$$\begin{aligned} & \log[-H_{(S)}] \\ & = \sum_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij} - \theta \left(\sum_i \sum_j P_{ij} - 1\right) \\ & - \sum_i \lambda_{oi} \left(\sum_j P_{ij} - O_i / N\right) - \sum_j \lambda_{dj} \\ & \left(\sum_i P_{ij} - D_j / N\right) \\ & - \sum_k \lambda_k \left(\sum_i \sum_j P_{ij} X_{ijk} - X_k / N\right) \cdots\cdots (9) \end{aligned}$$

의 一次條件을 만족시키는 P_{ij}, θ, λ_{oi}, λ_{dj}, λ_k를 구하는 것으로 1차 조건식은

$$\frac{\partial \log[-H_{(S)}]}{\partial P_{ij}} = 1 + \log P_{ij} - \theta - \lambda_{oi} - \lambda_{dj} - \sum_k \lambda_k X_{ijk} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

$$\frac{\partial \log[-H_{(S)}]}{\partial \theta} = \sum_i \sum_j P_{ij} - 1 = 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

$$\frac{\partial \log[-H_{(S)}]}{\partial \lambda_{oi}} = \sum_j P_{ij} - O_i / N = 0 \cdots (12)$$

$$\frac{\partial \log[-H_{(S)}]}{\partial \lambda_{dj}} = \sum_i P_{ij} - D_j / N = 0 \cdots (13)$$

$$\frac{\partial \log[-H_{(S)}]}{\partial \lambda_k} = \sum_i \sum_j P_{ij} X_{ijk} - X_k / N = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

이다. 式(10)을 정리하면

$$\begin{aligned} P_{ij} & = \exp\left(-1 + \theta + \lambda_{oi} + \lambda_{dj} + \sum_k \lambda_k X_{ijk}\right) \\ & = e^{(-1+\theta)} \cdot e^{\left(\lambda_{oi} + \lambda_{dj} + \sum_k \lambda_k X_{ijk}\right)} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15) \end{aligned}$$

가 되고 이 式(15)를 式(11)에 대입하면

$$\exp(-1+\theta) = \frac{1}{\sum_i \sum_j e^{\lambda_{oi} + \lambda_{dj} + \sum_k \lambda_k X_{ijk}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

이 되며 이를 다시 式 (15)에 대입하면

$$P_{ij} = \frac{\exp\left(\lambda_{oi} + \lambda_{di} + \sum_k \lambda_k X_{ijk}\right)}{\sum_m \sum_n \exp\left(\lambda_{om} + \lambda_{dn} + \sum_k \lambda_k X_{mnk}\right)} \cdots (17)$$

가 된다.

또 式 (15)를 式 (12), 式 (13)에 각각 대입시키면

$$\exp(\lambda_{oi}) = O_i / \sum_j \exp\left(\lambda_{dj} + \sum_k \lambda_k X_{ijk}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

$$\exp(\lambda_{dj}) = D_j / \sum_i \exp\left(\lambda_{oi} + \sum_k \lambda_k X_{ijk}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

이 되고,

$$A_i = \exp(\lambda_{oi}) / O_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

$$B_j = \exp(\lambda_{dj}) / D_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

로 하면 重力模型은 아래와 같이 유도된다. 즉 出發地 i와 到着地 j간의 通行量 T_{ij}는

$$N_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp\left(\sum_k \lambda_k X_{ijk}\right) \cdots (22)$$

但,

$$A_i = [\sum_j B_j D_j \exp(\sum_k \lambda_k X_{ijk})]^{-1} \quad \cdots\cdots (23)$$

$$B_j = [\sum_i A_i O_i \exp(\sum_k \lambda_k X_{ijk})]^{-1} \quad \cdots\cdots (24)$$

가 된다.

이 式 (22)는 바로 윌슨(1967)이 유도한 重力模型과 同一하다.

한편 「效用 極大化 原理」에 입각한 起終點 同時 選擇 模型(joint orgin-destination choice model)을 유도하기 위하여 效用函數를

$$\hat{U}_{ij} = \beta_{oi} + \beta_{dj} + \sum_k \beta_k X_{ijk} + \varepsilon_{ij} \cdots\cdots (25)$$

로 정의하면 選擇確率 P_{ij}는

$$P_{ij} = P_{rob}(\hat{U}_{ij} > \hat{U}_{mn} \text{ for all } i \neq m \text{ and } j \neq n) \cdots\cdots (26)$$

가 된다. 여기서 β_{oi}, β_{dj}는 各各 出發地 및 到着地의 特性을 나타내는 效用 係數이고 β_k는 X_{ijk}에 對應하는 效用 係數이다. 또 ε_{ij}는 X_{ijk}가 나타내지 못하는 $\hat{U}_{ij}$의 確率的 效用을 의미한다. 이 ε_{ij}를 iid Weibull分布(independently and identically distributed Weibull distribution) 를 한다고 가정하면, P_{ij}는

$$P_{ij} = \frac{\exp(\beta_{oi} + \beta_{dj} + \sum_k \beta_k X_{ijk})}{\sum_m \sum_n \exp(\beta_{om} + \beta_{dn} + \sum_k \beta_k X_{mnk})} \quad \cdots\cdots (27)$$

과 같이 導出할 수 있으며, 式 (27) 에서 最尤推定法(Maximum likelihood estimation technique)에 의해 尤度函數(likelihood function) $\log \mathcal{L} = \sum_i \sum_j N_{ij} \log P_{ij}$를 極大化하는 β_{oi}, β_{dj}, β_k를 각각 推定할 수 있다.

結果的으로 式(17)과 式(27)은 同一하기 때문에 이들 두 模型에 同一한 變數를 利用한다면

$$\lambda_k = \beta_k, \ \forall k$$
$$\lambda_{oi} + \lambda_{dj} = \beta_{oi} + \beta_{dj}, \forall i,j \quad \cdots\cdots (28)$$

가 成立한다. 따라서 統合된 資料를 利用하는 경우에 「效用 極大化 原理」에 입각하여 推定한 效用 係數는 「엔트로피 極大化 原理」에 의해 推定된 라그란쥐의 乘數와 일치하게 되어 두가지 相異한 接近方法이 同一한 結果를 나타내게 됨을 알 수 있다.

Ⅲ. 個人別 資料를 利用할 경우의 重力模型의 有效性

個人別 資料(individual data set or disaggregated data set)는 選擇者(通行者) 個個人의 特性을 나타내는 變數(예 : 個人別 $i \rightarrow j$ 間 通行時間, 通行費用 等)로 구성되며 出發地 i에서 到着地 j로 通行者 n이 通行할 確率은 P^n_{ij}로 表示할 수 있다. 이 경우 「엔트로피」極大化 模型은

$$\underset{(p^n_{ij})}{\text{Min}} \ -H_{(S)} = \sum_n \sum_i \sum_j p^n_{ij} \log p^n_{ij} \quad \cdots (29)$$

但, $\sum_i \sum_j p^n_{ij} = 1, \quad n = 1,2 \cdots N \cdots\cdots (30)$

$$\sum_n \sum_j p^n_{ij} = \sum_n \sum_j \delta^n_{ij}, \ i = 1,2 \cdots I \cdots (31)$$

$$\sum_n \sum_i P^n_{ij} = \sum_n \sum_i \delta^n_{ij}, \ j = 1,2 \cdots J \cdots (32)$$

$$\sum_n \sum_i \sum_j P^n_{ij} \; X^n_{ijk} = \sum_n \sum_i \sum_j \delta^n_{ij} \; X^n_{ijk}, \quad k = 1,2 \cdots K \cdots\cdots (33)$$

가 된다. 여기서 δ^n_{ij} 은 通行者 n이 $i \to j$ 間을 通行할 경우에는 1의 값을 가지며 아닐 경우에는 0인 變數이다 ($\sum_n \delta^n_j = N_j$). 式 (31) ~式 (33) 에 對應하는 라그란쥐 乘數를 각각 λ_{oi}, $i = 1,2 \cdots I$ λ_{dj}, $j = 1,2 \cdots J$ 그리고 λ_k, $k = 1,2 \cdots K$라고 하면 式 (10) ~式 (17) 까지와 類似한 方法으로

$$P_{ij}{}^n = \frac{\exp\left(\lambda_{oi} + \lambda_{dj} + \sum_k \lambda_k X^n_{ijk}\right)}{\sum_m \sum_l \exp\left(\lambda_{om} + \lambda_{dl} + \sum_k \lambda_k X^n_{mlk}\right)} \cdots\cdots (34)$$

가 된다.

또 效用極大化 模型에 의한 方法은 效用函數를

$$\hat{U}_{ij}{}^n = \beta_{oi} + \beta_{dj} + \sum_k \beta_k X^n_{ijk} + \varepsilon^n_{ij} \quad \cdots (35)$$

으로 정의할 수 있고 따라서

$$P^n_{ij} = \frac{\exp\left(\beta_{oi} + \beta_{dj} + \sum_k X^n_{ijk}\right)}{\sum_m \sum_l \exp\left(\beta_{om} + \beta_{dl} + \sum_k \beta_k X^n_{mlk}\right)} \cdots\cdots (36)$$

이 된다.

즉 個人別 資料를 利用하는 경우에도 $\beta_k = \lambda_k$ 이고 $\beta_{oi} + \beta_{dj} = \lambda_{oi} + \lambda_{dj}$ 이므로 推定結果는 同一함을 알수 있다.

V. 結 論

本 稿는 交通計劃 樹立 時 가장 널리利用되고 있는 重力模型의 有效性을 檢證하려는 것으로 「에트로피 極大化 原理」에 의해 導出된 重力模型이 「效用 極大化 原理」에 의하여 導出된 多變數 「로짓」 模型과 本質的으로 同一한 것임을 證明하였다. 지금까지 이 두가지 接近方法이 서로 相異한 方法으로 간주되어 온 이유는 模型 自體의 本質的 差異보다는 利用 資料의 相異함에서 비롯된 것이며 이 두 方法에 의하여 推定된 結果는 利用한 資料가 同一하다면 그 結果도 同一하므로 個人別 選擇 行爲를 重力模型을 利用하여 分析하더라도 推定 係數의 有效性은 충분히 立證된다고 할 수 있다.

参考文献

Anas, A., "Empirical Calibration and Testing of a Simulation Model of Residential Location", *Environment and Planning A*, vol. 7, 1975

Domencich, T.A. and D. McFadden, *Urban Travel Demand: A Behavioral Analysis*, North-Holland, 1975

McFadden, D., "Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior" in *Frontiers in Econometrics*, Academic press, 1973

McFadden, D. and F. Reid, "Aggregate Travel Demand Forecasting from Disaggregate Behavioral Models", *Transportation Research Record 534*, 1975

Shannon, C.E., "A Mathematical Theory of communication", *The Bell System Technical Journal*, vol. 17, 1948

Wilson, A.G., "A Statistical Theory of Spatial Distribution Models", *Transportation Research, vol. 1*, 1967

Wilson, A.G., *Entropy in Urban and Regional Modelling*, Pion Limited, 1970

Wilson, A.G., *Urban ana Regional Models in Geography and Planning*, Wiley-Interscience, 1974