□ 제 4 회

食品工學 計算法

卞 裕 亮
〈延世大工大 食品工學科 敎授〉

2-3-2. 튜브 점도계를 이용한 전단응력과 전단속도의 실험적 평가

튜브 점도계를 통하여 유체가 층류로 흐를 때 벽면 전단응력(wall shear stress) τ_w는 식(2-7)로부터

$$\tau_w=\frac{\Delta PR}{2L} \tag{2-24}$$

한편 튜브에서 벽면 전단속도(wall shear rate) $(-dv/dr)_w$에 대해서 Rabinowitz는 다음 식을 유도하였다. 즉, ① 흐름은 정상상태이고 층류이다. ② 유체의 흐름은 시간에 의존되지 않는다. ③ 벽면에서 미끄럼이 생기지 않는다라는 가정에서 반지름 r과 $r+dr$ 사이의 환상통로(annulus)를 통한 유체의 체적 유량은 다음 식으로 주어진다.

$$dQ=v2\pi rdr \tag{2-25}$$

여기서 v는 중심에서부터 r 위치에서의 유속이다. $2rdr=d(r^2)$이므로 식(2-25)를 부분 적분하면

$$Q=\pi\left[vr^2-\int r^2dv\right]_0^{R2} \tag{2-26}$$

전단 응력과 전단 속도 사이의 일반적인 관계식은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$dv=-f(\tau)dr \tag{2-27}$$

또한

$$dr=\frac{R}{\tau_w}d\tau \tag{2-28}$$

$$\tau_w=-\frac{R}{r}\tau \tag{2-29}$$

가정 ③에 의하면 식(2-25)에서 vr^2는 0이 되며, 식(2-27), (2-28) 및 (2-29)를 식(2-26)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$Q=\int_0^{\tau_w}\frac{\tau^2R^2}{\tau_w^2}f(\tau)\frac{R}{\tau_w}d\tau \tag{2-30}$$

식(2-29)의 양변에 τ_w^3을 곱하고 τ_w에 대하여 미분한 다음 식(2-24)를 대입하면,

$$\frac{3Q}{\pi R^3}+\frac{R\Delta P}{2L}\frac{d(Q/\pi R^3)}{d(R\Delta P/2L)}$$
$$=f(\tau_w)=\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w=\dot{r}_w \tag{2-31}$$

이 되며, 이 식을 Rabinowitsch-Mooney식이라 한다. $\bar{V}$=평균유속$=4Q/\pi D^2$이므로 식(2-31)을 변형하면 다음 식이 된다.

$$\dot{r}_w=\left(-\frac{dv}{dr}\right)_w=\frac{8\bar{V}}{D}$$
$$\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{d\ln 8\bar{V}/D}{d\ln\tau_w}\right)\right] \tag{2-32}$$

이 식을 이용하면 실험으로부터 구한 유속과 압력 손실 data로부터 그 유체의 전단 응력과 전단 속도와의 관계 즉, 유동 방정식을 구할

수 있다.

ΔP와 Q의 실험 data로부터 각 $8\bar{V}/D$에 대응하는 τ_w를 구하여 τ_w를 $8\bar{V}/D$에 대하여 양대수 좌표에 그려 기울기 $(d\ln 8\bar{V}/D/d\ln\tau_w)$를 구한다. 다음 식(2-32)를 사용하여 $\dot{r}_w$를 계산하고 $\dot{r}_w$에 대하여 τ_w를 그려 뉴우턴 유체인지, 항복 응력이 있는지 또는 의가소성인지 딜라턴트인지를 결정하게 된다.

만약 유체가 항복 응력이 없다면 $\dot{r}_w$을 τ_w에 대하여 양대수 좌표에 그려 직선의 기울기로부터 지수 법칙 유체의 n값을, 절편으로 부터는 m을 구할 수 있다. 항복 응력을 갖는 유체인 경우에는 $\dot{r}_w$가 큰 범위에서 τ_w와 $\dot{r}_w$의 data로부터 m과 n을 구할 수 있고, 항복 응력 τ_0는 $\dot{r}_w$가 작은 범위에서 구한다.

〔예제 2-6〕 안지름이 1.27 cm, 길이 1.219 m인 튜브 점도계를 사용하여 밀도가 1.09 g/cm³인 유체의 유동 특성을 결정하기 위하여 유량을 변화시키면서 압력 강하를 측정하여 다음과 같은 data를 얻었다. 유체의 성질에 적합한 유동 모형과 리올로지 특성값을 구하라.

ΔP(kPa)	W(g/s)
19.197	17.53
23.497	26.29
27.144	35.05
30.350	43.81
42.925	87.65

(풀이) 유체의 성질에 적합한 유동 모형을 결정하기 위해서는 먼저 측정한 각 ΔP와 W로부터 τ_w와 $8\bar{V}/D$를 구하여야 한다.

식(2-24)에서 $R=(1.27\text{cm}/2)(1\text{m}/100\text{ cm})=0.00635\text{ m}$, $L=1.219\text{ m}$를 대입하면

$$\tau_w=\frac{0.00635}{2(1.219)}\Delta P=0.002604\Delta P\,[\text{Pa}]$$

평균 속도 $\bar{V}$는 m/s의 단위로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{V}=W\frac{\text{g}}{\text{s}}\times\frac{1\text{ cm}^3}{1.09g}\times\frac{1\text{ m}^3}{(100)^3(\text{cm}^3)}\times\frac{1}{A\text{ m}^2}$$

여기서 A는 튜브의 단면적이므로 이를 대입하면

$$\bar{V}=0.007245W\ [\text{m/s}]$$

τ_w와 $8\bar{V}/D$를 각각 계산하면 다음과 같다.

ΔP (kPa)	τ_w(Pa) $2.604\Delta P$	W (g/s)	$\bar{V}$(m/s) $0.007245W$	$8\bar{V}/D$(1/s) $629.92\bar{V}$
19.197	49.988	17.53	0.127	79.99
23.497	62.186	26.29	0.190	119.68
27.144	70.683	35.05	0.254	159.99
30.350	79.031	43.81	0.317	199.68
42.925	111.777	87.65	0.635	400.01

$8\bar{V}/D$를 τ_w에 대하여 그리면 그림 2-13과 같으며, Rabinowitch-Mooney식의 $d\ln(8\bar{V}/D)/d\ln\tau_w$를 이 직선기울기로부터 구하면 2이다. 따라서 이 유체는 비뉴우턴 유체임을 알 수 있다.

다음 식(2-32)로부터 $\dot{r}_w$를 다음과 같이 구

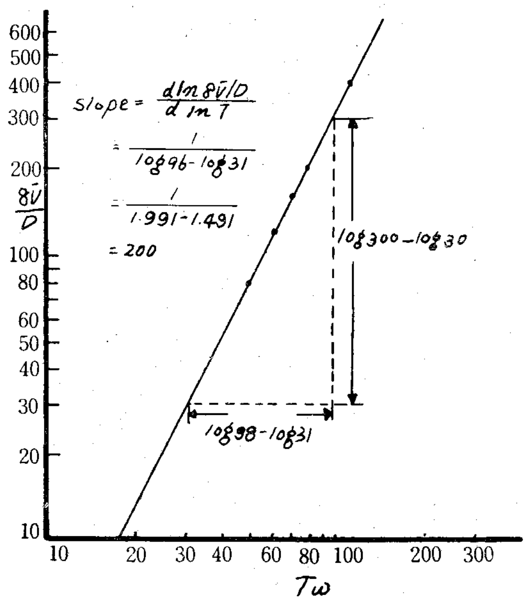

그림 2-13

한다.

$$\dot{r}_w = \frac{8\bar{V}}{D}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\frac{d\ln(8\bar{V}/D)}{d\ln\tau_w}\right)$$

$$=\frac{8\bar{V}}{D}[0.75+0.25(2)]=1.25(8\bar{V}/D)$$

각 τ_w에 대응하는 $\dot{r}_w$를 $8\bar{V}/D$로부터 계산하면 다음과 같다.

τ_w(Pa)	$8\bar{V}/D$(1/s)	r_w(1/s)
49.988	79.99	99.98
61.186	119.68	149.60
70.683	159.99	199.98
79.031	199.68	249.60
111.777	400.01	500.01

비뉴우턴 유체이므로 식(2-4)의 Herschel-Bulkley model에 맞을 것이다.

$$\tau_w-\tau_0=m\dot{r}_w^n$$

τ_w가 τ_0보다 훨씬 큰 전단 속도일 때는

$$\tau_w-\tau_0\cong\tau_w$$

따라서

$$\log\tau_w=\log m+n\log\dot{r}_w$$

τ_w에 대하여 $\dot{r}_w$를 log-log 좌표에 그려 만약 직선이 되면 기울기와 절편으로부터 n와 m을 각각 구할 수 있다. 그림 2-14를 보면 직선이 되므로 $m=5$ 및 $n=0.5$를 각각 얻을 수 있다.

이 문제에서 주어진 data로서는 τ_0값을 구할 수 없다. τ_0는 아주 낮은 τ_w에 대하여 실험하여 $\tau_w-\tau_0$가 τ_w와 상당한 차이가 있어야만 구할 수 있다. 그와 같은 조건에서는 $\log\tau_w$와 $\log\dot{r}_w$를 plot하면 직선이 되지 않으며 τ_w로부터 τ_0값을 뺀 $\log(\tau_w-\tau_0)$를 $\log\dot{r}_w$에 대하여 plot하여야만 직선이 된다. 이와 같은 문제에 대해서는 The Fundamental Food Eugineering (S.E. Charm) 62쪽 Example 1을 참고하기 바란다.

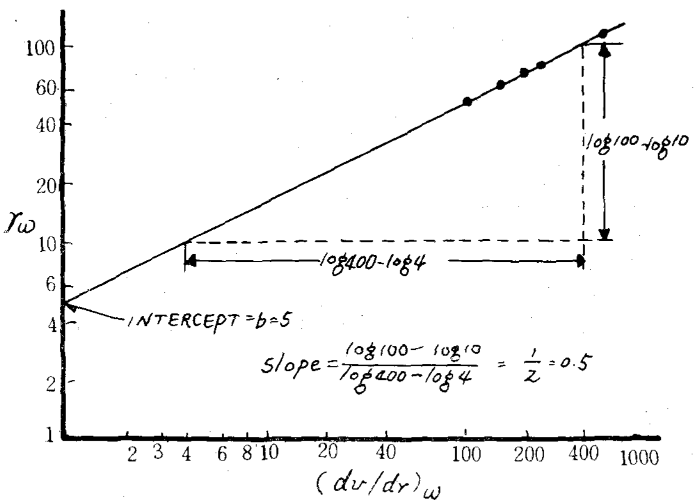

그림 2-14

2-3-3. 회전 점도계

회전 점도계(rotational viscometer)는 원통을 측정액 속에 담그어 회전시킬 때 일정한 속도로 회전시키는데 필요한 토오크(torque)를 측정하도록 되어 있으며, 점성 저항은 회전 속도의 함수이므로 전단 속도와 전단 응력의 관계를 구할 수 있다. 회전 점도계에는 동심 이중 원통 회전 점도계(coaxial cylindrical viscometer), 단일 원통 회전 점도계(single cyclinder viscometer), 원뿔 평판 점도계(cone and plate viscometer)가 있으며, 간단히 측정할 수 있어 널리 이용된다.

(가) 동심 이중 원통 점도계

그림 2-15에 나타낸 것과 같은 회전 점도계에서도 튜브 점도계에서와 동일한 가정을 하고, ω=내부 원통의 각속도, R_1=내부 원통의 반지름, R_2=외부 원통의 반지름, L=내부 원통이 담겨진 액체의 깊이라고

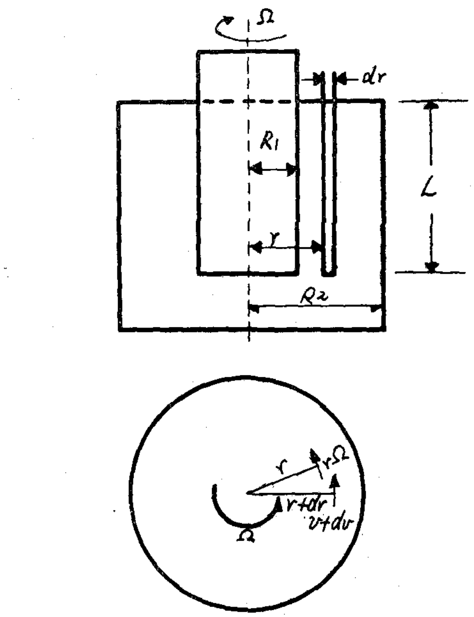

그림 2-15 동심이중원통 점도계의 모형도

한다.

점도계 안의 유체의 흐름은 정상 상태의 흐름이므로 회전 원통에 작용하는 두 토오크는 같아야 한다. 즉, 원통을 일정하게 회전시키는데 필요한 외부 토오크 Ω와 유체의 전단 응력에 의하여 작용하는 내부 토오크는 같아야 한다.

$$\Omega = 2\pi r L \tau r \qquad (2\text{-}33)$$

회전 점도계에서 내부 원통이 각속도 ω로 회전할 때 circular streamline에 대한 전단속도는 다음과 같이 구한다. 중심으로부터 임의의 반지름 r인 점에서의 선속도 v는 $r\omega$이므로, r에서 dr만큼 떨어진 점에서의 속도를 $v+dv$라 하면

$$(v+dv) = (r+dr)(\omega+d\omega) \qquad (2\text{-}34)$$

식(2-34)를 전개하고 2차 항을 무시하면

$$dv/dr = \omega + r\,d\omega/dr \qquad (2\text{-}35)$$

식(2-35)에서 ω는 내부 원통의 각속도이므로 즉, r과 $r+dr$ 면이 동일한 각속도로 회전하고 있을 때의 항이므로 전단을 일으키는 속도차는 제 2 항 만이다. 따라서

$$dv/dr = r\,d\omega/dr \qquad (2\text{-}36)$$

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) = -\frac{v}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dv}{dr} \qquad (2\text{-}37)$$

전단 속도는

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \qquad (2\text{-}38)$$

뉴우턴 유체에 대한 전단 속도와 전단 응력 사이에는 다음 식이 성립된다.

$$\tau = \mu\left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr}\right) \qquad (2\text{-}39)$$

또한 지수법칙 유체에 대해서는

$$\tau = m\left(-r\frac{d\omega}{dr}\right)^n = m\left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dr}\right)^n \qquad (2\text{-}40)$$

즉

$$\left(-r\frac{d\omega}{dr}\right) = \left(\frac{\tau}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (2\text{-}41)$$

식(2-34)의 τ에 식(2-40)을 대입하고 내부 원통 반지름에서 외부 원통 반지름 사이를 적분하면

$$-\int_0^{\omega} d\omega = \left(\frac{\Omega}{2\pi mL}\right)^{\frac{1}{n}} \int_{R1}^{R2} \frac{dr}{r^{\frac{n+2}{n}}} \qquad (2\text{-}42)$$

$$\omega = 2\pi N = \frac{n}{2}\left(\frac{\Omega}{2\pi mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{R_1^{2/n}} - \frac{1}{R_2^{2/n}}\right) \qquad (2\text{-}43)$$

여기서 ω는 내부 원통의 각속도이고 정지해 있는 외부 원통의 각속도는 0이다. 또한 N는 내부 원통의 단위 시간 마다 회전수이다.

식(2-43)에서 Ω를 내부 원통에서의 전단 응력 τ_1으로 표시하면

$$\omega = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\tau_1}{m}\right)^{\frac{1}{n}}\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{2}{n}}\right] \qquad (2\text{-}44)$$

Ω와 N에 대한 실험 자료로부터 $\log N$을 log

Ω에 대하여 그리면 직선이 얻어지고 직선의 기울기와 절편으로부터 m과 n을 구할 수 있다.

겉보기 점도 μ_{app}는 다음 식으로부터 구한다.

$$\mu_{app}=\frac{\tau_1}{\left(-\frac{dv}{dr}\right)}=\frac{\tau_1}{\left(\frac{\tau_1}{m}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\left(m^{\frac{1}{n}}\right)\left(\tau_1^{\frac{n-1}{n}}\right) \qquad (2\text{-}45)$$

뉴우턴 유체에서는 $m=\mu$, $n=1$이므로 식 (2-43)에서 뉴우턴 유체에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\mu=\frac{\Omega}{4\pi L\omega}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right) \qquad (2\text{-}46)$$

식 (2-46)을 Margules식이라 부른다.

〔예제 2-7〕 회전 이중 원통 점도계를 사용하여 고형분 9.28%의 액체 비료의 점도를 24°C에서 측정하여 다음의 data를 얻었다. ① 유동 특성 곡선, ② 점성계수, ③ 유동의 종류 및 ④ 겉보기 점도를 구하라. 점도계의 내부 원통의 지름은 20.4 cm, 외부 원통의 지름은 26 cm, 액체의 깊이 20 cm, 기기 정수는 0.838이다.

회전속도 N(rps)	토오크 Ω(kg·m)
0.163	4.03×10^{-2}
0.330	4.86 〃
0.470	5.59 〃
0.607	6.01 〃
0.877	6.68 〃
1.343	7.59 〃

〔풀이〕 회전 속도를 각속도로 환산하면,

$\omega(\text{rad/s})=2\pi N$

또한 토오크를 전단 응력으로 환산한다.

$\tau_1=\Omega/2\pi R_1^2 L$

ω(rad/s)	τ_1(Pa)
1.024	30.23
2.073	36.50
2.953	41.94
3.811	45.13
5.507	50.13
8.439	56.93

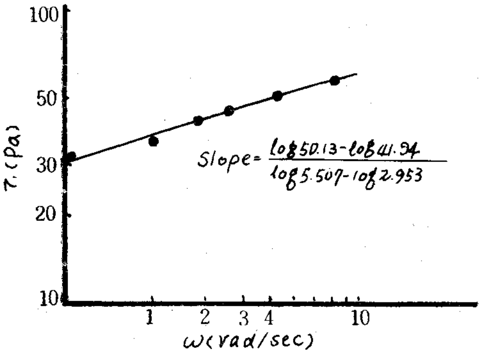

그림 2-16

이 data를 log-log 좌표에 그리면 그림 2-16과 같이 직선이 되고 기울기로부터 $n=0.2863$이 얻어진다. 식 (2-44)에 직선상의 임의의 각속도에 대응하는 전단응력을 대입하면 m을 구할 수 있다. 예를 들어 $\omega=5.1$(rad/s)일 때 $\tau_1=49$(Pa), 한편 $R_1/R_2=0.102/0.13=0.7846$ 이를 식 (2-44)에 대입하여 m을 구하면 $m=16.63(\text{Pa}\cdot\text{s}^n)$이다.

$n<1$이므로 이 액체 비료는 의가소성 유체의 거동을 나타낸다.

식 (2-45)에서 m, n을 알고 있으므로 예를 들어 $\tau_1=49$(Pa)일 때

$$\mu_{app}=(16.63^{1/0.2863})(49^{\frac{0.2863-1}{0.2863}})$$
$$=1.126(\text{Pa}\cdot\text{s})$$

진정한 겉보기 점도$=\mu_{app}\times$기기정수$=1.126\times0.838=0.944(\text{Pa}\cdot\text{s})$

(나) 단일 원통 회전 점도계

단일 원통 회전 점도계에서 $R_2=\infty$이므로

식(2-43)은 다음과 같아진다.

$$\omega=2\pi N=\frac{n}{2}\left(\frac{\Omega}{2\pi mL}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{R_1^{\frac{2}{n}}}\right) \tag{2-47}$$

식(2-47)을 사용하여 $\log N$와 $\log(\Omega/L)$을 그려 직선의 기울기와 절편으로부터 n과 m을 구할 수 있다.

〔예제 2-8〕 지름 1.5875mm, 길이 11.43cm의 단일 원통 회전 점도계를 사용하여 1.3°C에서 당밀의 겉보기 점도를 측정하였다. data를 보면 이 시료는 비뉴우턴 유체인 것을 알 수 있다. 리올로지 상수를 구하라.

회전수(rad/s)	겉보기 점도(Pa·s)
2.62×10^{-1}	16.6
$5.24\times$ 〃	16.0
1.06×10^{0}	15.5
$2.09\times$ 〃	15.4
$5.24\times$ 〃	14.6
1.05×10^{1}	14.2

(풀이) $R_2\to\infty$ 일 때 식(2-44)와 식(2-46)을 비교하면 겉보기 점도는 다음 식으로 표현된다.

$$\mu_{app}=\left(\frac{1}{n}\right)^n(4\pi N)^{n-1}m$$

즉, $\log\mu_{app}=n\log(1/n)+\log m+(n-1)\log 4\pi N$

$\log\mu_{app}$와 $\log 4\pi N$를 plot하면 직선의 기울기는 $(n-1)$이 되므로 n을 구할 수 있다. 그림 2-17에서 $(n-1)=-0.043$, $n=0.957$. 또한 이 그림에서 $\log 4\pi N=0$ 일 때 $\log\mu_{app}=1.242$ 이므로

$1.242=0.957\log(1/0.957)+\log m$

$\log m=1.242-0.957(0.019)$

$m=16.74(\text{Pa}\cdot\text{s}^n)$

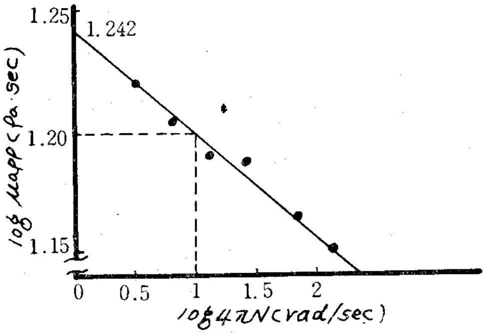

그림 2-17

한편 대부분의 식품은 항복 응력을 가지며, 이와 같은 식품에 대해서는 n, m, τ_0를 구하기 매우 복잡하다. 두 원통 사이의 간격이 좁은 narrow gap이나 cone and plate viscometer인 경우에는 τ대 $\dot{r}$ 곡선에 대하여 일반적인 가정을 하지 않아도 되므로 이와 같은 어려움은 없다.

Wide gap 점도계에서 항복 응력을 갖는 유체에 대하여 토오크 Ω와 회전 속도 N 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$2\pi N\left(\frac{m}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{n}}=\int_{R1}^{R2}\left(\frac{\Omega}{2\pi L\tau_0 R^2}-1\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2-48}$$

식(2-48)은 $s=1$이 아닌 이상 도식 적분(graphical integration)을 하여야 한다.

여기서 τ_0는 항복 응력, R_1는 내부 원통의 반지름, R_2는 중심에서부터 흐름의 속도가 0이 되는 점까지의 거리 즉, 항복 응력 τ_0가 전단 응력 τ와 같아지는 점이다. Wide gap 점도계 간격의 어느 점에서나 전단 응력이 항복 응력보다 클 때는 R_2는 외부 원통의 반지름으로 볼 수 있으나 단일 원통 점도계에서는 다음 식이 성립된다.

$$R_2=\sqrt{\frac{\Omega}{2\pi L\tau_0}} \tag{2-49}$$

식(2-49)에서 R_2를 구하기 위해서는 먼저 τ_0

를 구할 필요가 있다. Casson은 항복 응력을 갖는 많은 유체인 경우 $\sqrt{\tau}$와 $\sqrt{\dot{r}}$ 사이에 직선 관계가 성립된다고 보고하였다. 전단 속도 $\dot{r}$는 점도계의 회전 속도에 비례하므로 $\dot{r}=kN$이라 할 수 있다. 여기서 k는 상수이다. 따라서 항복 응력 τ_0는 $\sqrt{\Omega/L}$을 $\sqrt{N}$에 대하여 plot 하여 $\sqrt{N}=0$로 외삽하면 절편은 $\sqrt{(\Omega/L)_0}$이므로

$$\tau_0=\left(\frac{\Omega}{L}\right)_0\frac{1}{2\pi R_1^2} \qquad (2\text{-}50)$$

$\dot{r}=kN$이므로

$$kN=\left(\frac{\Omega}{2\pi LR_1^2\tau_0}-1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\tau_0}{m}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (2\text{-}51)$$

그러므로 $\log N$과 $\log\left(\frac{\Omega}{2\pi LR_1^2\tau_0}-1\right)$을 그리면 직선이 되고 기울기는 $1/n$이 된다. 또한 구하여진 n와 τ_0값을 식(2-49)와 (2-48)에 대입하여 도해 적분하면 m을 구할 수 있다.

〔예제 2-9〕 반지름 0.95 cm인 단일 원통 점도계를 사용하여 0°C의 농축 오렌지 주우스에 대하여 실험하여 다음과 같은 data를 얻었다. 주우스의 전단 응력과 전단 속도의 관계식을 구하라.

회전수, ω(rad/s)	토오크, Ω/L(N)
0.6282	1.05×10^{-3}
1.2564	1.575 〃
3.1410	2.68 〃
6.2820	3.81 〃

(풀이) $\sqrt{\omega}$와 $\sqrt{\Omega/L}$을 그리면 그림 2-18과 같으며 그림에서부터 $\sqrt{\omega}=0$일 때 $\sqrt{(\Omega/L)_0}$ $=2\times10^{-2}$

$$\tau_0=(2\times10^{-2})\times\frac{1}{2\pi(0.95\times10^{-2})^2}$$

$$=0.705\ \text{Pa}$$

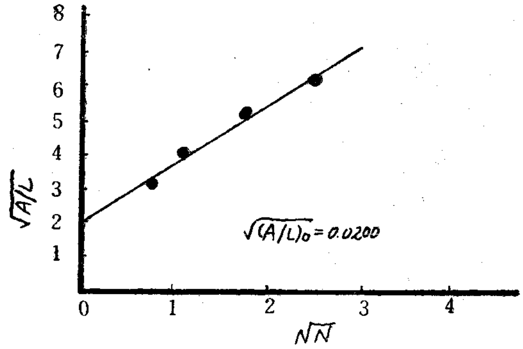

그림 2-18

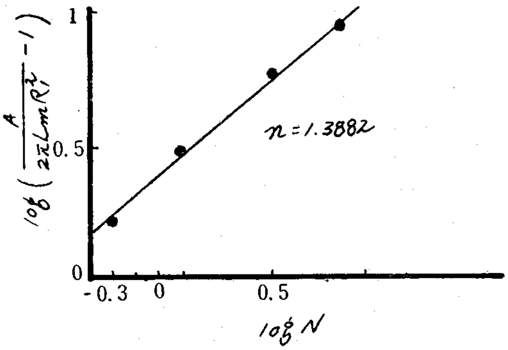

그림 2-19

다음 $\log\omega$와 $\log\left(\frac{\Omega}{2\pi LR_1^2\tau_0}-1\right)$을 그리면 그림 2-19와 같으며, $n=1.38$이다. 식(2-49)에 Ω/L의 임의의 값을 대입하여, 보기를 들어 $\Omega/L=2.68\times10^{-3}(N)$, $\tau_0=0.705$(Pa)를 대입하여 R_2를 구하고 식(2-48)의 우변의 적분값을 도해 적분하므로서 $m=4.04\times10^{-2}$(Pa·s^n)이 얻어진다. ▨