産業科學研究(江原大學校 產業科學研究所 論文集) 第2輯(1982)
Res. Report, The Inst. of Industrial Science, Kangweon Nat. Univ., Korea, Vol. 2

Cusum 管理圖의 A. R. L의 近似計算

安 世 熙* · 李 鍾 盛**

Approximations of A. R. L. for Cumulative Sum Charts

Ahn Se-Hee · Lee Jong-Seong

ABSTRACT

An approximation to the ARL for cusum control charts is derived using a Brownian motion approximation to the cumulative sum. The accuracy of this approximation is numerically evaluatecl and the results are compared with those obtained by other method.

I. 序 論

管理圖를 利用하여 生產工程을 管理한다 함은 工程으로부터 얻은 一連의 관측치의 결과에 의해서 工程에 관한 어떤 가설의 檢定을 연속적으로 실시함을 의미한다. 따라서 항상 第一種 誤差와 第二種 誤差가 수반하게 된다. 第一種 誤差라 함은 공정에 변화가 일어나지 않은 경우에 가설을 기각함을 의미하며 第二種 誤差라 함은 工程에 변화가 일어났는데도 가설이 채택됨을 의미한다.

일반적으로 좋은 관리도란 工程에 이상이 없을 때에는 管理圖上에서 工程변화에 대한 신호가 나타날 때까지 오랜 시간이 소요하게 되며 工程에 변화가 일어나면 工程變化에 대한 신호가 나타날 때까지 짧은 시간이 경과하는 특성을 가진 관리도를 의미한다.

管理圖에서는 工程變化의 신호가 나타날 때까지의 시간을 나타내는 尺度로서 평균 런의 길이(Average Run Length)가 使用된다. 즉 工程 평균치가 工程의 목표 μ_0에서 δ 만큼의 변화가 발생하여 이 변화가 지속되고 있다면, 변화 발생후 이 변화가 탐지될 때까지의 管理圖上의 打點數의 기대치가 평균 런의 길이(A. R. L.)가 된다.

工程의 통계적 관리 수단으로서 일반적으로 널리 이용되고 있는 것은 Shewhart 관리도이다. Shewhart 관리도의 단점은 관리도上에 연속적으로 打點된 點에 내포된 모든 정보를 충분히 活用하지 못한다는 것으로 지적되고 있다[1]. 좀 더 효과적인 수단으로서 Cusum 관리도가 제안되었는데, 이것은 검정 통계량으로서 관측치의 累積和를 使用하고 있다. Cusum 관리도는 1954년 Page [14]에 의해서 소개된 이래 Ewan[4], Ewan과 Kemp[5], Johnson

* 工科大學 產業工學科 助教授
** 工科大學 產業工學科 專任講師

[9], Johnson과 Leon[10], Page[15, 16], Roberts[17], 그리고 Trauax[18] 등에 의해서 연구가 진행되어 왔으며, 특히 우발적 또는 지속적인 工程의 변화가 그리 크지 않을 때 민감하게 작용하는 것으로 평가되고 있다[3, 9, 10].

Cusum 관리도의 A.R.L.은 보통 관측치가 서로 독립이며 동일한 정규분포를 하는 확률변수라는 가정하에서 유도되고 있다. Kemp[11]와 Goldsmith와 Whitfield[8]은 V-mask를 사용할 때 A.R.L.의 계산과 주어진 A.R.L.에 대한 V-mask의 관수 d와 θ의 결정을 연구하였으며, Goel과 Wu[7]은 정규 분포의 평균치를 관리하는 경우에 대하여 A.R.L.의 계산과 Contour Nomogram을 연구하였다.

本 研究에서는 Cusum 관리도의 절차와 Brownian motion process의 유사성을 이용하여 A.R.L.의 概算式을 유도하여 보았다. 또한 결과의 정확성에 對한 검토로서 Kemp[11]의 방법에 의한 결과와 비교하여 보았다.

Ⅱ. A.R.L.의 概算

X_1, X_2, …는 동일한 평균치 μ와 旣知의 표준편차 σ를 갖는 서로 독립인 一連의 관측치라고 하자. 계산의 편의상 工程의 목표치 μ_0는 0(零)의 값을 갖는 것으로 한다. Cusum 관리도에서는 각 관측치에 對해서 점수 Y_i가 대응되며 $\sum_{i=1}^{n} Y_i - \min_{0\le m\le n} \sum_{i=1}^{m} Y_i \ge h$를 만족하는 최초의 n번째 打點에서 工程에 변화가 있다는 결론을 내리게 된다. 여기서 h는 관수이며, 工程이 관리상태에 있을 때는 ΣY_i가 감소하는 경향을 보이고 工程이 異常狀態에 있을 때는 ΣY_i가 증가하는 경향을 보이도록 점수 Y_i를 선정한다. 공정의 목표치 0에서 陽의 방향의 변화를 탐지해내기를 원한다면 $Y_i = X_i - K$ (단, $K \ge 0$; 관수)이며

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - K) - \min_{0\le m\le n} \sum_{i=1}^{m} (X_i - K) \ge h \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

를 만족하는 최초의 n번째 打點에서 工程변화의 신호가 나타나게 된다.

만약 공정 목표치로부터 陰의 방향의 변화를 탐지하기를 원한다면 $Y_i = X_i + K$(단, $K \ge 0$; 관수)이며

$$\max_{0\le m\le n} \sum_{i=1}^{m} (X_i + K) - \sum_{i=1}^{n} (X_i + K) \ge h \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

를 만족하는 최초의 n번째 打點에서 공정변화의 신호를 발견하게 된다.

편의상 공정평균치 0을 중심으로 陽의 방향과 陰의 방향으로 동일한 변화가 있는 것으로 가정하여 ①,②에서 동일한 관수 K와 h를 사용하였다. 이와같은 전제 아래서 K=0로 하여 양측 검정 절차를 생각하면

$$\max_{0\le m< n} \sum_{i=1}^{m} X_i - \min_{0\le m\le n} \sum_{i=1}^{m} X_i \ge h \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

을 만족하는 최초의 n에서 공정변화의 신호가 나타나게 된다. 여기서 X_i는 직접적으로 陽의 방향의 점수를, $-X_i$는 陰의 방향의 점수를 나타내고 있다.

Nadler와 Robbins[13]은 $\sum_{i=1}^{m} X_i$의 계산에 Brownian motion process를 近似的으로 利用하였으며 ③에 대응하는 式으로

$$R_{\mu,\sigma^2}(0,\ T) = \max_{0\le t\le T} X(t) - \min_{0\le t\le T} X(t) \ge h \cdots ④$$

를 생각하였다.

여기서 X(t)는 평균 μt, 분산 $\sigma^2 t$인 Brownian motion process이다.

④에 의한 검정절차의 A.R.L.은 다음과 같이 주어진다(Nadler와 Robbins[13] 참조).

$$\text{A.R.L.} = \begin{cases} h^2/2\sigma^2, & \mu = 0 \\ (h/\mu)\coth\left(\dfrac{\mu h}{\sigma^2}\right) - \dfrac{\sigma^2}{2\mu^2} \\ -\dfrac{h^2}{2\sigma^2 \sinh(\mu h/\sigma^2)}, & \mu \neq 0 \end{cases} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

陽의 정수 N에 대해서 $E[X_i] = \mu/\sqrt{N}$, $Var.(X_i) = \sigma^2$라 하면 확률함수

$1/\sqrt{N}\,[\sum_{i=1}^{[Nt]}(X_i + K/\sqrt{N}) + (NT - [NT])(X_{[Nt]+1} + K/\sqrt{N})]$은 구간 [0. 1]에서 평균 $(\mu+K)t$, 분산 $\sigma^2 t$인 Brownian motion process X(t)에 수렴한다. 또한 $\max_{0\le t\le T}[\max_{0\le u\le t} X(u) - X(s)]$는 X(t)의 연속 함수이므로 확률

$$\text{prob}\{\max_{0\le m\le n} \sum_{i=1}^{m} (X_i + K/\sqrt{N}) - \sum_{i=1}^{n} (X_i + K/\sqrt{N}) \ge h\sqrt{N},\ \text{for some } n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N\}$$

$$= \text{prob}\{\max_{0\le n\le n} [\max_{0\le m\le n} \sum_{i=1}^{m} (X_i + K/\sqrt{N}) - \sum_{i=1}^{n}(X_i +$$

$K/\sqrt{N})]\geq h\sqrt{N}\}$은 $N\to\infty$에 따라 $\mathrm{prob}\{\max_{0\le t\le 1}[\max X(s)-X(t)]\geq h\}$에 수렴한다.

여기서는 累積和 $\Sigma(X_i-K)$ 혹은 $\Sigma(X_i+K)$의 근사치로서 Brownian motion process 를 사용하고자 한다.

$X(t)$를 평균 μt, 분산 $\sigma^2 t$인 Brownian motion process 라고 하면 $M_\mu(t)=\max_{0\le s\le t} X(s)-X(t)$, $m_\mu(t)=X(t)-\min_{0\le s\le t} X(s)$로 정의된다.

陽의 방향의 단측 검정에서는

$$(X(t)-\min_{0\le s\le t}(X(s)-KS)=m_{\mu-k}(t) \geq h \cdots\cdots ⑥$$

인 가장 작은 t에서 process 는 중단되며 陰의 방향의 단측 검정에서는

$$\max_{0\le s\le t}(X(s)+KS)-(X(t)+Kt)=M_{\mu+k}(t) \geq h \cdots\cdots ⑦$$

인 가장 작은 t에서 process 가 중단된다. 양측 검정에서는 ⑦과 ⑧式을 동시에 사용하게 되며 K=0 일 때 Nadler 와 Robbins [13]의 방법과 일치하게 된다.

⑦式의 Stoping Rule 이 주어지는 陰의 방향의 단측 검정을 생각하여 보자.

문제는 $M_\mu(t)$가 최초로 h와 같아질 때까지의 시간의 기대치 τ를 구하는 것이다. process $M_\mu(t)$의 전이 확률 분포는

$$P\{y,\ t/x\}=P\{M_\mu(s+t)\geq y/M_\mu(s)=x\}$$
$$=\Phi\left(\frac{\mu t+y-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)-\exp(-2\mu y/\sigma^2)\Phi\left(\frac{\mu t-y-x}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$
$$x,\ y,\ t\geq 0,\ s>0 \cdots\cdots ⑧$$

이 된다. $t\geq 0$에서 τ가 정의되며 $h>x$라고 할 때 τ의 Laplace transform 은

$\int_h^*(\lambda/x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\frac{d}{dt}\ P\{\tau\geq t/x\}\right]dt$이다.

$\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)P(y,\ t/x)$의 Laplace transform 을 구하고 Darling 과 Siegert [2]의 정리를 적용하므로서 $\int_h^*(\lambda/x)$를 구할 수 있다.

Process 가 최초로 h와 같아지는 시간 τ의 기대치는 $-\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\int_h^*(\lambda/x)$의 극한을 취하여

$$E[T]=\begin{cases}1/\mu[x-h+\sigma^2/2\mu(\exp(\frac{2\mu h}{\sigma^2}) \\ -\exp(\frac{2\mu x}{\sigma^2}))],\ \mu\neq 0, \\ \frac{h^2-x^2}{\sigma^2},\ \mu=0 \end{cases} \cdots\cdots ⑨$$

이 된다.

陰의 방향의 변화에 대한 Cusum 관리도에서 process 의 평균은 $\mu+k$이므로 ⑨式으로부터

$$ARL^-=\begin{cases}-\frac{1}{\mu+k}[h-\frac{\sigma^2}{2(\mu+k)} \\ (\exp(\frac{2(\mu+k)h}{\sigma^2})-1)],\ \mu+k\neq 0 \\ h^2/\sigma^2,\ \mu+k=0 \end{cases} \cdots\cdots ⑩$$

이다.

陽의 방향의 변화에 대한 Cusum 관리도는 process $m_\mu(t)$를 사용한다. $X(t)$가 평균 μt, 분산 $\sigma^2 t$이면 $-X(t)$는 평균이 $-\mu t$, 분산이 $\sigma^2 t$이고, $-\min_{0\le u\le t}X(u)=\max_{0\le u\le t}(-X(u)-(-X(t))$ 이므로 $m_\mu(t)$가 처음으로 h가 될때까지의 시간의 기대치는 ⑨式에서 μ대신 $-(\mu-k)$를 대치하므로서

$$A.R.L^+=\begin{cases}\frac{1}{\mu-k}[h+\frac{\sigma^2}{2(\mu-k)} \\ (\exp(\frac{-2(\mu-k)h}{\sigma^2})-1],\ \mu-k\neq 0 \\ h^2/\sigma^2,\ \mu-k=0 \end{cases} \cdots\cdots ⑪$$

이 된다.

Ⅲ. 結　論

앞에서 유도한 A.R.L.에 대한 槪算式의 정확도를 검사하여 보았다. Kemp[11]의 방법에 의해 비교적 정확하게 구한 A.R.L과 ⑪式의 A.R.L.⁺의 값을 $\mu-k$와 h의 함수로서 비교하였다〈표 1〉. 여기서 사용된 관측치는 정규분포이다. 〈표 1〉에서 보면 전반적으로 A.R.L.⁺의 槪算値는 정확한 값보다 적은 값을 갖는 경향이 있다.

Table 1. **Comparison of ARL+ for the Cusum chart**

$\mu-k$	h=2.0		h=5.0		h=10.0	
	Exact	Approx.	Exact	Approx.	Exact	Approx.
−0.4	28	7.4	414	155	20×10^3	9.3×10^3
−0.2	15.9	5.3	104	54.8	820	620
0	10.0	4	38.1	25	126	100
1.0	2.75	1.5	5.75	4.5	10.7	9.5
2.0	1.58	0.88	3.11	2.38	5.62	4.88

References

1. Bowkor, A.H. and Lieberman, G.J., Engineering Statistics, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., pp 492—498(1974)
2. Darling, D.A. and Siegert, A.J., The First Passage Problem for a Continuous Markov Process. Ann. Math. Statist., 24, pp 624—639(1953)
3. Duncan, A.J., Quality Control and Industrial Statistics, 4th ed., Richard Irwin, Inc., pp 464—482(1974)
4. Bwan, W.D., When and How to Use cu-Sum Charts, Technometrics, vol. 5, № 1, pp 1—22(1963)
5. Bwan, W.D. and Kemp, K.W., Sampling Inspection of Continuous Process With no Autocorrelation between Successive Results. Biometrika, 47, 3, pp 363—380(1960)
6. Freund, R.A., Graphical Procgss Control. Industrial Quality Control, pp 15—22(Jan. 1962)
7. Goel, A.L., anlwu, S.M., Determination of A.R.L. and a Contour Nomogram for Cusum Charts to Control Normal Mean. Technometrics, vol. 13, №2, pp 221—230(1971)
8. Goldsmith, P.L. and Whitfield, H., Average Run Lengths in Camulative Chart Quality Control Schemes. Technometrics, vol. 3, № 1, pp 11—20(1961)
9. Johnson, N.L., A Simple Theoretical Approach to Cusum Control Charts. American Statistical Association Jourral, pp 835—840(Dec. 1961)
10. Johnson, N.L. and Leone, F.C., Cumultive Sum Control Charts Mathematical Principles Applied to Their Contruction and Use. Part 1(June, pp 15—21, 1962), Part 2 (July, pp 29—36, 1962), Part 3(August, pp 22—28, 1962)
11. Kemp, K.W., The Average Run Length of the Cumulative Sum Chart When a V-mask is Used, J.R. Statist. Soc. B, Vol. 23, pp 149—153(1961)
12. 金永輝, 品質管理, 淸文閣. pp 354—359(1979)
13. Naddler. J. and Robins, N.B., Some Characteristics of Page's Two—Sided Procedure for Detecting a Change in a Location Parameter. Ann. Math. Statist. 42, pp 538—551 (1971)

14. Page, E.S., Continuous Inspection Schemes. Biometrika, 41, pp 100—114(1954)
15. Page, E.S., Cumulative Sum Charts. Technonetrics. Vol. 3, № 1. pp 1—9(1961)
16. Page, E.s., Controlling the Standard Deviation by Cusums and Warning Lines. Technometrics, Vol. 5. № 3, pp 307—315(1963)
17. Roberts, S.W. A comparison of Some Control Chart Procedures, Technometrics, Vol. 8, № 3, pp 411—430(1966)
18. Trauax, H.M., Cumulatiue Sum Charts and Their application to the Chemical Industry. Industrial Quality Control. pp 18—25(Dec. 1961)