□ 제 3 회

食品工學 計算法

卞　裕　亮
〈延世大 工大 食品工學科 敎授〉

제 2 장 식품의 흐름

2-1 액체식품의 점도

유체의 점도는 흐름에 대한 유체의 내부저항을 의미한다. 속도에 관계없이 일정한 점도를 갖는 유체를 뉴우턴유체(Newtonian fluid)라 하며, 전단속도에 따라 점도가 변하는 복잡한 거동을 나타내는 유체를 비뉴우턴유체(non-Newtonian fluid)라 한다.

그림 2-1에 나타낸 것처럼 미소 거리 dy만큼 떨어져 있는 유체의 두 평판에서 한쪽 평판에 힘 F를 작용시키면 평판은 상대속도 dv로 이동한다. 이때 전단속도가 전단응력에 비례하여 그림 2-2에 나타낸 것처럼 원점을 통과하는 직선이 되면 그 유체는 뉴우턴유체이고 직선의 기울기가 점도이다. 즉, 이를 식으로 표현하면

$$\tau=\mu(-dv/dy)=\mu\dot{r} \qquad (2\text{-}1)$$

여기서 $\tau=F/A$는 전단응력(shear stress)으로서 유체면에 평행한 방향으로 단위면적당 작용하는 힘이며, 전단속도(shear rate) $\dot{r}=(-dv/dy)$는 흐름에 직각인 방향으로 속도가 얼마나 빠르게 변하는가 즉, 속도구배(velocity gradient)를 의미한다. 점도(viscosity) μ는 비례상수로서 응력에 대한 내부저항의 크기를 나타내는 성질이다.

전단응력과 전단속도 관계가 원점을 통과하는 직선이 되지 않으면 그 유체는 비뉴우턴유

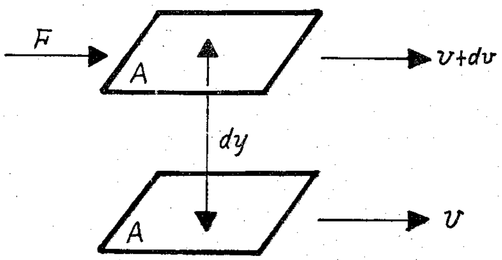

그림 2-1. 전단응력을 준 액체의 층류

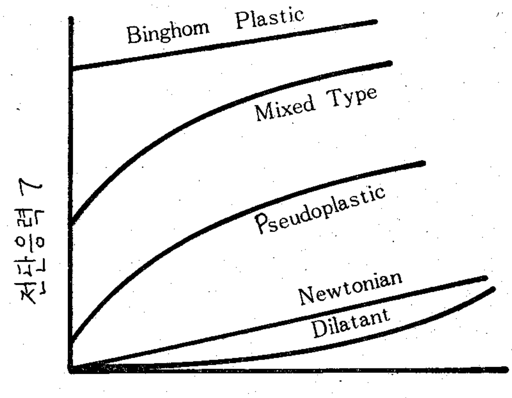

그림 2-2. 뉴우턴유체와 비 뉴우턴유체의 전단응력과 전단속도와의 관계

체이다. 일부의 유체는 응력과 전단속도의 관계가 시간에 따라 변하는 시간의존성을 나타낸다. 시간에 무관계한 비뉴우턴유체의 유동모형에는 다음과 같은 것이 있다.

빙함가소성유체 $\tau-\tau_0=\mu'\dot{\gamma}$ (2-2)

지수법칙유체 $\tau=m\dot{\gamma}^n$ (2-3)

식(2-2)에서 μ'는 소성점도(plastic viscosity)이고 τ_0는 항복응력(yield stress)이다. 식(2-3)에서 m는 점조도계수(consistency index)라 하며, n는 유동계수(flow behavior index)로서 $0<n<1$이면 의가소성유체(pseudo-plastic fluid)이고, $1<n<\infty$이면 딜라탄트(dilatant)유체이다.

일반적인 모형으로서 지수법칙모형에 항복응력을 고려한 식(2-4)와 같은 Herschel-Bulkley model이 제안되어 있으며 대부분의 식품은 이 식으로 표현된다.

$$\tau-\tau_0=m\dot{\gamma}^n \qquad (2\text{-}4)$$

m, n, τ_0는 리올로지정수(rheological parameter)라 부르는 것으로서 어떤 유체에서 일정한 조건에서는 일정한 값을 가지며, 그 유체의 유동거동(flow behavior)를 나타낸다. 시간의존성유체인 경우에는 m, n, τ_0가 전단시간(shearing time)에 따라 변하며, 딕소트로픽(thixotropic, shear thinning)과 레오펙틱(rheopectic, shear thickening)이 있다.

[예제 2-1] 동심원통점도계를 사용하여 바나나 퓨레(panana purée)의 점도를 49°C에서 측정하여 다음의 data를 얻었다. 리올로지 정수를 구하라.

(풀이) 위의 data를 평좌표에 그리면 그림 2-3에서와 같이 전단속도가 0일 때 전단응력이 0이 되므로 항복응력이 없는 유체($\tau_0=0$)란 것을 알 수 있으며, 직선이 아니므로 지수법칙

전단속도($\dot{\gamma}$)(1/s)	전단응력(τ)(P_a)
1×10^{-3}	1.06×10^{-4}
1.5 〃	1.22 〃
2 〃	1.37 〃
3 〃	1.62 〃
4 〃	1.80 〃
5 〃	2.01 〃
6 〃	2.10 〃
7 〃	2.21 〃

모형이 적용될 수 있을 것으로 추측된다. 따라서 data를 대수좌표에 그리면 그림 2-4에서와 같이 직선이 된다. 식(2-3)에서

$$\log\tau=n\log\dot{\gamma}+\log m$$

그림에서 직선의 기울기 $n=0.38$이다. $\log\dot{\gamma}=-3$ 1/s 및 $\log\tau=-3.97$ P_a을 윗식에 대입하면 $-3.97=\log m+0.38(-3)$

따라서 $m=1.49\times10^{-3}P_a\cdot s^n$

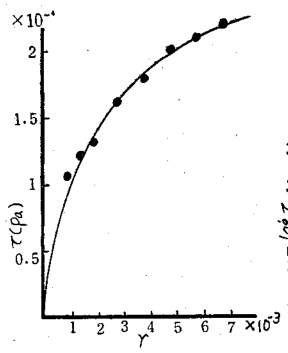

그림 2-3

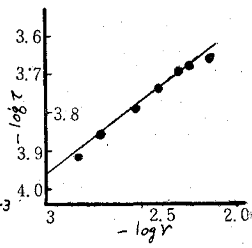

그림 2-4

2-2 점도의 온도의존성

식품의 가열살균 등의 가공조작에서는 유동거동의 온도의존성을 알아야 한다. 리올로지정수에 미치는 온도의 영향은 Arrhenius식을 적용할 수 있다. 예로서 식(2-5)에 특정한 전단 속도에서의 겉보기점도(apparent viscosity) μ_a에 미치는 온도의 영향을 나타내었다.

$$\mu_a=A\exp(-E_a/RT) \qquad (2\text{-}5)$$

여기서 A는 상수이며 E_a는 활성화에너지,

R은 기체상수, T는 절대온도이다.

[예제 2-2] 살구퓨레(apricot pureé)의 점조도계수(m)는 온도에 따라 다음과 같이 변한다. Arrhenius 형태의 식을 사용하여 리올로지상수와 온도와의 관계를 구하라.

온 도(°C)	점조도계수($P_a \cdot s^{-n}$)
4.4	13
25.0	9
54.4	4.5
60.0	3.8

(풀이) 점조도계수의 온도의존성을 Arrhenius 형식의 식으로 표현하면

$$\ln m = \ln A - \frac{E_a}{RT}$$

위의 data를 반대수좌표에 그리면 그림 2-5와 같다. 직선의 기울기로부터 $-E_a/R$을 구하면 2.03×10^3/K이다. $1/T = 3.6 \times 10^{-3}$을 대입하면

$$\ln 13 = \ln A + (2.03 \times 10^3)(3.6 \times 10^{-3})$$

$$A = 8.65 \times 10^{-3}$$

따라서 m의 온도의존성은 다음식과 같이 표현된다.

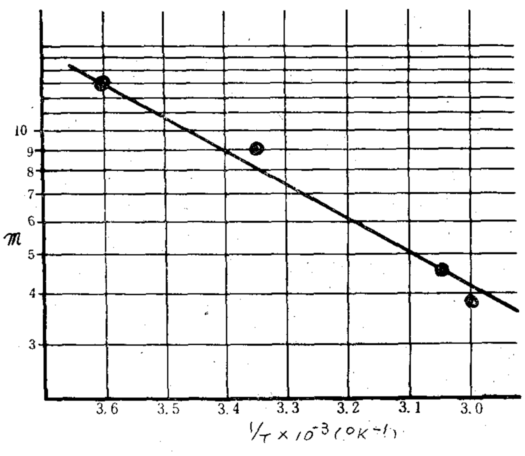

그림 2-5

$$\ln m = 2.03 \times 10^3/T - 4.75$$

2-3 점도계

액체식품의 점도를 측정하는 방법에는 식품의 종류와 측정하는 목적에 따라 여러가지가 있으나 대별하면 튜브형과 회전형이 있다.

현재 식품의 점도를 측정하는 대부분 장치가 그 결과를 점도로서 나타내게 되어 있다. 따라서 뉴우턴유체일 경우에는 곧 바로 점도가 측정되나 비뉴우턴유체일 경우에는 겉보기점도가 측정되며, 이 겉보기점도는 전단속도, 농도, 온도에 따라 변하므로 그 해석에 주의하여야 한다.

2-3-1. 튜브형 점도계(Tube viscometer)

튜브점도계에는 가압식 및 감압식등 여러가지 형식이 있으나 어떤 형식이던 크기를 알고 있는 모세관을 통하여 액체를 강제적으로 흐르게 하여 이때의 압력차와 체적유량으로부터 전단속도와 전단응력의 관계를 구한다.

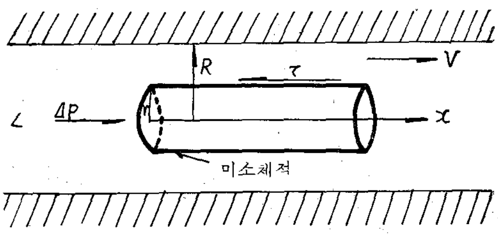

그림 2-6 파이프 안에서 한 방향의 흐름에 대한 힘의 균형

그림 2-6과 같이 반지름 R, 길이 L인 튜브안을 유체가 정상상태의 층류로 흐를 때 점선으로 표시한 가상적인 유체 원기둥에 작용하는 힘의 균형관계를 생각해 보자. 입구와 출구의 압력차 ΔP는 유체를 미는 힘이고 원주

면에 작용하는 전단응력은 유체의 흐름을 저지시키는 힘이다. 정상상태의 흐름에서는 두 힘이 같다. 즉,

$$\Delta P\pi r^2=\tau(2\pi rL) \quad (2\text{-}6)$$

$$\tau=\Delta Pr/2L \quad (2\text{-}7)$$

튜브 속을 흐르는 유체의 속도분포는 다음 관계로부터 구할 수 있다.

$$v=\int_r^R (-dv/dr)dr \quad (2\text{-}8)$$

여기서 v는 축방향으로의 속도, r은 튜브 중심에서 반경방향으로의 거리, R은 반지름이다.

만약 튜브속을 흐르는 유체가 지수법칙 유체라면

$$\tau=m\dot{r}^n=\Delta Pr/2L \quad (2\text{-}9)$$

$$\dot{r}=(-dv/dr)=\left(\frac{\Delta P}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} \quad (2\text{-}10)$$

식(2-8)에 식(2-10)을 대입하면

$$v=\left(\frac{\Delta P}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \int_r^R r^{\frac{1}{n}}\, dr \quad (2\text{-}11)$$

$$v=\left(\frac{\Delta P}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\left[R^{\frac{n+1}{n}}-r^{\frac{n+1}{n}}\right] \quad (2\text{-}12)$$

또한 체적유량 Q는 다음 식으로 주어진다.

$$Q=\int_0^R 2\pi rvdr$$

$$Q=\left(\frac{\Delta P}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{3n+1}\right) R^{\frac{3n+1}{n}} \quad (2\text{-}13)$$

튜브 점도계에서 리올로지상수를 결정하기 위해서는 튜브를 통해 흐르는 액체의 유량을 각기 달리하여 일련의 실험을 행하여 이때 ΔP를 측정한다. 이와같이 측정한 유량 Q와 ΔP 및 식(2-13)으로부터 리올로지상수를 결정할 수 있다.

〔예제 2-3〕 안지름 2.667mm, 길이 90.932cm인 튜브점도계를 사용하여 apple sauce에 대하여 다음의 data를 얻었다. m과 n을 구하라.

압력손실(ΔP) (Pa)	체적유량(Q) (m^3/s)
1.303×10^5	9.084×10^{-5}
1.446 〃	1.500×10^{-4}
1.561 〃	2.100 〃
1.987 〃	3.198 〃
2.131 〃	5.094 〃
2.413 〃	8.490 〃
2.696 〃	1.248×10^{-3}

(풀이) 식(2-13)의 대수를 취하면

$$\log\left(\frac{\Delta P}{2L}\right)=\left[\log m-n\log\pi-n\log\left(\frac{n}{3n+1}\right)-3(n+1)\log R\right]+n\log Q$$

log ($\Delta P/2L$)대 log Q의 그림을 그리면 그림 2-7과 같이 직선이 얻어지며, 직선의 기울기 $n=0.275$이다. n값을 윗 식에 대입하면 m값을 구할 수 있다. $\log Q=-4.5\ m^3/s$일 때

$$4.798=\log m-0.275(\log\pi)-0.275\log(0.151)-1.825\log(2.667\times10^{-3})+0.275(-4.5)$$

$$\log m=4.798+0.137-0.226-4.469+1.238$$

log($\Delta P/2L$)(Pa/m)	log$Q$(m^3/s)
4.855	−4.042
4.900	−3.824
4.934	−3.678
5.038	−3.495
5.069	−3.293
5.123	−3.071
5.171	−2.904

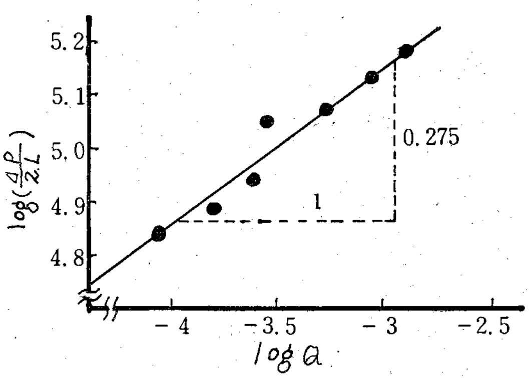

그림 2-7

$=1.249$

$\therefore\ m=17.74 P_a \cdot s^n$

〔예제 2-4〕 아래표에 나타낸 혈액의 유량과 압력차 data로부터 혈액의 유동정수를 구하라 튜브의 지름은 0.03 cm, 길이는 61 cm이다.

유량(Q) (m^3/s)	압력차($\Delta P/L$)(P_a/m)
1.13×10^{-8}	1.265×10^4
2.00 〃	2.30 〃
3.10 〃	3.45 〃
4.17 〃	4.95 〃
6.52 〃	7.24 〃

(풀이) 위의 data를 그림으로 나타내면 그림 2-8에서와 같이, $Q=0$일 때 $2(\Delta P/L)_0=0$가 되므로 $\tau_0=0$이다. 따라서 $\log Q$와 $\log(\Delta P/L)$을 plot하면 직선의 기울기는 $1/n$이고 그림으로부터 구하면 $n=0.990$이 된다.

$\log Q$(m^3/s)	$\log(\Delta P/L)$(P_a/m)
−7.947	4.102
−7.699	4.362
−7.509	4.538
−7.380	4.695
−7.186	4.860

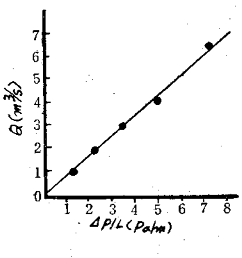

그림 2-8

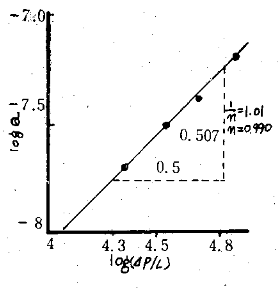

그림 2-9

m를 구하기 위하여 식(2-13)에 임의의 Q와 $(\Delta P/L)$을 대입한다. 예를 들어

$Q=4.98\times10^{-8}\ m^3/s$, $(\Delta P/L)=5.50\times10^4$ (P_a/m)를 대입하면

$$4.98\times10^{-8}=\pi\left(5.50\times10^4\times\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{0.99}}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{0.99}}\left(\frac{0.99}{3\times0.96+1}\right)\left(1.5\times10^{-4}\right)^{\frac{3\times0.99+1}{0.99}}$$

$\therefore m=2.41\times10^{-4}(P_a\cdot s^n)$

지금까지는 항복응력이 없는 유체를 다루었으나 항복응력이 있는 유체의 경우 Herschel-Bulkey model로서 다음과 같이 구한다. 식(2-4)와 (2-6)에서

$$\Delta P\pi r^2=(m\dot{r}^n+\tau_0)2\pi rL \qquad (2\text{-}14)$$

식(2-14)를 변형하면

$$\dot{r}=\frac{1}{m^{1/n}}\left(\frac{\Delta Pr}{2L}-\tau_0\right)^{\frac{1}{n}}dr \qquad (2\text{-}15)$$

항복응력이 있는 유체는 중심부근에서 전단응력이 항복응력보다 작아져 속도구배가 없이 일정한 속도로 흐르는 플러그흐름(plug flow)이 생긴다. 즉, $\tau<\tau_0$인 범위에서는 $\dot{r}=0$이며, 식(2-15)에서 $\dot{r}=0$가 되기 위해서는 $(\Delta Pr/2L-\tau_0)=0$가 되지 않으면 안되므로 $r=2L\tau_0/\Delta P$가 도고, 이점에서 속도가 최대가 된다. 따라서 중심에서부터 $r=2L\tau_0/\Delta P$인 점에서 속도분포곡선은 그림 2-10에서와 같이 불연속이 되어 $r=0$와 $r=2L\tau_0/\Delta P$ 사이에서 속도는 일정한 최대속도가 된다.

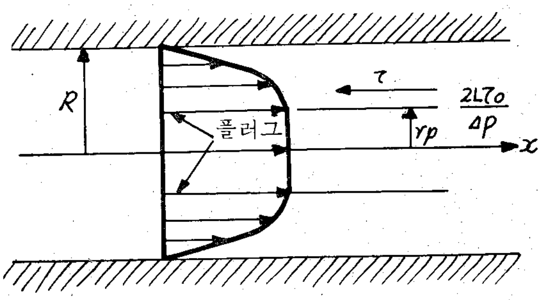

그림 2-10 파이프 안에서 빙함가소성 유체의 흐름

식(2-15)는 $2L\tau_0/\Delta P \leq \gamma < R$의 범위에서 적용되므로 식(2-8)에 대입하여 이 구간에 대해 적분하면 다음 식과 같다.

$$v=\frac{\Delta P m^{1/n}}{2L}$$

$$\left[\frac{\{(\Delta P/2L)R-\tau_0\}^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}}\right.$$

$$\left.\frac{-\{(\Delta P/2L)r-\tau_0\}^{\frac{n+1}{n}}}{}\right] \qquad (2\text{-}16)$$

또한 $0<r<2L\tau_0/\Delta P$의 범위에서 최대속도는 다음 식으로 주어진다.

$$v_{max}=\frac{2L}{\Delta P m^{1/n}}$$

$$\left[(\Delta P/2L)R-\tau_0\right]^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad (2\text{-}17)$$

튜브를 흐르는 총유량도 역시 두 범위로 나누어 생각할 수 있다. 즉 $2L\tau_0/\Delta P \leq r \leq R$의 범위에서 체적유량 Q_1은

$$Q_1=\int_{2L\tau_0/\Delta P}^{R} v2\pi r dr \qquad (2\text{-}18)$$

식(2-18)에 식(2-16)을 대입하고 적분하면

$$Q_1=\frac{2\pi}{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{\Delta P}{2L}\right)m^{1/n}}$$

$$\left[\frac{\left\{\frac{\Delta P}{2L}R-\tau_0\right\}^{\frac{n+1}{n}}\left\{R^2-\left(\frac{2L\tau_0}{\Delta P}\right)^2\right\}}{2}\right]-$$

$$\frac{\left\{\left(\frac{\Delta P}{2L}R-\tau_0\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)+\left(\frac{3n+1}{n}\right)\tau_0\right\}}{\left(\frac{\Delta P}{2L}\right)^2\left(\frac{3n+1}{n}\right)}$$

$$\frac{\left\{\frac{\Delta P}{2L}R-\tau_0\right\}^{\frac{2n+1}{n}}}{\left(\frac{2n+1}{n}\right)} \qquad (2\text{-}19)$$

최대유속으로 흐르는 부분의 체적유량 Q_2는

$$Q_2=\int_0^{2L\tau_0/\Delta P} v_{max}\, 2\pi r dr \qquad (2\text{-}20)$$

식(2-20)에 식(2-17)을 대입하고 적분하면

$$Q_2=\pi\left(\frac{2L\tau_0}{\Delta P}\right)^2\left(\frac{2L}{\Delta P m^{1/n}}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta PR}{2L}-\tau_0\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad (2\text{-}21)$$

따라서 전체유량 Q_{total}은

$$Q_{total}=Q_1+Q_2 \qquad (2\text{-}22)$$

항복응력이 있는 유체인 경우 유동정수를 구하기 위하여 먼저 τ_0를 구할 필요가 있다. 그러기 위해서는 Q와 $\Delta P/L$의 실험값을 그려 $Q=0$에 대하여 추측한다. 만약 $Q=0$일때 $(\Delta P/L)$이 0이 되지 않으면 식(2-4)에서 알 수 있는 것처럼 항복응력이 존재한다. 따라서 항복응력을 갖는 유체인 경우에는 그림으로부터 $Q=0$일때 $(\Delta P/L)$의 추측값을 구한다. 식(2-14)에서 $(\Delta Pr/2L-\tau_0)=0$. 따라서

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_0 \frac{1}{2\tau_0}=\frac{1}{r} \qquad (2\text{-}23)$$

추산한 $(\Delta P/L)_0$값을 사용하여 식(2-23)을 풀면 τ_0를 구할 수 있다.

또한 m와 n을 구하기 위해서는 두개의 다른 Q_{total}과 $\Delta P/L$의 실험값을 사용하여 식(2-22)를 동시에 풀어서 구한다. 이때 n값을 가정하여 $m^{1/n}$을 구하는 방법이 편리하다. $m^{1/n}$과 n의 가정값을 한개의 Q_{total}과 $\Delta P/L$로부터 구하고 또한 다른 Q_{total}과 $\Delta P/L$로부터 다른 $m^{1/n}$과 n을 구하면 Q_{total}과 $\Delta P/L$의 각값에 대해 각각 곡선이 얻어지며, 이 곡선의 교점이 정확한 n와 m값이 된다.

〔예제 2-5〕 튜브점도계로 시험한 tomato paste의 압력강하와 체적유량과의 관계를 나타내었다. 점도계의 측정부분은 길이 122cm,

유량 Q(m³/s)	압력강하 ΔP(Pa)	$\Delta P/L$(Pa/m)
1×10^{-7}	1.83×10^4	1.50×10^4
5 〃	2.75 〃	2.25 〃
1.3×10^{-6}	3.48 〃	2.85 〃
4.3 〃	4.76 〃	3.90 〃
9.9 〃	6.22 〃	5.10 〃

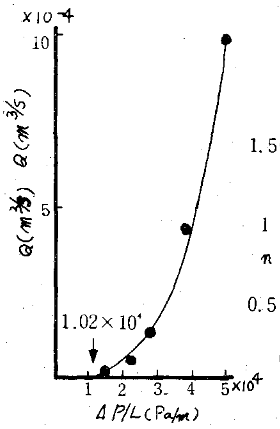

그림 2-11

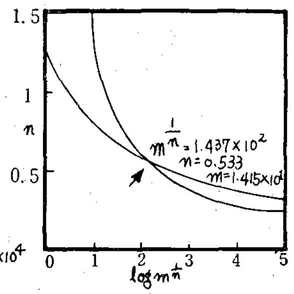

그림 2-12

안지름 1.27cm이다. 유체의 유동정수 m, n, τ_0를 구하라.

(풀이) Q와 $\Delta P/L$을 그리면 그림 2-11과 같으며 $Q=0$일 때 $(\Delta P/L)_0 = 1.02\times10^4 (P_a/m)$이다. 식(2-23)으로부터 $\tau_0 = (1/2)(\Delta P/L)_0 \cdot r = 1/2 \times 1.02\times10^4 \times 1.27\times10^{-2}/2 = 3.24\times10\ (P_a)$

$Q = 1.0\times10^{-7} m^3/s$와 $\Delta P/L = 1.5\times10^4 P_a/m$일 때 n의 각 가정값에 대하여 $m^{1/n}$을 계산하면 표의 상단과 같다. 또한 $Q = 9.9\times10^{-6} m^3/s$와 $\Delta P/L = 5.1\times10^4 (P_a/m)$일 때 n의 각 가정값에 대하여 $m^{1/n}$을 구하면 표의 하단과 같다.

두 상태에서 n의 가정값과 $m^{1/n}$을 그리면 그림 2-12와 같으며, 두 곡선의 교점은 정확한 n와 $m^{1/n}$이다. 그림 2-12로부터 유동정수를 구하면

$$n = 0.533$$

$$m = 1.415\times10\ P_a\cdot s^n$$

$$\tau_0 = 3.24\times10\ P_a$$

Q(m³/s)	$\Delta P/L$ (P_a/m)	n(−)	m^1/n (P_a-$m\cdot s$)
1.0×10^{-7}	1.5×10^4	0.1	2.344×10^{11}
		0.5	1.902×10^2
		1.0	1.695×10^1
		1.5	7.852×10^0
		2.0	5.404 〃
		2.5	4.338 〃
		3.0	3.755 〃
9.9×10^{-6}	5.5×10^4	0.1	7.254×10^{18}
		0.5	2.445×10^2
		1.0	2.431×10^0
		1.5	5.328×10^{-1}
		2.0	2.507 〃
		2.5	1.598 〃
		3.0	1.185 〃