● 特別寄稿 ●

濾波回路 理論과 設計

Filter theory and design

金 東 龍

全北大 工大 電氣工學科
助 教 授

本協會 奬學會의 奬學金으로 카나다 미니토바州立大學에 2年余 留學했던 全北大 工大 電氣工學科 金東龍助敎授가 지난 81年 5月12日 世界 40個國 500余名의 大學敎授들이 參加한 가운데 現地인 시카고에서 開催된 I.E.E.E. 國際學術發表會에서 發表한 論文「濾波回路 理論과 設計」를 알기 쉽게 要約한 것이다. 〈註 編輯者〉

I. 序 言

오늘날 濾波回路 理論은 眞正한 意味의 回路理論으로 말해도 無妨할 程度로 飛躍的인 發展을 거듭해 왔다. 濾波回路란 入力信號를 特別히 정해진 出力信號로 變化시키는 裝置를 말한다.

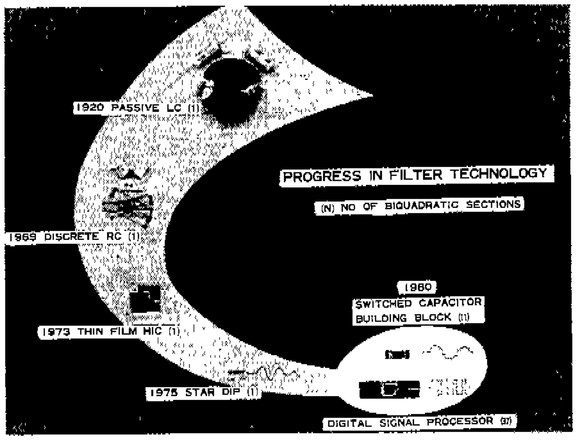
濾波回路를 조금더 具体的으로 說明하자면, 어떤 特定한 周波數는 通過시키고 그 이외의 周波數는 遮斷 혹은 減少시켜주는 周波數 選擇裝置라고 말할 수 있다.

電氣(電子) 濾波回路 設計는 現代技術에 각 方面으로 깊숙히 浸透되어 電信, 電話, TV, Radio, Radar, Sonar, 人工衛星 등 最近의 通信工學分野 그리고 Signal-Processing 分野에까지도 그 役割이 必隨的인 重要한 部分으로 登場되어 있다.

電氣(電子) 濾波回路에 使用되는 Elements는 Resistors, Capacitors, Inductors 그리고 電子部品인 Operational Amplifiers 등이 사용되며 特定한 濾波回路에는 Mechanical, Crystal과 Switching Devices까지 使用해서 設計된다.

그 使用部品을 年度別로 說明하자면 1950년도 이전에는 Passive Elements인 Resistors, Inductors, Capacitors를 이용한 R, L, C回路로 그 設計를 이루어 왔다.

1960年代를 들어 서면서 I.C의 登場과 함께 Resistors, Capacitors, Operational Amplifiers를 이용한 R.C-active設計를 Analog Filters라고 말한다. 1960년도 후반부터 1970년도 중반까지는 Digital Signal Precessing 의 登場과 함께 Digital Filters의 設計가 그 重要한 몫을 차지하였다. 그리고 1970년도 후반과 1980년도를 접어 들면서 Resistors 의 素子도 그 容量이 너무 多樣해져서 그 使用이 VLSI (Very Large Scale Integration) Technology에 不便을 招來해서 이것을 使用치 않는 Switched-Capacitor와 Operational Amplifiers를 이용한 MOS Switched Capacitor Filter



가 登場하게 되었다.

筆者는 濾波回路의 簡單한 理論과 設計 예를 說明함으로써 이것을 必要로 하는 電氣技師분에 다소나마 도움이 되었으면 한다.

Ⅱ. 濾波回路의 分類 (Types of Filters)

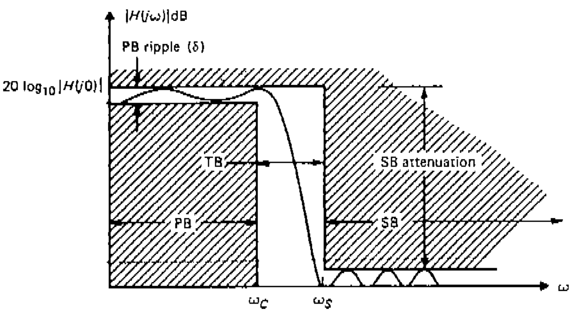
(A) 抵帶域 濾波器 (Low-pass Filter)

抵帶域 濾波回路의 函數는 낮은 周波數는 通過시키나 높은 周波數는 減衰시킨다.

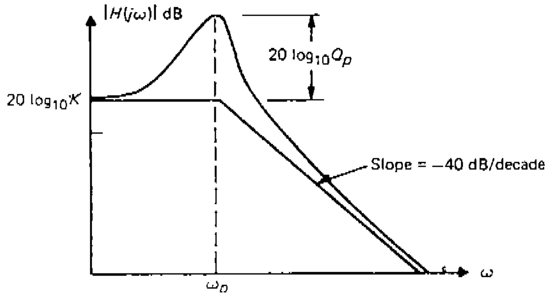
遮斷周波數 ω_c, 靜止周波數 ω_s, 通過帶域起伏 PB, 轉移帶域 TB

2차函數의 傳達函數는 다음과 같다.

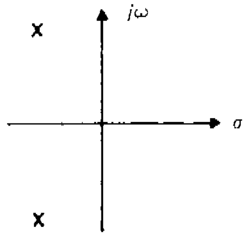
$$H(s)=\frac{K\omega_p^2}{S^2+\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)S+\omega_p^2}$$



(a) 低帶域 濾波回路의 특성



(b) 2차函數의 低帶域 濾波回路의 利得應答특성

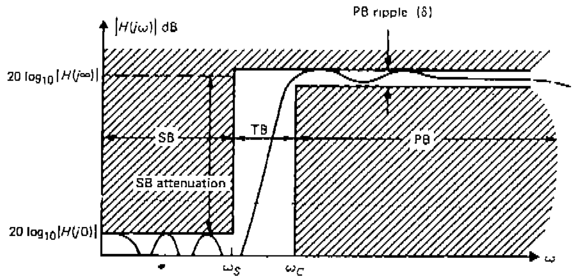


(c) S-plane에서 Pole-zero 표시

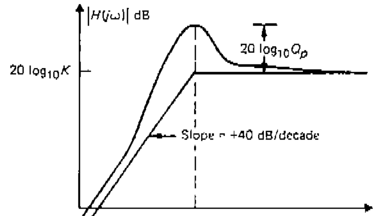
(B) 高帶域 濾波器 (High-pass Filter)

高帶域 濾波回路의 函數는 높은 周波數는 通過시켜주나 낮은 周波數는 減衰시켜주는 濾波回路를 말한다.

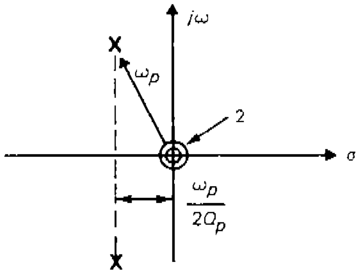
高帶域 利得特性을 나타내는 二次函數는 다음과 같다. $H(s)=\dfrac{KS^2}{S^2+\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)S+\omega_p^2}$



(a) 高帶域 濾波器의 특성



(b) 제2차 高帶域 濾波器의 利得應答특성

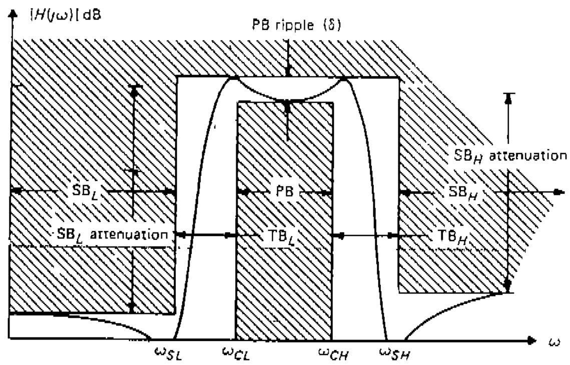


(c) 제 2 차 高帶域 濾波器의 S-plane Pole-zero 표시

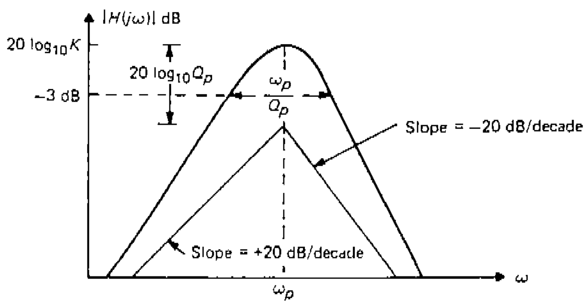
(C) 帶域通過 濾波器 (Band-pass Filter)

帶域濾波回路의 函數는 限定된 帶域의 周波數는 通過시키는 反面에 低域 혹은 高域의 周波數는 減衰 또는 遮斷시키는 濾波回路를 말한다. 그리고 SB_L은 低域遮斷帶域, SB_H은 高域遮斷帶域을 말한다. TB_L은 低域轉移帶域, TB_H은 高域轉移帶域을 表示하고 있다. 帶域通過利得의 특성을 나타내는 2 차函數는 다음과 같다.

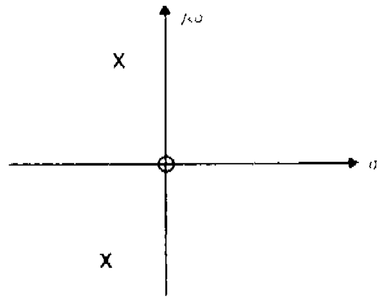
$$H(s)=\frac{K(\omega_p/Q_p)S}{S^2+(\omega_p/Q_p)S+\omega_p^2}$$



(a) 帶域濾波器의 특성



(b) 二次函數 帶域濾波器의 利得應答특성



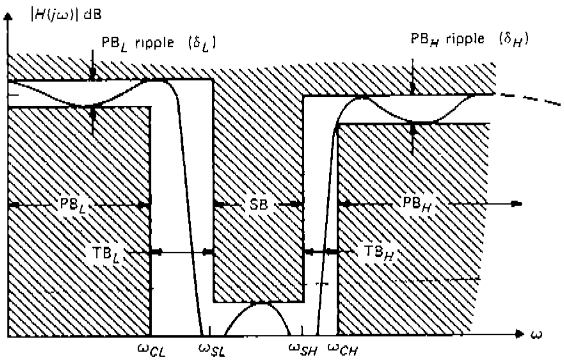
(c) 2 차 帶域濾波器의 S平面에서의 Pole-zero表示

(D) 帶域 消去濾波器 (Band-reject Filter)

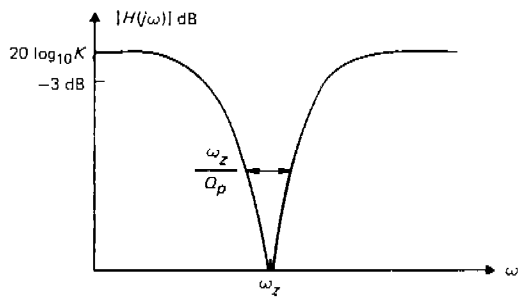
帶域除去 濾波回路 函數는 限定된 帶域範圍를 減衰시키고 낮은 帶域과 높은 帶域을 通過시키는 濾波回路를 말한다. PB_L은 낮은 周波數 通過帶域을 말하고 PB_H는 높은 周波數 通過帶域을 表示한다.

帶域 소거 이득특성을 나타내는 2 차 函數는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

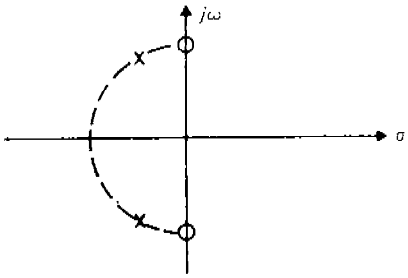
$$H(s)=\frac{K(S^2+\omega_z^2)}{S^2+\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)S+\omega_p^2}=\frac{K(S^2+\omega_z^2)}{S^2+\left(\frac{\omega_z}{Q_p}\right)S+\omega_p^2}$$



(a) 帶域消去 濾波器의 특성



(b) 帶域消去 濾波器의 利得應答특성

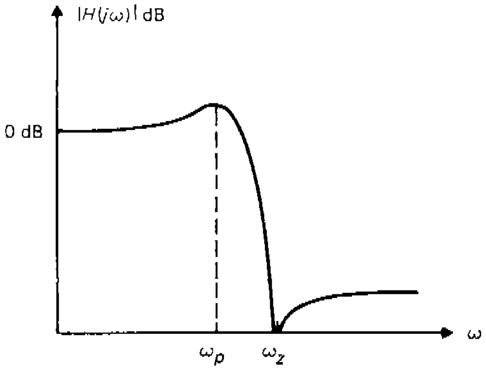


(c) 2차 帶域消去 濾波器의 S평면에서의 Pole-zero表示

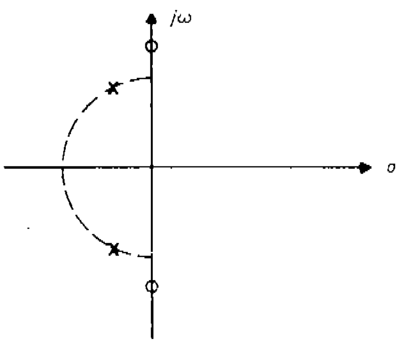
(E) Notch 回路의 특성과 Pole-zero 表示

Elliptic Filter와 Band-reject Filter의 設計時에 가장 많이 쓰여지는 函數는 2차 函數의 Low-pass Notch 函數와 High-pass Notch 函數를 들 수 있다.

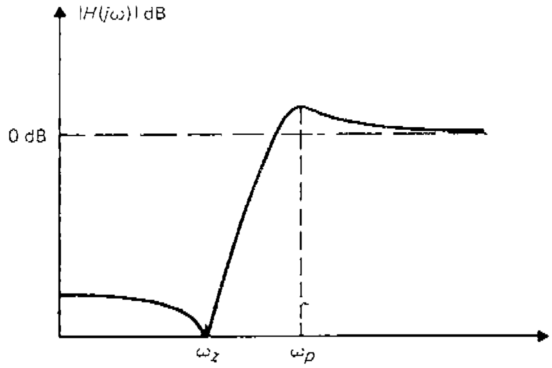
그 특성과 Pole-zero 表示를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



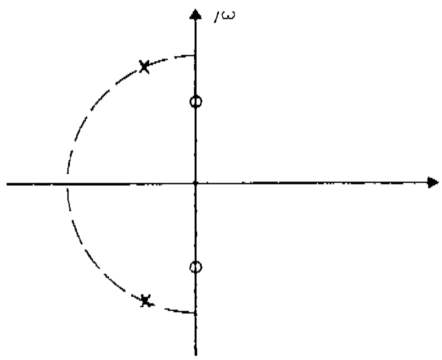
(a) 二次函數의 低周波 Notch 濾波回路의 利得應答特性



(b) S평면에서의 Pole-zero表示



(a) 二次函數의 高周波 Notch 濾波回路의 利得應答特性



(b) S평면에서의 Pole-zero表示

Ⅲ. 濾波器 設計를 위한 接近方法 (Approximation Methods for Filter Design)

(A) Butterworth 低周波 濾波回路의 接近法 (Butterworth Low-pass Filters)

먼저 理想的인 低周波 傳送函數에 接近하는 實現可能한 크기함수를 생각하자.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{H^2(0)}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

$|H(j\omega)|$는 크기함수이다.

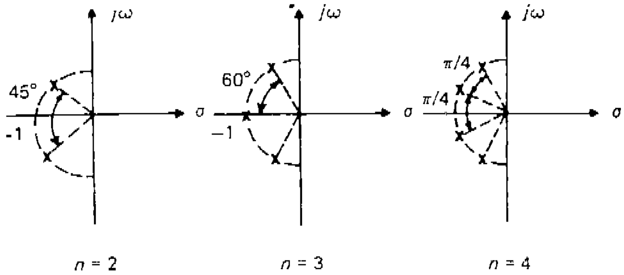
Pole의 位置를 決定하기 위해 (1)式을 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$|H(s)|^2 = H(s)H^*(s) = \frac{H^2(0)}{1+(-1)^n s^{2n}} \tag{2}$$

$$s^{2n} = (-1)^{n+1}$$

$$s = \exp\left[j\left(\frac{2k-1+n)}{2n}\right)\pi \right]$$
$$k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

Fig 1. Butterworth 2, 3, 4차 函數의 根을 表示한다.



그리고 그 전달함수의 n차 all-pole 低周波應答특성函數는 다음과 같다.

$$H(s) = \frac{H(0)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + 1} \tag{3}$$

Butterworth 多項式 $H(s)$의 分母項을 決定할 때는 n이 偶數일 경우와 奇數일 때는 각각 다음과 같다.

$$n \text{ even}: \prod_{k=1}^{n/2} \left[s^2 + (2\cos\theta_k) s + 1 \right]$$
$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \tag{4}$$
$$n \text{ odd}: (s+1) \prod_{l=1}^{(n-1)/2} \left[s^2 + (2\cos\theta_l) s + 1 \right]$$
$$\theta_l = \frac{l\pi}{n}$$

(3)式의 分母項의 係數를 Table 로 表示하면 다음과 같다.

TABLE 1 - 1 Butterworth Polynomials

n	Polynomial
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2}s+1$
3	$s^3+2s^2+2s+1=(s+1)(s^2+s+1)$
4	$s^4+2.613s^3+3.414s^2+2.613s+1$ $=(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)$

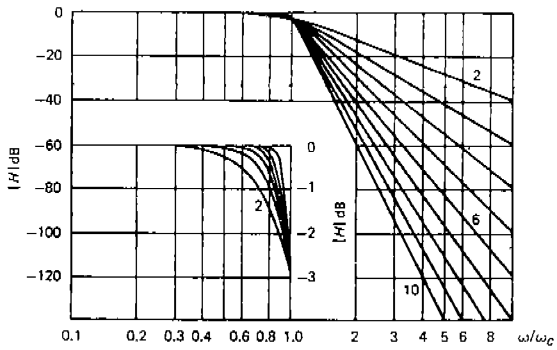


Fig 2. n≤10인 境遇의 Butterworth濾波器의 利得應答 특성 Graph

그리고 Butterworth 濾波器의 利得應答 특성은 **Fig 2**와 같이 보여진다.

(B) Chebyshev 低周波 濾波回路의 接近法

(Chebyshev Low-pass Filters)

Chebyshev 低周波 크기함수는 다음과 같다.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{H_0^2}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)} \tag{1}$$

$$H_0 = H(0)$$

通過帶域 Ripple δ는 $\varepsilon^2 = 10^{0.1\delta} - 1$이고 Decibels (dB)로 表示된다. Parameter ε은 常數이고 그 크기는 恒常 1보다 작다.

Chebyshev 多項式 $C_n(\omega/\omega_c)$은 다음과 같이 定義된다.

$$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \begin{cases} \cos\left(n\cos^{-1}\dfrac{\omega}{\omega_c}\right) & 0 \le \dfrac{\omega}{\omega_c} \le 1 \\ \cosh\left(n\cosh^{-1}\dfrac{\omega}{\omega_c}\right) & \dfrac{\omega}{\omega_c} > 1 \end{cases} \tag{2}$$

TABLE 1 - 2 Chebyshev polynomials

$$C_0\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 1$$
$$C_1\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{\omega}{\omega_c}$$
$$C_2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1$$
$$C_3\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 4\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^3 - 3\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$
$$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)C_{n-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - C_{n-2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Pole의 位置를 찾아내기 爲해 $S = j(\omega/\omega_c)$ (1)式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|H(s)|^2 = H(s)\,H^*(s) = \frac{H_0^2}{1+\varepsilon^2 C_n^2(s/j)}$$

Chebyshev의 Pole의 位置는 항상 楕圓위에 存在함을 알 수 있고 All-pole 傳達函數의 分母項 多項式은 (3)式으로 나타낸다.

$$H(s) = \frac{H_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (3)$$

Table 1 - 3은 1/2dB, 1dB, 2dB의 通過帶域 Ripple 크기를 나타내고 n이 4차식 까지를 나타낸다.

TABLE 1 - 3

n	Polynomial
	1/2-dB ripple (ε = 0.3493)
1	$s+2.863$
2	$s^2+1.425\,s+1.516$
3	$s^3+1.253\,s^2+1.535\,s+0.716=(s+0.626)(s^2+0.626\,s+1.142)$
4	$s^4+1.197\,s^3+1.717\,s^2+1.025\,s+0.379=(s^2+0.351\,s+1.064)(s^2+0.845\,s+0.356)$
	1-dB ripple (ε = 0.5088)
1	$s+1.965$
2	$s^2+1.098\,s+1.103$
3	$s^3+0.988\,s^2+1.238\,s+0.491=(s+0.494)(s^2+0.490\,s+0.994)$
4	$s^4+0.953\,s^3+1.454\,s^2+0.743\,s+0.276=(s^2+0.279\,s+0.987)(s^2+0.674\,s+0.279)$
	2-dB ripple (ε = 0.7648)
1	$s+1.308$
2	$s^2+0.804\,s+0.637$
3	$s^3+0.738\,s^2+1.022\,s+0.327=(s+0.402)(s^2+0.369\,s+0.886)$
4	$s^4+0.716\,s^3+1.256\,s^2+0.517\,s+0.206=(s^2+0.210\,s+0.928)(s^2+0.506\,s+0.221)$

Chebysher 濾波器의 크기 應答特性은 Fig 3

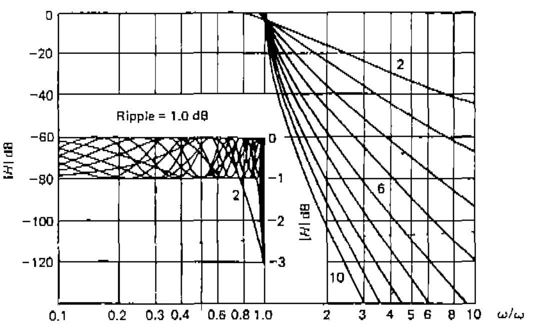


Fig 3. n≦10인 경우(境遇)의 Chebyshev 濾波器의 利得應答 特性 Graph.

(C) Bessel 低周波 濾波回路의 接近方法

(Bessel (Thomson) Low-pass Filter)

Bessel의 低周波 濾波回路 函數는 指數函數로 주어지고 이 濾波器의 特性은 Linear Phase와 Flat Delay를 갖게 되는 함수이다.

$$H(s) = Ke^{-s\tau} \quad (1)$$

n次數의 $e^{-s\tau}$에 대한 All-pole Approximation 函數는

$$H(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + b_1\,s + b_0} \quad (2)$$

(2)식으로 表示된다.

이 Bessel 函數의 多項式은 Table 1 - 4로 나타낼 수 있다. TABLE 1 - 4 Bessel Polynomials

n	Polynomial
1	$s+1$
2	$s^2+3\,s+3$
3	$s^3+6\,s^2+15s+15=(s+2.322)(s^2+3.678\,s+6.460)$
4	$s^4+10s^3+45s^2+105s+105=(s^2+5.792s+9.140)(s^2+4.208\,s+11.488)$

이 濾波器는 Bessel, Thomson 또는 Maximally Flat Delay (MFD) 濾波器라 稱한다.

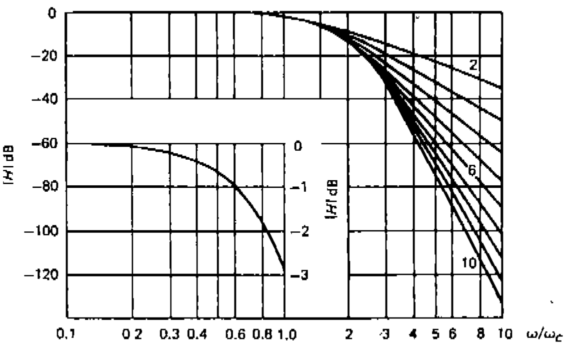


Fig 4. n≧10인 境遇의 Bessel (Thomson) 濾波器의 利得應答 特性

이 Bessel 濾波器는 利得選擇性에 있어서는 非効率的이나 時間지연 應答特性이 優秀하여 Video와 Digital Transmission 濾波器들에 많이 이용된다.

Bessel 濾波器의 時間 遲延應答 特性曲線을 考察하면

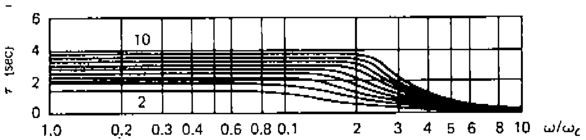


Fig 5. Bessel (Thomson) 濾波器의 時間 遲延應答特性 曲線

(D) Elliptic (Cauer) 濾波器의 接近方法 (Elliptic Low-pass Filters)

이 濾波器의 特性은 轉移領域이 아주 적고 靜止帶域 附近에서 날카로운 傾斜를 보여주고 있는 反面에 Butterworth나 Chebyshev 여파기 函數보다 複雜한 函數를 나타내고 있는 것이 이 濾波器의 特性이다. 이 函數의 크기는

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2 \omega_s(\omega/\omega_p)} \qquad (1)$$

로 表示되고 分母의 R_n, $\omega_s(\Omega)$, $\Omega=\omega/\omega_p$는 다음과 같다.

$$R_n \omega_s(\Omega) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n/2} \dfrac{[\Omega^2-(\omega_i/\omega_p)^2]}{[\Omega^2-(\omega_s/\omega_i)^2]} & \text{for } n \text{ even} \\ \Omega \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \dfrac{[\Omega^2-(\omega_j/\omega_p)^2]}{[\Omega^2-(\omega_s/\omega_j)^2]} & \text{for } n \text{ odd} \end{cases}$$

Elliptic 濾波器의 利得 應答特性은 **Fig6**로 나타내고 있으며 特徵은 靜止帶域과 通過帶域에 있어서 若干의 Ripple 特性이 있는 點이다.

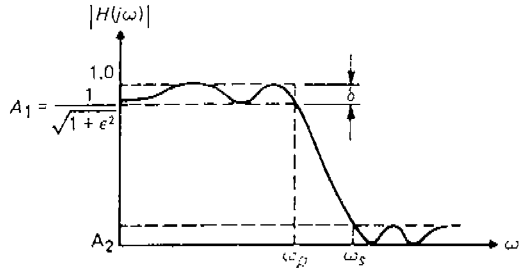


Fig 6. Elliptic (Cauer) 濾波器의 標準利得 應答 特性 曲線

Elliptic 濾波器의 傳達函數는 다음과 같이 表示된다.

$$H(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s^2+a_i)}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1 s+b_0} \qquad (3)$$

K는 尖銳 利得 常數로 나타내어 진다. 그리고 5次 Elliptic 傳達函數의 例를 들면 다음과 같다.

$$H(s) = \frac{K(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}{(s+P_0)(s+P_1)(s+P_1^*)(s+P_2)(s+P_2^*)}$$

$\omega_1 = 2.92\times10^4$ rad/sec

$\omega_2 = 4.32\times10^4$ 〃

$P_0 = 1.68\times10^4$ 〃

$P_1, P_1^* = (-0.97\pm j1.75)\times10^4$ rad/sec

$P_2, P_2^* = (-0.236\pm j2.24)\times10^4$ rad/sec

Elliptic 函數의 特徵은 2次函數로 構成이 되고 分子와 分母項에는 반드시 Pole과 Zero가 있으며 Low-pass Notch와 High-pass Notch가 존재한다는 點이 이 函數의 特徵이다.

5次 Elliptic 濾波器의 特性을 Graph로 그리면 **Fig 7**과 같다. 〈24p에 계속〉