

FEM의 電氣工學에의 應用現況

金 南 豪*

Finite Element Method in Electrical Engineering

Nam Ho Kim

I. 序 論

分布定數系の 數値解析法으로서, 1950年代에 航空機의 構造解析分野에서 開發되었던 有限要素法(FEM: Finite Element Method)은 그의 優秀한 特徵으로 인하여 다른 工學分野에서도 서서히 導入되어 顯著한 發展을 가져오게 되었다.

電氣工學分野에서는 機器의 大容量化, 小型化, 最近의 省 Energy化의 要請에 따라서 1970年 무렵부터 有限要素法の 應用研究가 開始되어 變壓器, 回轉機, Cable, Linear Motor, 放電現象解析, 核融合實驗裝置의 電磁界解析에 까지 廣範圍하게 研究가 進行되고 있다.

이러한 時點에서 電氣工學에서의 有限要素法の 現狀을 把握하고 장래의 發展方向에 대하여 살펴보고자 한다.

II. 有限要素法の 概要

1. 特徵과 概念

電磁界解析法으로서, 等角寫像法이 종래부터 使用되어져 왔으나 이 방법은 電極形狀이 複雜한 경우이거나 磁氣飽和가 存在하는 非線形現象解析에서는 不可能하다. 電力機器는 3相

인 경우가 대부분이어서 이러한 경우에도 곤란한 點이 많다.

數値解析法으로서 Programing이 쉬운 差分法이 있는데 이 방법은 전체 場을 格子點으로 分割하여 各格子點의 電位를 Taylor 級數로 展開하여 差分方程式으로 만들어 Laplace 方程式으로 解를 구하는 方法으로서,

- (1) 境界가 複雜한 경우에는 精度가 나쁘고,
- (2) 電界, 磁界의 變化가 완만한 部分과 激한 部分이 혼합되어 있는 경우에는 計算機의 記憶容量, 計算時間 面에서 有限要素法에 比하면 不利하며,
- (3) 誘電率等의 材料定數가 하나의 格子內에서 變化하는 경우에는 解析이 複雜해진다.

有限要素法은 對象領域을 잘게 分割한다는 點에서는 差分法과 같지만 그 모양은 差分法에서와 같이 四邊形으로 局限시킬 필요없이, Fig. 1과 같은 3角形으로서도 가능하다. 즉 分割하는 모양은 임의로 선정해도 좋다. 따라서 領域境界의 形狀이 複雜한 경우, 또는 場의 Potential이 急變하는 部分이 있을 경우에도 精度 높은 解析이 가능하여 境界條件 處理가 간단해진다.

有限要素法에서는 Fig. 1에 표시된 하나의 分割素子를 「要素」, 그 頂點을 「節點」이라고 부

* 江原大學校 電氣工學科 專講

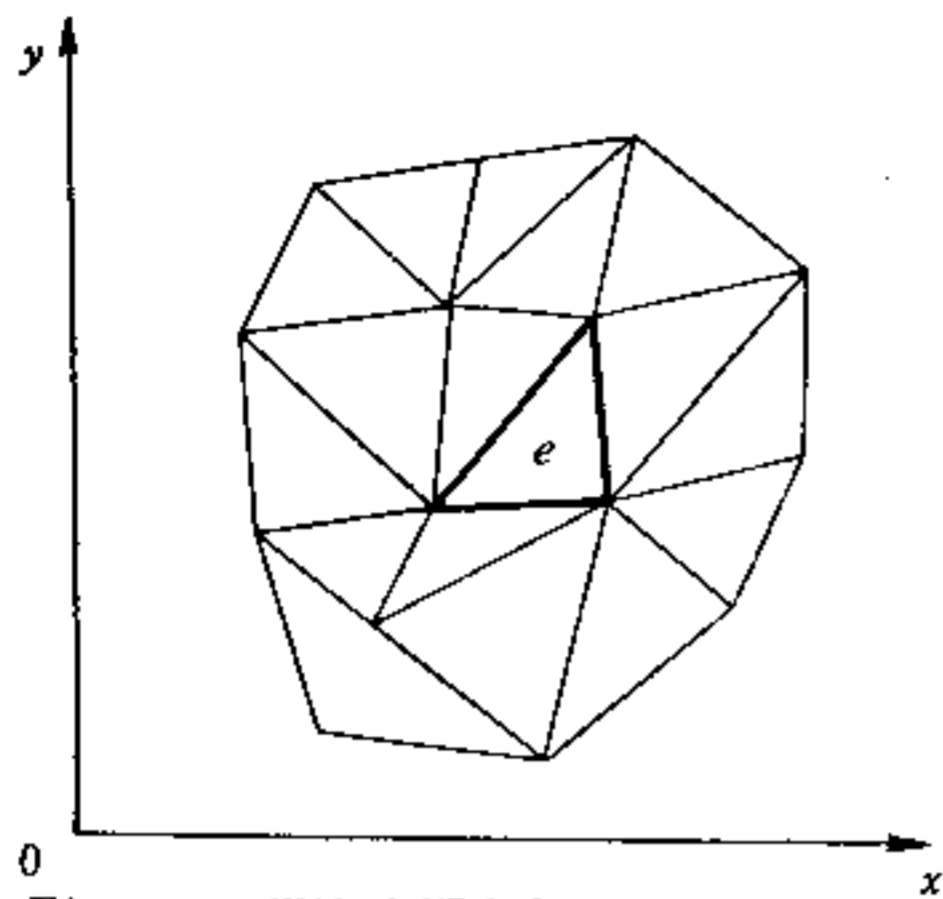


Fig. 1. 領域의 要素分割

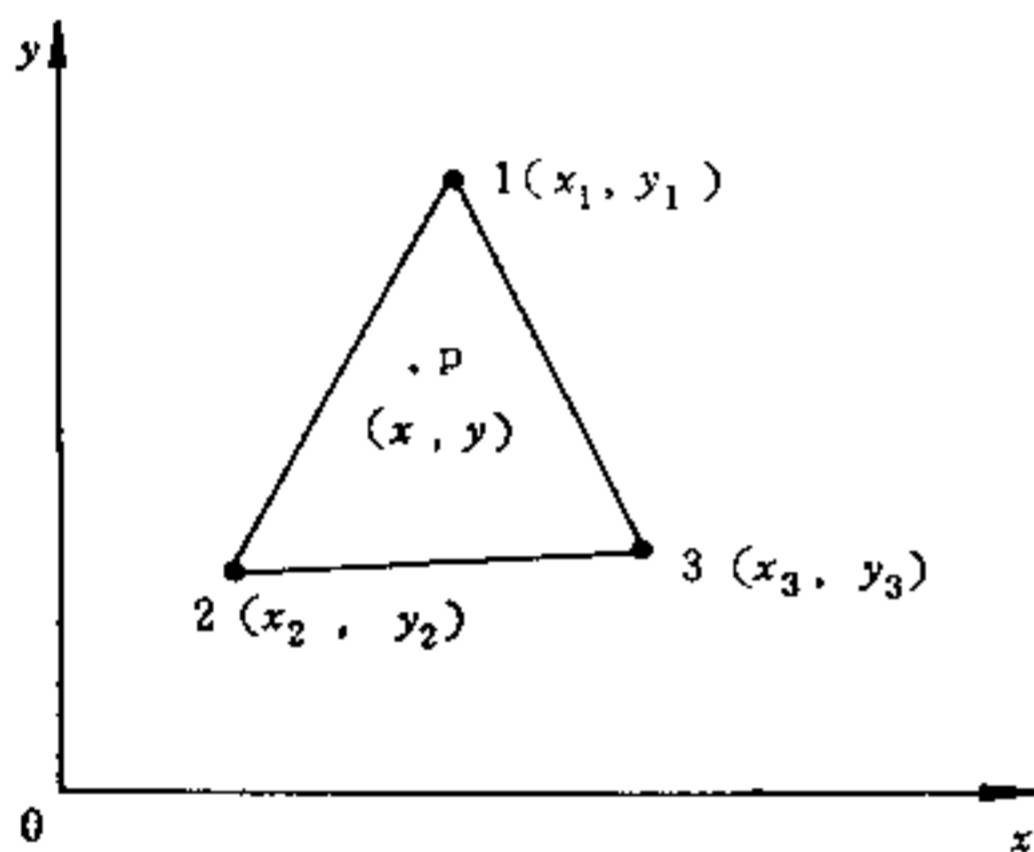


Fig. 2. 要素 e의 座標

른다. 간단히 하기 위하여 2次元直角座標系에서 Fig. 2와 같은 3角形要素를 사용한 경우에 대해서 살펴 보기로 한다. 要素에는 그 외에도 Fig. 3과 같이 3角形의 邊上에 節點을 設定한, 소위 高次3角形要素等도 있다.

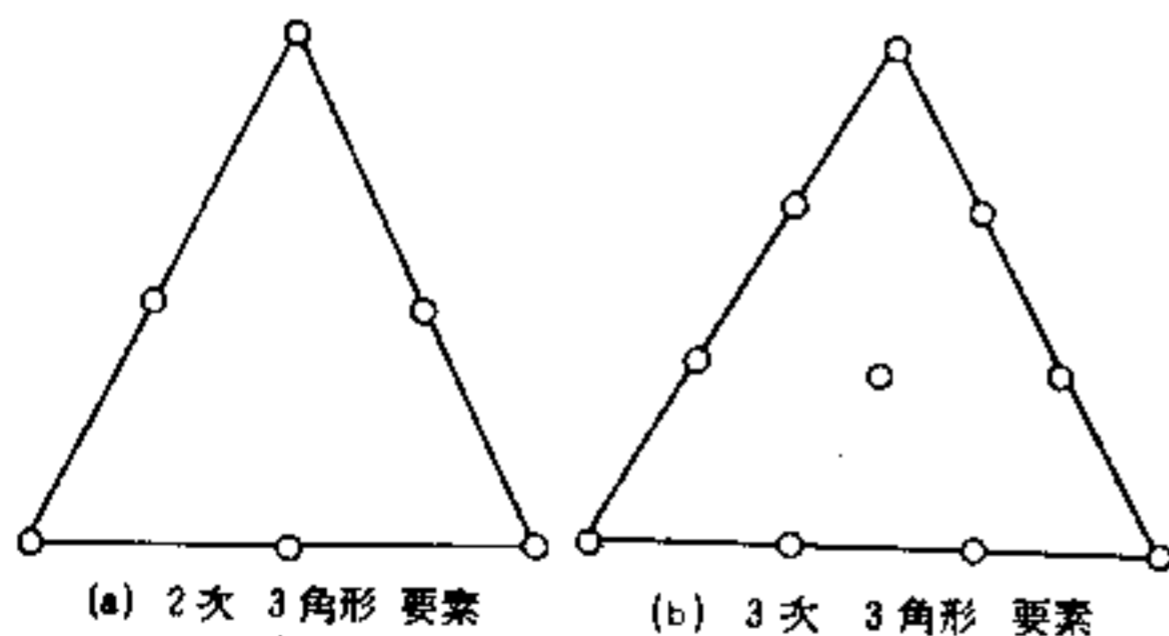


Fig. 3. 高次3角形要素

고찰해야 할 對象領域內에서 Potential이 複雑하게 變化하는 場에 있어서도 領域을 더욱

細分하게 되면 하나의 要素內에서의 Potential의 變化는 적어지게 된다. 예를 들면 要素 e內의 임의의 點 P(x, y)의 Potential A^(e)를 다음 式과 같이 x, y의 함수로서 표시하게 되면, 近似하기는 하지만 큰 誤差는 생기지 않는다.

$$A^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \dots\dots\dots ①$$

여기서 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 要素에 따라 다른 定數이다.

Fig. 2에서 要素 e의 各節點에 1, 2, 3의 번호를 붙이고 各各의 Potential을 A_1, A_2, A_3 이라하면 ①式으로부터 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots ②$$

따라서

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots ③$$

결국

$$A^{(e)} = [1, x, y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots ④$$

따라서 節點의 Potential A_1, A_2, A_3 를 알면 임의의 點의 Potential은 위로부터 계산할 수 있게 된다.

節點의 Potential 결정에는 일반적으로 Energy 最小의 原理가 使用된다. 이것은 變分原理라고도 불리는 物理法則인데 “Potential은 그 領域의 Energy가 最少로 되는 것 같이 分布한다”라는 事實에 기인한다. 實際의 Potential은 領域內에서 連續적으로 變化하고 있지만, 有限要素法에서는 各節點의 Potential만을 고려, 거기에 變分原理를 適用하고 그 값을 決定한다.

以上の 事實로부터, 임의의 點의 Potential은 결국 그 點의 座標 및 各節點의 Potential과 節點座標로부터 구할 수 있다.

$$A^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) A_i \dots\dots\dots ⑤$$

$N_i(x, y)$ 는 座標 x, y의 함수로서 補間函數

라고 하며, n 은 요소 e 를 구성하는節點의數, A_i 는節點 i 의 Potential을 의미한다.

여기서 종래부터 사용되어온 Ritz-Galerkin法과의 관계에 대해서 간단히 기술해 보면, Ritz-Galerkin法에서는 ①式에 對應하여 다음과 같은 近似函數를 適用한다.

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

⑥式의 未定係數 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 은 系의 Energy를 最小로 하는 條件으로부터 決定하게 된다. 여기에 대해서 有限要素法에서는 全領域에 관하여 하나의 近似函數를 만들지 않고 領域을 많은 小要素로 分割하고 各要素마다 各各 近似函數를 使用하기 때문에 近似函數의 次數가 Ritz-Galerkin法보다 낮아지므로 따라서 Energy 最小條件計算時에 필요한 積分이 쉬워지게 된다.

일반적으로 函數의 函數를 汎函數라고 한다. 따라서 Potential A 에 관한 Energy 函數를 $\lambda(A)$ 라고 하면 A 가 座標에 대한 函數이므로 $\lambda(A)$ 는 汎函數가 된다. 다시말하면 有限要素法이란 “이 汎函數를 最小로 하는 微分方程式을 境界條件을 고려하여 푸는 것”을 의미한다.

Fig. 1에서 알 수 있듯이 有限要素法에서는 領域을 均等하게 分割할 필요가 없다. Potential이 急變하는 部分만 細細하게 分割하면 되므로, 差分法에 比較하여 節點數가 대폭 줄어들어 計算機의 記憶容量과 計算時間이 축소된다.

2. 計算方法

여기서는 例로서, Vector · Potential A 를 未知變數로 하는 ⑦式과 같은 Poisson의 方程式을 使用하여 磁界解析을 해본다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nu_y \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu_x \frac{\partial A}{\partial y}) = -J_0 \dots \dots \textcircled{7}$$

ν_x, ν_y 는 磁氣抵抗率의 x, y 의 成分이고, J_0 는 電流密度이다. 前述한 바와 같이 有限要素法에서는 汎函數인 ⑦式을, ⑧式을 最小로 하는 條件으로부터, 各節點의 Potential을 구할 수 있다.

$$\lambda = \iint_s (\nu B dB - \int_0 A) dx dy \dots \dots \textcircled{8}$$

여기서 λ 는 解析領域 s 의 Energy, B 는 磁束密度, ν 는 磁氣抵抗率 Potential이다. λ 는 各節點의 Potential의 函數이므로 節點 i 의 Potential을 A_i 라고 하면 λ 를 最小로 하는 條件은

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A_i} = 0, (i=1, \dots, nu) \dots \dots \textcircled{9}$$

여기서 nu 는 Potential이 未知인 節點의數이다.

有限要素法에서는 領域을 分割하여 全要素에 1번부터 ne 번까지, 節點에는 그의 Potential이 처음부터 境界條件으로서 주어지는 것과 그렇지 않은 것이 있는데 前者를 既知節點, 後者를 未知節點이라고 하는데, 節點의 번호를 未知節點, 既知節點의 順으로 붙인다. 節點번호로서는 소위 絕對番號外에 Fig. 2에서와 같이 持定要素 e 에서 相對的으로 1, 2, 3을 使用하면 편리하고 이 경우 기호 r 을 추가하여 $1r, 2r, 3r$ 로 하고 그런 다음 要素 e 의 相對番號를 明示하면 된다. 이후 要素의 代表番號는 e , 節點의 代表番號는 i 로 표시하기로 한다.

要素 1, \dots, ne 의 Energy를 各各 $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(ne)}$ 라고 하면

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A_i} = \frac{\partial \lambda^{(1)}}{\partial A_i} + \dots + \frac{\partial \lambda^{(e)}}{\partial A_i} + \dots + \frac{\partial \lambda^{(ne)}}{\partial A_i} \dots \dots \textcircled{10}$$

$\lambda^{(e)}$ 는 要素 e 를 構成하는 節點의 Potential A_{1r}, A_{2r}, A_{3r} 의 函數이다. 따라서 ⑩式의 右邊은 그 Energy가 A_i 의 函數로 되지 않기 위해서 零이 된다. 要素 Energy가 A_i 의 函數로 되는 要素는 節點 i 를 포함하는 要素가 되며 이와 같은 要素들이 構成하는 領域을 S_i 라고 한다면 ⑧式으로부터

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A_i} = \iint_{S_i} (\nu B \frac{\partial B}{\partial A_i} - J_0 \frac{\partial A}{\partial A_i}) dx dy \dots \dots \textcircled{11}$$

그런데 磁束密度 B 는 Vector · Potential A 를 利用해서 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$B = \text{rot} A \dots \dots \textcircled{12}$$

2次元直角座標系에서는 磁束密度의 x, y 方

向成分 B_x, B_y 는 ①式과 ②式으로부터 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} = \alpha_3 \\ B_y &= \frac{\partial A}{\partial x} = -\alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑬$$

따라서

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{x} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{y} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial A_i} &= \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \mathbf{x} - \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \mathbf{y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑭$$

여기서 \mathbf{x}, \mathbf{y} 는 x, y 方向的 單位 Vector 이다.

磁性體의 磁化容易方向 또는 困難方向이 x 軸 또는 y 軸에 一致할 경우에는, 磁氣抵抗率 Tensor의 對角成分 以外の 成分이 零, 즉 對角線 行列이 되어

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_x & 0 \\ 0 & \nu_y \end{pmatrix} \dots\dots\dots ⑮$$

⑭, ⑮式을 ⑩式에 代入함으로써

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial A_i} &= \iint_{S_i} \left\{ \nu_y \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_x \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - J_o \frac{\partial A}{\partial A_i} \right\} dx dy \dots\dots\dots ⑯ \end{aligned}$$

⑯式을 구체적으로 계산하기 위하여, ④式을 다음과 같이 바꾸어 쓴다.

$$A^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \{lxy\} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots ⑰$$

여기서 Δ 는 要素 e 의 面積을 나타내며, b_k, c_k, d_k ($k=1, 2, 3$)은 다음 式에서 計算할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} b_k &= x_l y_m - x_m y_l \\ c_k &= y_l - y_m \\ d_k &= x_m - x_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ⑱$$

k, l, m 은 Fig. 2의 節點番號에 對應한 循環 添字로서, 예를 들면 $k=2$ 라면 $l=3, m=1$ 을 나타낸다.

⑯式에 ⑰式을 代入하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial A_i} &= \sum_{S_i} \iint_{S^{(e)}} \left\{ \frac{1}{(2\Delta)^2} \{ \nu_y c_i \{c_{1r} c_{2r} c_{3r}\} \right. \\ &\quad \left. + \nu_x d_i \{d_{1r} d_{2r} d_{3r}\} \begin{pmatrix} A_{1r} \\ A_{2r} \\ A_{3r} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_o}{2\Delta} \{lxy\} \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} \right\} dx dy \dots\dots\dots ⑲ \end{aligned}$$

여기서 $S^{(e)}$ 는 要素 e 가 차지한 領域이며, \sum_{S_i} 는 節點 i 를 頂點으로 갖는 全體要素에 대한 合을 의미한다.

ν_x, ν_y, J_o 가 各 要素 內에서 일정하다고 가정한다면, ⑲式의 積分은 다음과 같이 간단하게 유도된다.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A_i} = \sum_{S_i} \{S_{i1r} S_{i2r} S_{i3r}\} \begin{pmatrix} A_{i1r} \\ A_{i2r} \\ A_{i3r} \end{pmatrix} - \sum_{S_i} k \dots\dots\dots ⑳$$

단

$$\left. \begin{aligned} S_{i1r} &= (\nu_y c_i c_{1r} + \nu_x d_i d_{1r}) / 4\Delta \\ S_{i2r} &= (\nu_y c_i c_{2r} + \nu_x d_i d_{2r}) / 4\Delta \\ S_{i3r} &= (\nu_y c_i c_{3r} + \nu_x d_i d_{3r}) / 4\Delta \\ k &= \Delta J_o / 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ㉑$$

添字는 節點番號에 對應하여 붙인 것으로 예를 들면 A_{i2r} 은 絕對節點番號 i 를 包含한 要素의 相對番號가 2인 節點의 Potential 을 의미한다. 그러나 예를 들어 ⑰式의 Δ 와 같이 혼동할 염려가 없는 것은 添字를 생략한다.

㉑式은 全節點에 關하여 成立되지만 Potential 을 알고 있는 節點에 對해서는 計算할 必要가 없기 때문에 未知節點에 對해서만 ⑲, ㉑式을 計算하면 다음과 같이 되며,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{S_i} \{S_{i1r} S_{i2r} S_{i3r}\} \begin{pmatrix} A_{i1r} \\ A_{i2r} \\ A_{i3r} \end{pmatrix} &= \sum_{S_i} k \\ \sum_{i \neq u} \{S_{u1r} S_{u2r} S_{u3r}\} \begin{pmatrix} A_{u1r} \\ A_{u2r} \\ A_{u3r} \end{pmatrix} &= \sum_{i \neq u} k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ㉒$$

㉒式은 다음과 같이 全未知 Potential A_1, \dots, A_n 에 대한 聯立1次方程式으로 整理할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,1} & \dots & H_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix} \dots\dots\dots ㉓$$

㉓式을 全體節點第2方程式, 또 座標行列 $[H]$

를全體第2係數 Matrix라 부른다. 이 式을 풀면 A_1, \dots, A_{n_x} 가 얻어지므로, 임의의 點의 Potential은 ⑰式에 의해서 計算될 수 있다. ⑳式에서 알 수 있듯이, 計算機의 記憶容量, 計算時間은 未知節點의 數 n_u 의 크기에 따라 決定되며, 要素의 數 n_e 와는 關係없다.

電界計算의 경우에는 A 를 電位 ϕ 로 하고 ν_x, ν_y 는 各各誘電率 ϵ_x, ϵ_y 로 J_0 는 電荷密度 ρ 로 바꾸어 놓으면 된다.

Potential이 구해지면 磁束密度 B 는 ⑫, ⑬式에서 얻어지며, 電界強度 E 는 다음식으로 計算된다.

$$E = -\text{grad}\phi \dots \dots \dots \text{㉑}$$

2次元直角座標系에서 電界強度의 x, y 方向成分 E_x, E_y 는 ①, ㉑式에서,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\partial\phi/\partial x = -\alpha_2 \\ E_y &= -\partial\phi/\partial y = -\alpha_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{㉒}$$

要素內의 近似函數가 ①式과 같이 1次函數로 되는 경우에는 ⑬, ㉒式에서 보는 바와 같이 電界強度와 磁束密度는 要素內에서 一定한 값으로 된다.

Fig. 3(a)의 2次3角形要素를 使用할 경우에는 ①式 대신에 다음과 같이 2次多項式을 使用하면 된다.

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \dots \dots \dots \text{㉓}$$

또한 Fig. 3(b)의 경우에는 3次多項式이 使用된다. 이와같은 高次3角形要素를 取하면 電界強度와 磁束密度는 要素內에서 一定치 않기 때문에 計算精度가 向上되기는 하지만 次數가 높아질수록 計算時間이 길어지기 때문에, 너무 높은 次數의 要素를 使用하는 것보다는 分割을 細密하고 低次要素를 使用하는 편이 유리하다. 電氣工學分野에서는 2次 또는 3次的 3角形要素를 使用하는 것이 效率이 좋은 計算法으로 알려져 있다.

本稿에서는 간단히 하기 위하여 2次元直角座標系에 對하여 설명했지만, 3次元圓筒座標系도 軸對稱인 3次元問題를 解析할 때 자주 使用되고 있다.

Ⅲ. 應用現況

有限要素法은 計算機의 發達에 의하여, 工學的으로는 1960年頃부터 構造工學分野에서 시작하여, 그후 急速한 發展이 이루어져서, 土木, 機械工學分野에서 流體, 熱傳導問題解析等 應用分野가 擴大되었다. 電氣工學分野에서도 電磁界, 熱流界 등에서 새로운 數值解析法으로서 脚光을 받고 있다. 1970年을 접어들면서 電氣工學에서의 應用研究가 本格的으로 展開되어, 音響工學, 導波管의 解析부터 變壓器, 回轉機等 電力機器의 電磁界解析에 있어서도 그의 應用이 擴大되고 있다.

有限要素法을 利用하면 機器中の 磁束과 渦電流의 空間的, 時間的인 分布를 상세하게 알 수가 있기 때문에, 機器의 小型·輕量化 즉 省資源, 省Energy를 달성할 수 있기 때문에 큰 래들어 더욱 관심이 集中되고 있다. 또한 電力機器의 研究開發 뿐만이 아니라, Simulation 技法으로서도 優秀하기 때문에 最適設計에서도 이용이 되고 있다.

이와같은 狀況에서 有限要素法에 관련된 論文들이 各國에서 수 없이 發表되고 있으며 現在 다음 3개의 電氣關聯 國際會議가 이 分野를 이끌어 나가고 있다.

(1) Compumag : 線形·非線形電磁界解析, 渦電流을 包含한 時間依存場의 過渡 및 定常解, 電磁力, 異方向性·Hysteresis·永久磁石의 取扱, 自動分割, 高次元行列의 解法, Program等에 관련된 論文을 다루고 있다.

(2) Intermag : 磁氣關聯이지만 解體法에 의해서도 解析結果에 重點을 두고 있다.

(3) ISH(International Symposium High Voltage Engineering) : 電界關聯論文을 中心으로 한다.

Ⅳ. 問題點과 展望

前述한 바와 같이 電氣工學에 有限要素法이 導入된지 얼마 안되고, 電磁界解析에 의해서만

이 만족할 만한 理論體系를 세울 수 있다고는 보지 않는다. 例들들면 電磁界는 空間적으로 무한히 擴大되어 있는데 有限要素法에서는 이것을 有限으로 보고 近似解析을 구하고 있다. 그 외에 永久磁石의 取扱, 渦電流現象解析等 電氣工學 特有的 問題點들이 있다.

한편 電氣工學分野 뿐만 아니라 他分野에서라도 有限要素法 自體의 問題點들로서는 새로운 要素의 開發, 電束의 連續性을 고려한 要素, 聯立微方의 効率的인 解法, 3次元問題의 境界條件取扱方法, 3次元問題의 近似2次元解法, Hysterisis를 包含한 非線形問題의 解法, 効率的인 入力資料의 作成 및 結果에 대한 作圖法等과 같이 앞으로 檢討할 사항이 많다.

以上 有限要素法 自體에 대한 問題點 外에도 實際로 電氣工學에 應用할 경우 各各에 特有的 檢討方法上의 問題가 있게 된다. 例들들면 電

界解析時의 逆相分磁界의 取扱과 같은 것들이다.

Program에 對해서는 構造工學分野에서 상당히 이전부터 組織적으로 研究가 進行되어 NASTRAN, SAP 등의 Program들이 開發되어 있지만 이러한 既存의 Program을 電磁界解析에 利用하려면 解決해야 할 많은 問題들이 있다.

電氣工學에 關聯된 Program들로서는

- (1) 基本的인 Program,
- (2) Wexler에 의해 開發된 MANFEP(Manitoba Finite Element Program),
- (3) Silvester에 의해 開發된 AXISYMM-SCALAR-HELMHOLTZ-FINTEL 6(A Finite Element Program Package for Axisymmetric Scalar Field Problems) 등이 있다.

參 考 文 獻

1. “最近の電界解析法とその應用”, 日本電氣學會雜誌, 100卷 7號 (1980).
2. “有限要素法による電力機器の電磁界解析の現狀”, 日本電氣學會 技術報告, II部, 第118號 (1981. 8).
3. “電界計算法にあける最近の進歩”, 日本電氣學會雜誌, 93卷 5號 (1973. 5).
4. O. C. Zienkiewicz, “The Finite Element Method”, McGRAW-HILL, Book (1977).