

# 複雜한 地形에서의 Schwartz-christofel 變換을 利用한 電位計算의 基礎的 研究(I)

金雄秀\* · 林漢旭\*\* · 徐栢洙\*\*\*

Calculation of Potentials in Complex Topography using  
Schwartz-Christofel Transformation

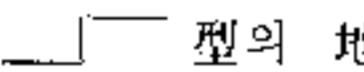
Woong-Soo Kim, Han-Uk Lim, Baek-Soo Suh

## ABSTRACT

Schwartz-Christofel transformation has been widely used to solve engineering problems. In this paper, this transformation is used to calculate topographic problems. Any two points of z-plane are transformed into  $\xi$ -plane by Schwartz-Christofel transformation using calculator.

## I. 序 論

우리나라의 地形은 山岳이 70% 以上을 차지할 뿐만 아니라 매우 험난하고 大部分 이런 地形에서 우리나라의 鑛體는 採掘된다. 이러한 險한 地形에서의 探查는 技術上 많은 어려움이 있으며 探查資料의 解析에도 많은 問題點이 있다. 地形이 險한 地域에서 探查資料의 anomaly는 地下鑛體에 依한 것인지 혹은 地形影響에 依한 것인지를 糾明하는 것은 앞으로의 開發에 있어서 좋은 情報를 提供해 줄 것이다.

여기에서는 複雜한 地形에서 地形影響을 알아보기 爲해서  型의 地形模型을 使用하였으며 이러한 地形에서 電位를 計算하기 爲

해서 Schwartz-Christofel에 依한 座標變換을 誘導하였고 이것을 計算機를 使用하여 座標를 計算하였다.

## 2. Schwartz-Christofel 變換

$\omega$ -平面에 있는 多角形의 꼭지점이  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 이고 各各의 內角이  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 이라고 할 때 Z-平面에서는 아래와 같은 式에 依해서 各  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 으로 表示된다. (Fig. 1)

$$\frac{d\omega}{dz} = A(z-x_1)^{\alpha_1-1}(z-x_2)^{\alpha_2-1}\dots(z-x_n)^{\alpha_n-1} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^n \theta_k = 2 \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

\* 江原大學校 資源工學科 敎授  
\*\* 江原大學校 資源工學科 專講  
\*\*\* 江原大學校 資源工學科 專講

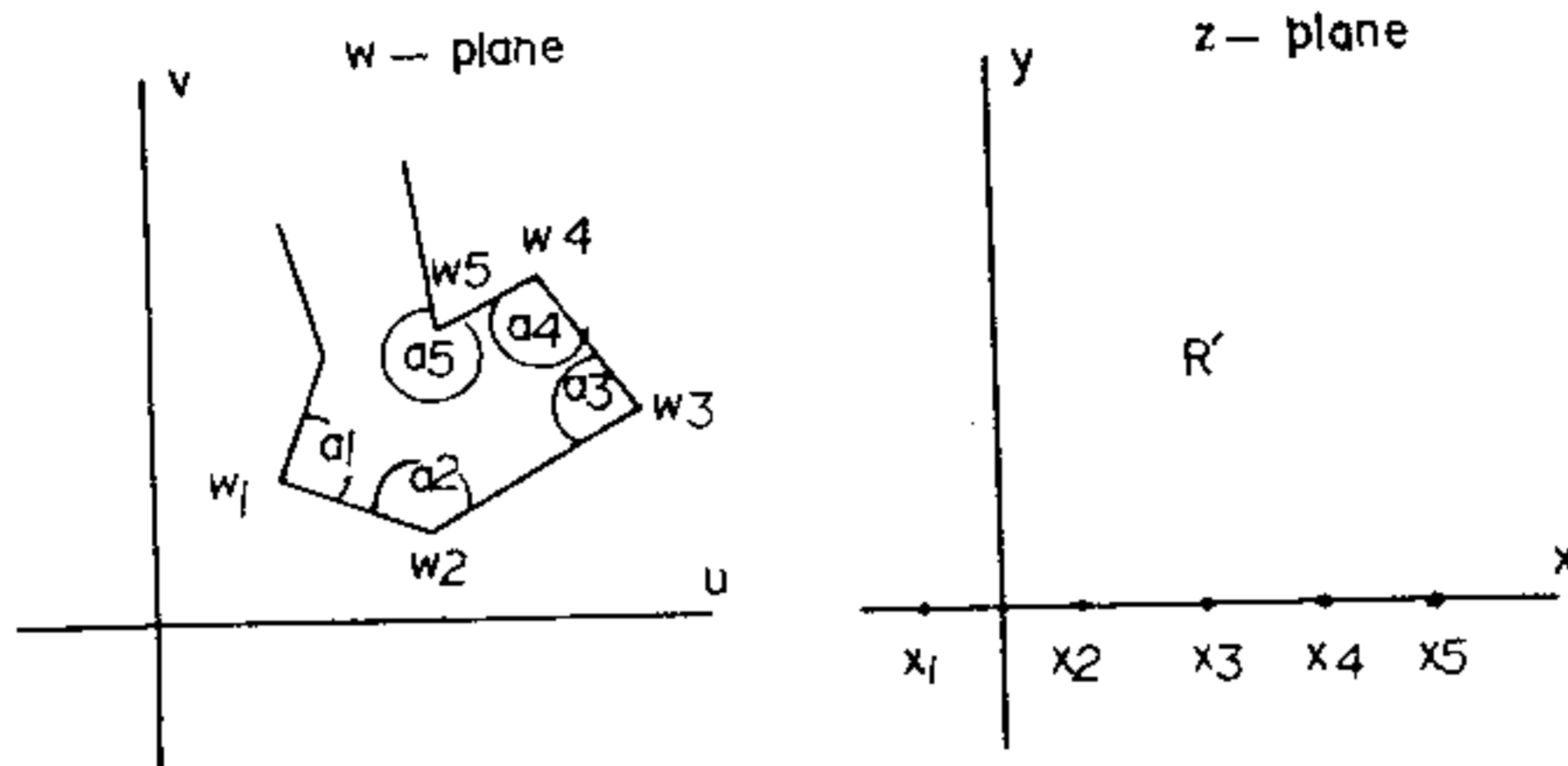


Fig.1. The example of S-C transformation

式 ①은 다시

$$\frac{d\omega}{dZ} = A(Z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(Z-x_2)^{\alpha_2/\pi-1}\dots(Z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1} \dots\dots\dots ③$$

이것을 積分하여

$$\omega = A \int (Z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(Z-x_2)^{\alpha_2/\pi-1}\dots(Z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1} dZ + B \dots\dots\dots ④$$

여기서 A, B는 complex const 이며 이 變換의 適用을 爲해서 아래와 같은 點에 留意하여 야 한다.

- (i)  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  中 3點을 任意로 選擇하여 使用할 수 있으며
- (ii) 常數 A, B는 多角形의 size, orientation, position 을 알려주며
- (iii) 一頂의 點을 無限帶에 놓을 수 있으며 그리고 이 點을 除外해도 좋고
- (iv) 無限 open 多角形은 closed 多角形으로 생각할 수 있다.

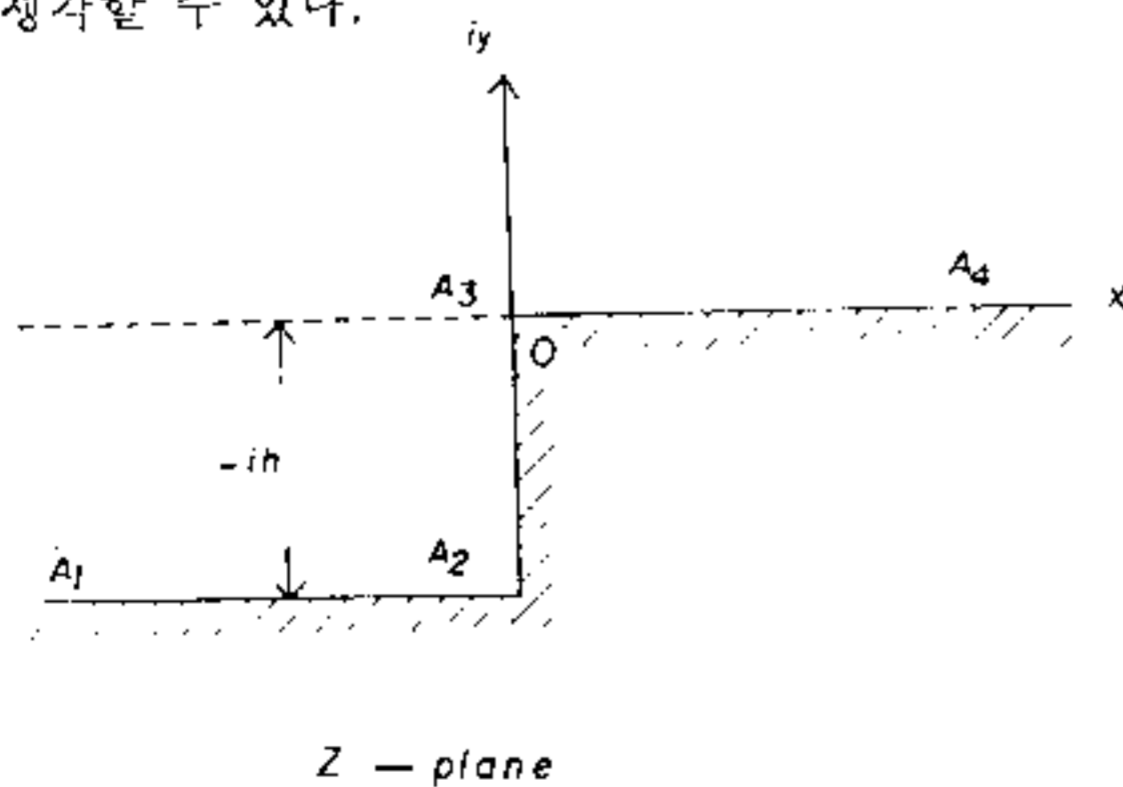


Fig.2. The model of Topography.

그림 2의 地形은  $A_1, A_2, A_3, A_4$  4個의 꼭지 點을 가진 四角形으로 볼 수 있으며 이때의 角은  $\theta_1=0, \theta_2=\frac{1}{2}, \theta_3=\frac{3}{2}, \theta_4=0$ 이고

$$\sum_{k=1}^4 \theta_k = 2 \text{가 된다.}$$

式 ③을 利用하여

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\xi} &= C_1(\xi)^{\frac{3}{2}/\pi-1}(\xi-1)^{\frac{2}{2}/\pi-1} \\ &= C_1(\xi)^{\frac{1}{2}}(\xi-1)^{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

式 ⑤를 積分하여

$$Z = C_1(\xi)^{\frac{1}{2}}(\xi-1)^{-\frac{1}{2}} d\xi + C_2 \dots\dots\dots ⑥$$

이 式에  $\xi = \sin^2 \theta, d\xi = 2\sin \theta \cos \theta d\theta$ 를 置換하여

$$\begin{aligned} Z &= C_1 \int \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \cdot 2\sin \theta \cos \theta d\theta + C_2 \\ &= 2C_1 \int \cos^2 \theta \cdot d\theta + C_2 \\ &= C_1 \int (1 + \cos 2\theta) d\theta + C_2 \\ &= C_1(\theta + \sin \theta \cdot \cos \theta) + C_2 \\ &= C_1(\sin^{-1} \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi(\xi-1)}) + C_2 \dots\dots\dots ⑦ \end{aligned}$$

여기에  $\sin^{-1} \sqrt{R} = \frac{1}{i} \ln(i\sqrt{R} + \sqrt{1-R})$ 를

代入하면

$$\begin{aligned} &= C_1(\sqrt{\xi(\xi-1)} + \frac{1}{i} \ln(i\sqrt{\xi} + \sqrt{1-\xi})) \\ &+ C_2 \dots\dots\dots ⑧ \end{aligned}$$

積分常數  $C_1, C_2$ 를 求하기 爲하여

$\begin{pmatrix} A_2 \rightarrow -ih \text{ 일 때 } a_2 \rightarrow 0 \\ A_3 \rightarrow 0 \text{ 일 때 } a_3 \rightarrow 1 \end{pmatrix}$  를 식 ⑧에

代入하면

$$\begin{aligned} -ih &= C_2 \\ 0 &= C_1 \sin^{-1} \xi + C_2 \dots \dots \dots \text{⑨} \end{aligned}$$

이것을 식 ⑧에 代入하여

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2h}{\pi} i \{ \sqrt{\xi(\xi-1)} + \frac{1}{i} \ln(i\sqrt{\xi} + \sqrt{1-\xi}) \} - ih \\ &= \frac{2h}{\pi} \{ \sqrt{\xi(1-\xi)} + \ln(\sqrt{-\xi} + \sqrt{1-\xi}) \} - ih \dots \text{⑩} \end{aligned}$$

式 ⑩에서  $\xi$ -平面上의 電位를 直接 計算하는 데는 어려움이 있으므로 單簡한 式으로 만들기 爲해서 이 式을 變形하여 (Ahlfors, 1979)

$$\sqrt{-\xi} + \sqrt{1-\xi} = \sqrt{\omega} \dots \dots \dots \text{⑪}$$

라고 놓고 兩邊을 제곱하여

$$\omega = -2\xi + 1 + 2\sqrt{\xi(\xi-1)} \dots \dots \dots \text{⑫}$$

$$\frac{1}{\omega} = -2\xi + 1 - 2\sqrt{\xi(\xi-1)} \dots \dots \dots \text{⑬}$$

式 ⑫, ⑬을 합하면

$$\omega + \frac{1}{\omega} = -4\xi + 2$$

$$\xi = -\frac{1}{4} \left( \omega + \frac{1}{\omega} - 2 \right) \dots \dots \dots \text{⑭}$$

$$\omega - \frac{1}{\omega} = -4\sqrt{\xi(\xi-1)} \dots \dots \dots \text{⑮}$$

式 ⑭, ⑮를 식 ⑩에 代入하면

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2h}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right) + \ln \sqrt{\omega} \right\} - ih \\ &= \frac{h}{2\pi} \left( \omega - \frac{1}{\omega} + 2 \ln \omega \right) - ih \dots \dots \dots \text{⑯} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} \omega = u + iv \\ \log \omega = \log r + i\theta \end{pmatrix}$  를 식 ⑯에 代

入하면

$$\text{이 때 } r = \sqrt{u^2 + v^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{v}{u}$$

式 ⑯은

$$\begin{aligned} Z &= \frac{h}{2\pi} \left\{ u - \frac{u^2 + v^2}{u} + iv + \frac{iv}{u^2 + v^2} \right. \\ &\quad \left. + \log(u^2 + v^2) + i2 \tan^{-1} \frac{v}{u} - i2\pi \right\} \dots \dots \text{⑰} \end{aligned}$$

이 된다.

$Z = x + iy$ 에서

$$x = \frac{h}{2\pi} \left\{ u \left( 1 - \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + \log(u^2 + v^2) \right\} \dots \text{⑱}$$

$$y = \frac{h}{2\pi} \left\{ v \left( 1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + 2 \tan^{-1} \frac{v}{u} - 2\pi \right\} \dots \text{⑲}$$

의 關係가 成立한다. (단,  $0 < \tan^{-1} \frac{v}{u} < \pi$ )

또한 式 ⑱에서

$$\xi = -\frac{1}{4} \left( \omega + \frac{1}{\omega} - 2 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left( u + iv + \frac{1}{u + iv} - 2 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left( u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} - 2 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left\{ \left( u + \frac{u}{u^2 + v^2} - 2 \right) + i \left( v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \right\} \dots \text{⑳}$$

$\xi = \phi + i\psi$ 에서

$$\phi = -\frac{1}{4} \left( u + \frac{u}{u^2 + v^2} - 2 \right) \dots \dots \dots \text{㉑}$$

$$\psi = -\frac{1}{4} \left( v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \dots \dots \dots \text{㉒}$$

가 求해지며 式 ⑱, ⑲에서 얻어진  $u, v$  座標를 式 ㉑, ㉒에 代入하여  $\xi$ -平面的 點  $(\phi, \psi)$  이 決定된다.

以上의 式들을 利用하여 model에 依한 計算機를 使用하여 座標를 計算하였다.

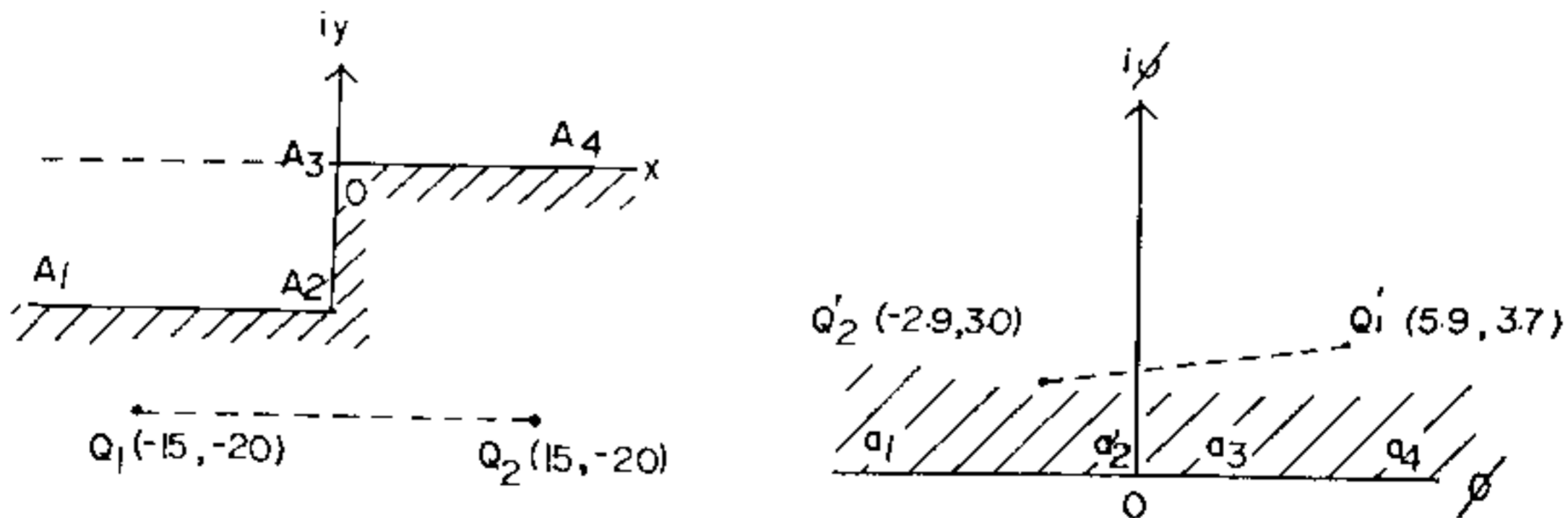


Fig. 3. The result of S-C transformation

Fig. 3에서와 같이 Z-平面에서의 任意의 두 점  $Q_1, Q_2$ 를 다음의 Program을 利用하여 S-平面上的 두 점  $Q_1', Q_2'$ 를 計算하였다. 그리고式 ⑧, ⑨의 連立方程式은 subroutine NONLES (X, N, LN, EPS, FKV, ILL)를 使用하였다.

Table 1. The program of S-C transformation

SCONTROL USLINIT	C	N	INPUT PARAMETER
C PROGRAM PITRANS	C		NUMBER OF DIVENSION FOR SYSTEM
C PROGRAM FOR CALCULATING U,V FIELD	C	LM	INPUT AND OUTPUT PARAMETER
C FROM GIVEN X,Y TOPOGRAPMIC FIELD	C		FOR INPUT...MAXIMUM NUMBER OF LOOP
DIMENSION X(2)	C		FOR OUTPUT...NUMBER OF LOOP
COMMON C1, C2	C	EPS	INPUT PARAMETER
EXTERNAL FKV	C		CHECK VALUE FOR CONVERGENCE
C	C	FKV	INPUT PARAMETER
C	C		SUBROUTINE SUBPROGRAM FOR EVALUATED K-TH EQUATION
N=2	C	ILL	OUTPUT PARAMETER
X(1)=1.	C		INDICATE SUBROUTINE CONDICTION
X(2)=1.	C		IF ILL=0 NORMAL CONDITION OTHERWISE INDICATE A JACOBIAN-RELATED MATRIX IS SINGULAR
C	C		AND PROCESS "BELOW UP"
C	C		
C1=15.			DIMENSION IPOINT(20,20) : ISUB(19), PART(20), COE(20,21), X(1), TEMP(20)
C2=-20.			
CALL NONLES(X, N, 100, 0.1, FKV, ILL)	C		PARAMETER CHECK
WRITE(6, 300) C1, C2, X(1), X(2)	C		
300 FORMAT(15X, 4E12.5, /)	C		ILL=30000
STOP			IF(N, LE, 0, OR, N, GE, 21, OR, EPS, LT, 0, OEO, OR, LM, LE, 0) RETURN
END			IF(EPS, EQ, 0, 0) EPS=0.1E-5
SUBROUTINE NONLES(X, N, LM, EPS, FKV, ILL)			ICONVG=-1
C			ILL=0
C *** D/009/S NONLES *** SINGLE			KCT=1
C		700	CONTINUE
C PARAMETER			DO 10 J=1, N
C X INPUT AND OUTPUT PARAMETER			IPOINT(1, J)=J
C FOR INPUT...GUESSED VECTOR FOR SOLUTION		10	CONTINUE
C FOR OUTPUT...SOLUTION OF NON-LINEAR SYSTEM			K=1
		800	CONTINUE
			IF(K, EQ, 1) GO TO 1000
			KG=1

```

900 CONTINUE
  DO 17 KC=2,K
  KM=K-KC+2
  KMAX=ISUB(KM-1)
  X(KMAX)=0.0
  DO 13 J=KM,N
  JSUB=IPOINT(KM,J)
  X(KMAX)=X(KMAX)+COE(KM-1,JS-
  UB) X(JSUB)
13 CONTINUE
  X(KMAX)=X(KMAX)+COE(KM-1, N
  +1)
17 CONTINUE
  GO TO(1000, 1200, 1800), KG
C
C
C
C
C
1000 CALL FKV(X,K,F)
  FACTOR=0.001
1100 CONTINUE
  ITAL=0
  I=K
1150 CONTINUE
  ITEMP=IPOINT(K, I)
  HOLD=X(ITEMP)
  H=FACTOR*HOLD
  IF(M.EQ.0.0) M=0.001
  X(ITEMP)=HOLD+H
  IF(K.EQ.1) GO TO 1200
  KG=2
  GO TO 900
C
C
C
1200 CONTINUE
  CALL FKV(X, K, FPLUS)
  PART(ITEMP)=(FPLUS-F)/H
  X(ITEMP)=HOLD
  IF(ABS(PART(ITEMP)), LE. 0.1E-50)
  GO TO 1240
  IF(ABS(F/PART(ITEMP)), LE. 1.0E+
  20) GO TO 1250
1240 ITAL=ITAL+1
1250 I=I+1
  IF(I,LE.N) GO TO 1150
  IF(ITAL, LE. N-K) GO TO 1300
  FACTOR=FACTOR*10.0
  IF(FACTOR--0.5) 1100, 1100, 2200
1300 CONTINUE
  IF(K,LT.N) GO TO 1400
  IF(PART(ITEMP), EQ.0.0) GO TO 2200
  COE(K,N+1)=0.0
  KMAX=ITEMP
  GO TO 1600
1400 KMAX=IPOINT(K, K)
  DERMAL=ABS(PART(KMAX))
  KPLUS=K+1
  DO 30 I=KPLUS, N
  JSUB=IPOINT(K, I)
  TEST=ABS(PART(JSUB))
  IF(TEST, LT. DERMAL) GO TO 1500
  DERMAL=TEST
  IPOINT(KPLUS, I)=KMAX
  KMAX=JSUB
  GO TO 30
1500 CONTINUE
  IPOINT(KPLUS, I)=JSUB
30 CONTINUE
  IF(PART(KMAX), EQ.0.0) GO TO 2200
  ISUB(K)=KMAX
  COE(K,N+1)=0.0
  DO 40 J=KPLUS, N
  JSUB=IPOINT(KPLUS, J)
  COE(K, JSUB)= -PART(JSUB) / PART
  (KMAX)
  COE(K,N+1)=COE(K,N+1)+PART(JS-
  UB)*X(JSUB)
40 CONTINUE
1600 CONTINUE
  COE(K,N+1)=(COE(K,N+1)-F)/PART
  (KMAX)+X(KMAX)
  K=K+1
  IF(K,LE.N) GO TO 800
  X(KMAX)=COE(N,N+1)
  IF(N,EQ.1) GO TO 1800
  KG=3

```

```

      K=N
      GO TO 900
C
C   ITERATION,S TERMINT
C
C   CONVERGENCE CHECK****
C
C
1800 CONTINUE
      IF(RCT.EQ.1) GO TO 2000
      DO 50 I=1,N
      IF(ABS((TEMP(I)-X(I))/X(I)).GT.
      EPS) GO TO 1900
      50 CONTINUE
      ICONVG=ICONVG+1
      IF(ICONVG-3) 2000, 2100, 2100
1900 CONTINUE
      ICONVG=1
2000 CONTINUE
      DO 60 I=1, N
      TEMP(I)=X(I)
      60 CONTINUE
      KCT=-KCT+1
      IF(KCT.LE.LM) GO TO 700
      ILL=15000
      RETURN
2100 CONTINUE
      LM=-KCT
      RETURN
2200 CONTINUE
      ILL=KCT
      RETURN

```

```

      END
      SUBROUTINE FKV(X,N,F)
C   **PROGRAM OF PI-TRANSFORM
C
      DIMENSION X(2)
      COMMON C1, C2
      DATA PHI2/6.283184/
C
C
      U=X(1)
      V=X(2)
      UV=U*U+V*V
      GO TO(1,2), N
      1 F=U*(1.-1./UV)+ALOG(UV)-C1
      RETURN
      2 F=V*(1.+1./UV)+2.*ATAN(V/U)
      --PHI2-C2
      RETURN
      END

```

#### 4. 結 論

(1) Fig. 3과 같은 地形에서는 理論的인 電位計算에 있어서 많은 어려움이 있으나 S-C 變換을 利用하여 電位를 計算함으로써 複雜한 地形에서의 電位計算에 正確성을 준다.

(2) 주어진 program 을 利用하면 S-C 變換에 依한 座標를 求할 수 있으므로 標準電位曲線을 만드는 데 時間을 切減할 수 있다.

그리고 이 研究는 1982年度 文教部 學術研究 助成費의 支援으로 遂行된 것으로 文教當局에 謝意를 表하는 바이다.

#### 參 考 文 獻

- 1) 玄炳九, (1971), A resistivity model study on topographical effects in dipole-dipole method: 大韓鑛山學會誌, vol. 8, No. 1.
- 2) 清野武, (1952), Topographic effects on the self-potential curves(3): 日本鑛業會誌, vol. 65, No. 373.
- 3) LI Y-SUN, (1963, The problem of vertical faults in telluric current prospecting: Geophys., vol. 28., pp. 479~481.

- 4) Rebert, L. P., (1972), Magnetic upward continuation from an uneven track : Geophys., vol. 37., pp. 662~668.
- 5) Churchill, R. V., (1974), Complex variable and applications : McGraw Hill Book Company.
- 6) Spiegel, M. R., (1974), Complex variables : McGraw Hill Book Company.
- 7) Ahlfors, L. V., (1979), Complex analysis : McGraw Hill Book Company.