韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1982. 2. Vol. XX No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Feb. 1982. Vol. XX No. 2

# 순서쌍의 집합으로서의 順序關係 및 同値關係의 指導方法

金 薰 稙

## Ⅰ. 서 언

수학교육의 현대화 경향이 기본적으로 집합, 관계, 구조, 통합개념 등을 중요시 한다면, 관계의 지도에 있어서도 다만 대응규칙으로만 지도될 것이 아니라, 순서쌍의 집합으로의 지도가 보다 더 개념 파악에 명확하고 간결하다고 믿는다.

뿐만 아니라 여타의 도형의 방정식, 부등식의 영역, 함수의 지도 등도 아울러 순서쌍의 집합인 관계로 통합되어 지도됨이 효과적이라고 보겠다.

따라서 본 논문은 우선 관계 만을 순서쌍의 집합으로 지도되도록 모색해 보았다.

## Ⅱ. 순서쌍의 집합으로서의 관계 및 역관계

### 1. 관 계

두 집합 $A, B$가 있어서 카데이션곱 $A\times B$를 전체 집합으로 하고, 명제함수 $P(x, y)$의 진리집합을 $R$이라 할 때, 집합 $R$을 $A$에서 $B$에로의 관계(Relation)라 정의한다.

---

즉 관계 $R=\{(x, y)\mid(x, y)\in A\times B,\ P(x, y)$가 진$\}$를 뜻하며 이때 직적 $A\times B$에서

명제함수 $P(x, y)$가 정해지면 관계 $R$은 일의적으로 정해지고, 관계 $R$이 정해지면 명제함수 $P(x, y)$도 일의적으로 결정된다.

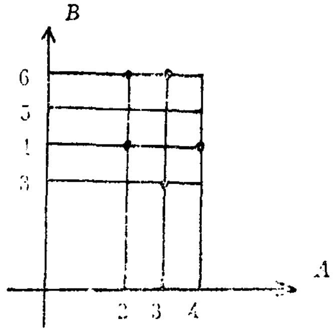
또한 $A$에서 $B$에로의 관계 $R$은 카데이션곱 $A\times B$의 부분집합 이기도하다.

(예 1-1) 두 집합 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$ 이고

명제함수 $P(x, y)\equiv$"$x$는 $y$의 약수이다" 일 때 $A$에서 $B$에로의 관계 $R$을 구하고, 관계 $R$의 그래프를 그려라.

(해) $R=\{(x, y)\mid(x, y)\in A\times B,\ x$는 $y$의 약수이다$\}$

$=\{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$




〈관계 $R$의 graph〉

### 2. 정의역과 치역

$A$에서 $B$에로의 관계 $R=\{(x, y)\mid(x, y)\in A\times B,\ P(x, y)$가진$\}$에서 집합 $D=\{x\mid(x, y)\in R\}$를 관계 $R$의 정의역(Domain) 집합 $E=\{y\mid(x, y)\in R\}$를 관계 $R$의 치역(Range)이라고 한다.

---

즉 관계 $R$의 정의역 $D$는 $R$에 속하는 순서쌍의 첫원소 전체의 집합이며, $R$의 치역 $E$는 $R$에 속하는 순서쌍의 둘째번원소 전체의 집합이다. 고로 $D\subset A$이고, $E\subset B$이다.

또, 일반적으로 정의역 $D$의 원소를 변수 $x$로 표시하고, 치역 $E$의 원소를 변수 $y$로 나타낸다.

(예 2-1) 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$ 일 때 $A$에서 $B$에로의 관계 $R=\{(x, y)\mid(x, y)\in A\times B,\ x<y\}$라 하면, 관계 $R$의 정의역 $D$와 치역 $E$를 구하여라.

(해) $R=\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5).$

$(4,5)\}$이므로

$D=\{x\mid(x,y)\in R\}=\{1,2,3,4\}$이고

$E=\{y\mid(x,y)\in R\}=\{3,5\}$이다.

### 3. 역관계

$A$에서 $B$에로의 관계 $R=\{(a,b)\mid(a,b)\in A\times B,\ P(a,b)$가진$\}$에 대하여 $B$에서 $A$에로의 관계 $R^{-1}$을 $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$로 정의할 때 $R^{-1}$을 $R$의 역관계(Inverse Relation)라고 한다.

---

이때 $R\subset A\times B$이므로, $R^{-1}\subset B\times A$가 됨은 자명한 사실이며, $R^{-1}$의 모든 원소인 순서쌍들은 모두가 $R$의 원소인 순서쌍들의 첫원소와 둘째번 원소를 서로 바꾸어 놓은 것들이다.

따라서, $R$의 정의역$\equiv R^{-1}$의 치역, $R$의 치역$\equiv R^{-1}$의 정의역이다.

**(예 3-1)** 집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$라 할때 $A$에서 $B$에로의 관계 $R$이 명제함수 "$x$는 $y$보다 작다"에 의하여 결정될 때

① 관계 $R$ 및 $R^{-1}$을 각각 구하여라.

② 관계 $R$ 및 $R^{-1}$의 정의역과 치역을 각각 구하여라.

③ 관계 $R$ 및 $R^{-1}$을 조건제시형으로 나타내고, 각각의 명제함수를 비교 하여라.

**(해)** ① $R=\{(1,3),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,5),\ (4,5)\}$

$R^{-1}=\{(3,1),\ (5,1),\ (3,2),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4)\}$

② $R$의 정의역$\equiv R^{-1}$의 치역$=A$, $R$의 치역$\equiv R^{-1}$의 정의역$=\{3,5\}$

③ $R=\{(x,y)\mid(x,y)\in A\times B,\ x<y\}$

$R^{-1}=\{(x,y)\mid(x,y)\in B\times A,\ x>y\}$

**〈참고〉** (예 3-1)에서 관계 $R$의 명제함수가 $x<y$인데 대하여 역관계 $R^{-1}$의 명제함수가 $y<x$로 됨은, $(a,b)\in R$이면 반드시 $(b,a)\in R^{-1}$인데 일반적으로 순서쌍의 첫원소를 $x$, 둘째번원소를 $y$로 표시하기 때문이다.

고로, 관계 $R$의 명제함수가 $P(x,y)$이면 $R^{-1}$의 명제함수는 $P(y,x)$이다.

**(예 3-2)** 관계 $R=\{(x,y)\mid(x,y)\in R^{\#}\times R^{\#},\ y=2^x\}$일 때

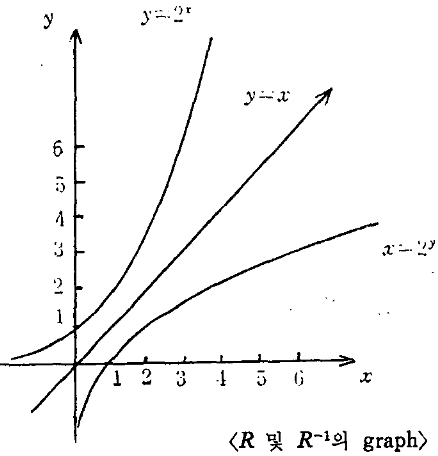
① 역관계 $R^{-1}$을 구하고

② $R$ 및 $R^{-1}$의 graph를 그리고, 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이 됨을 설명하여라.

**(해)** ① $R$의 역관계 $R^{-1}=\{(x,y)\mid(x,y)\in R^{\#}\times R^{\#},\ x=2^y\}$

② 가) $(a,b)\in R$인 모든 $(a,b)$에 대하여 반드시 $(b,a)\in R^{-1}$이 되고

나) 점$(a,b)$와 점$(b,a)$의 graph는 반드시 직선 $y=x$에 대하여 대칭되므로 $R$ 및 $R^{-1}$의 graph는 $y=x$에 대하여 선대칭이 된다.




〈$R$ 및 $R^{-1}$의 graph〉

### 4. 대응규칙으로서의 관계

관계 $R$은 다음으로 구성한다.

① 집합 $A$와 집합 $B$.

② 카테이션곱 $A\times B$에 속하는 모든 순서수 $(a,b)$에 대하여 명제 $P(a,b)$가 진 또는 위인 두변수 명제함수 $P(x,y)$.

이러한 $R$을 $A$에서 $B$에로의 관계라 하고, $R=(A,B,P(x,y))$로 나타낸다.

이때 $P(a,b)$가 진이면 $aRb$로 표시하고, $a$와 $b$는 관계가 있다고 하며, $P(a,b)$가 위이면 $a\not R b$로 표시하고, $a$와 $b$는 관계가 없다고 한다.

---

위의 정의는 두 집합 $A,B$의 대응규칙만을 관계로 본 것이다.

**(예 4-1)** $R=(N,N,P(x,y))$, (단, $N$은 자연수, $P(x,y)\equiv$"$x$는 $y$를 나눈다" 일때) $R$은 관계이다.

특히 $3R_{12}$, $2\not{R}_{7}$, $5R_{20}$, $7\not{R}_{13}$, $4R_{12}$, ……등등.

## Ⅲ. 순서관계 및 동치관계

### 1. 반사관계

집합 $A$에서 $A$에로의 관계 $R$, 곧 $R \subset A \times A$ 일때 모든 $x \in A$에 대하여 항상 $(x, x) \in R$이 성립하는 관계 $R$을 반사관계(Reflexive Relation)이라 한다.

---

위에서 "$A$에서 $A$에로의 관계 $R$"이라는 말 대신에 "$A$에서의 관계 $R$"이라고도 사용한다.

(예 1-1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$일때 다음 관계 $R_1, R_2$가 각각 반사관계 임을 확인 하여라.

① $R_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times A,\ x$는 $y$의 배수$\}$

② $R_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times A,\ x \leqq y\}$

(해) ① $R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$이고

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ 이다.

또 모든 $a \in A$에 대하여 $(a, a) \in R$이므로 관계 $R_1$ 및 $R_2$은 반사관계이다.

(예 1-2) $A$에서의 관계 $R$이 반사관계이면, 그의 역관계 $R^{-1}$도 반사관계임을 밝혀라.

(해) $R \subset A \times A$인 관계 $R$이 반사관계이므로, 곧 모든 $a \in A$에 대하여 $(a, a) \in R$이 성립하므로, 이때 모든 $a \in A$에 대하여 $(a, a) \in R^{-1}$도 항상 성립한다. 고로 $R^{-1}$도 $A$에서의 반사관계이다.

〈참고〉 반사관계인 것은 $=, \subset, \leqq, /\!/$, "$x$는 $y$의 배수이다", ……등이고 반사관계가 아닌 것은 $\neq, \subsetneqq, <, \perp$, ……등이다.

### 2. 대칭관계

$A$에서의 관계 $R$에서, 곧 $R \subset A \times A$일때 $(a, b) \in R$이면 반드시 $(b, a) \in R$도 성립하는 관계 $R$을 대칭관계(Symmetric Relation)라 한다.

---

곧 $R$이 대칭관계이기 위한 필요충분조건은 $R = R^{-1}$이며, 따라서 이때 관계 $R$의 graph는 직선 $y = x$에 대하여 선대칭 상태이다.

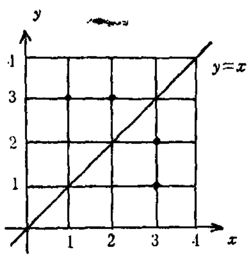
(예 2-1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$일때 다음 $A$에서의 관계 $R_1, R_2$가 각각 대칭관계임을 확인하고, 그의 graph를 각각 나타내어라.

① $R_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times A,\ x^2 + y^2 = 10$ 또는 $x^2 + y^2 = 13\}$

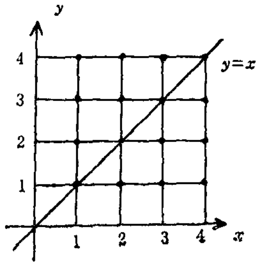
② $R_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times A\}$

(해) ① $R_1 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

② $R_2 = A \times A$




〈$R_1$의 graph〉




〈$R_2$의 graph〉

〈참고〉 대칭관계인 것은 $=, \neq, /\!/, \perp$, ……등이 있고, 대칭관계가 아닌 것은 $\subset, \leqq, <$, ……등이 있다.

### 3. 반대칭관계

$A$에서의 관계 $R$에서, 곧 $R \subset A \times A$일때 $(a, b) \in R$이고 $(b, c) \in R$일때는 반드시 $a = b$가 되는 관계 $R$을 반대칭 관계(Anti-Symmetric Relation)라 한다.

---

다시 말하면 $a \neq b$일때에는 $(a, b) \in R$이거나 $(b, a) \in R$일지는 몰라도, 이들이 동시에 일어날 수는 없는 경우이다.

곧 $R \cap R^{-1} \subset \{(a, a) \mid (a, a) \in A \times A\}$인 것은 관계 $R$이 반대칭되기 위한 필요충분조건이다.

(예 3-1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$일때 관계 $R = \{(x, y) \mid x$는 $y$의 배수, $(x, y) \in A \times A\}$이 반대칭관계임을 확인하여라.

(해) $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$이고

이때 $R \cap R^{-1} \subset \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ 이므로 관계 $R$은 반대칭적이다. 곧 $x$가 $y$의 배수이면 $x = y$일 때를 제외하고는 $y$는 $x$의 배수가 될 수 없기 때문이다.

(예 3-2) 실수 $R^{\#}$에서의 관계 $R = \{(x, y) \mid (x, y)$

$\in R^{\#}\times R^{\#},\ y>x\}$일때 관계 $R$은 반대칭적이다.

(해) $(a, b)\in R$이면 $(b, a)\notin R$이기 때문. 곧 $b>a$이면 $a\not> b$이라는 말이다.

〈참고〉 반대칭관계인 것은 $=, \subset, \leqq, <, \cdots\cdots$등이 있고, 반대칭관계가 아닌 것은 $\neq, /\!\!/, \perp, \cdots\cdots$등이 있다.

**4. 추이관계**

$A$에서의 관계 $R$에서, 곧 $R\subset A\times A$일때 $(a, b)\in R$이고 $(b, c)\in R$이면 반드시 $(a, c)\in R$이 성립하는 관계 $R$을 추이관계(Transitive Relation)라 한다.

(예 4-1) $A=\{1, 2, 3, 4\}$일때 $A$에서의 관계 $R=\{(x, y)\,|\,(x, y)\in A\times A,\ y>x\}$일때 $R$이 추이관계임을 확인하여라.

(해) $R=\{(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 4)\}$인데 $(a, b)\in R$이고, $(b, c)\in R$일 때에는 반드시 $(a, c)\in R$이다. 곧 이 말은 $a<b$이고, $b<c$이면 반드시 $a<c$이란 말이다.

(예 4-2) $R\subset A\times A$이고, $R$이 추이관계이면 역관계 $R^{-1}$도 $A$에서의 추이관계이다.

(해) $R\subset A\times A$이고, $(a, b)\in R$이고 $(b, c)\in R$일때 $(a, c)\in R$이다가 성립하면, $R^{-1}\subset A\times A$되고, $(b, a)\in R^{-1}$이고 $(c, b)\in R^{-1}$일때 $(c, a)\in R^{-1}$도 성립하므로, 곧 $R^{-1}$이 추이관계이다.

〈참고〉 추이관계에는 $=, \subset, \leqq, <, /\!\!/, \cdots\cdots$등이 있고 추이관계가 아닌 것은 $\neq, \perp, \cdots\cdots$등이 있다.

**5. 순서관계**

$R\subset A\times A$이고, 다음 세가지 조건을 만족할 때 관계 $R$을 $A$에서의 순서관계(Ordered Relation)라고 한다.

① $R$은 반사적이다, 곧 모든 $a\in A$에 대하여 $(a, a)\in R$이다.

② $R$은 반대칭적이다, 곧 $(a, b)\in R$이고 $(b, a)\in R$일 때에는 반드시 $a=b$이다.

③ $R$은 추이적이다. 곧 $(a, b)\in R$이고 $(b, c)\in R$일 때에는 $(a, c)\in R$이다.

$R\subset A\times A$인 관계 $R$이 순서관계일 때 집합 $A$를 관계 $R$에 의하여 정해진 순서집합(Ordered Set)이라 하고 $(A, R)$로 표시한다.

또 특별히 관계 $R$에 의하여 $A$의 임의의 두 원소가 모두 비교 가능한 관계, 즉 임의의 $a, b\in A$에 대하여 반드시 $(a, b)\in R$(아니면 $(b, a)\in R$)인 순서집합 $A$를 전순서집합(Totally Ordered Set)이라 한다.

〈참고〉 $A$에서의 관계 $R$이 순서관계이면 역관계 $R^{-1}$도 $A$에서의 순서관계이다. 왜냐하면 $A$에서의 관계 $R$이 반사적, 반대칭적, 추이적 관계이면, 그의 역관계 $R^{-1}$도 $A$에서의 반사적, 반대칭적, 추이적인 관계가 됨을 위에서 이미 각각 언급한 바 있다.

(예 5-1) 집합 $A=\{1, 2, 3\}$일 때 명제함수가 "$x\leqq y$"인 $A$에서의 관계 $R$이 순서관계임을 확인하여라.

(해) 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에서의 관계 $R$이,

$R=\{(x, y)\,|\,(x, y)\in A\times A,\ \ x\leqq y\}=\{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (3, 3)\}$이므로

① 모든 $a\in A$에 대하여 $(a, a)\in R$이다, 왜냐하면 $a\leqq a$가 성립하므로.

② $(a, b)\in R$이고 $(b, a)\in R$일 때에는 $a=b$이다, 왜냐하면 $a\leqq b$이고 $b\leqq a$일 때에는 $a=b$일 때 뿐이므로.

③ $(a, b)\in R$이고 $(b, c)\in R$이면 $(a, c)\in R$이다, 왜냐하면 $a\leqq b$이고 $b\leqq c$이면 반드시 $a\leqq c$이기 때문이다.

위의 ①, ②, ③에 의하여 $A$에서의 $R$은 순서관계이고 집합 $A=(A, R)=\{1, 2, 3\}$은 순서집합이다.

특히 순서집합 $A$에서 $a\neq b$인 임의의 $a, b\in A$에 대하여 $(a, b)\in R$이든가 아니면 $(b, a)\in R$ 중 반드시 한쪽만은 성립되므로, 즉 $(1, 2)\in R,\ (1, 3)\in R,\ (2, 3)\in R$이므로 집합 $A=\{1, 2, 3\}$은 전순서집합이다.

(예 5-2) $A=\{a, b\}$일 때, 명제함수 "$x\subset y$"인 멱함수 $P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, A\}$에서의 관계 $R$이 순서관계임을 설명하고, $P(A)$가 전순서집

합인가를 확인 하여라.

(해) $R=\{(x,y)\mid(x,y)\in P(A)\times P(A), x\subset y\}$ 즉 $R=\{(\phi,\phi)$, $(\phi,\{a\})$, $(\phi,\{b\})$, $(\phi,A)$, $(\{a\},\{a\})$, $(\{a\},A)$, $(\{b\},\{b\})$, $(\{b\},A)$, $(A,A)\}$에서, 관계 $R$은 $P(A)$에서의 반사, 반대칭, 추이를 만족하므로 멱집합 $P(A)$는 $R$에 의한 순서집합이다.

그러나 $(\{a\},\{b\})\notin R$이고 $(\{b\},\{a\})\notin R$이므로, 곧 $\{a\}$와 $\{b\}$는 관계 $R$에 의하여 비교 불가능하기 때문에 멱집합 $P(A)$는 전순서집합은 아니다.

(예 5-3) 집합 $A=\{1,2,3\}$일 때 명제함수가 "$x<y$"일 때 $A$에서의 관계 $R$은 순서관계인가?

(해) 관계 $R=\{(x,y)\mid(x,y)\in A\times A,\ x<y\}=\{(1,2),\ (1,3),\ (2,3)\}$에서 모든 $a\in A$에 대하여 $(a,a)\in R$이 성립하지 않는다. 고로 $R$은 $A$에서의 반사관계가 아니므로, 순서관계도 아니다.

〈참고〉 순서관계인 것은 $=,\subset,\leqq,\Rightarrow$(함의관계), ……등이고 순서관계가 아닌 것은 $\equiv,<,/\!/,\perp,\backsim$, ……등이다.

**6. 동치관계**

$R\subset A\times A$이고, 다음 세가지 조건을 만족할 때 관계 $R$을 $A$에서의 동치관계(Equivalence Relation)라 한다.

① $R$은 반사적이다, 곧 모든 $a\in A$에 대하여 $(a,a)\in R$이다.

② $R$은 대칭적이다, 곧 $(a,b)\in R$이면 $(b,a)\in R$이다.

③ $R$은 추이적이다, 곧 $(a,b)\in R$이고 $(b,c)\in R$일 때에는 $(a,c)\in R$이다.

---

(예 6-1) $A=\{1,2,3\}$일 때 관계 $R=A\times A$이면 $R$은 동치관계이다.

(해) $R=A\times A=\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}$이므로

① 모든 $a\in A$에 대하여 $(a,a)\in A\times A$이다. (반사적)

② $(a,b)\in A\times A$이면 $(b,a)\in A\times A$이다. (대칭적)

③ $(a,b)\in A\times A$이고 $(b,c)\in A\times A$이면 $(a,c)\in A\times A$이다. (추이적)

고로 관계 $R$은 $A$에서의 동치관계이다.

(예 6-2) 집합 $A$는 유클리드 평면에서 삼각형의 집합이다. 관계 $R=\{(x,y)\mid(x,y)\in A\times A$, $x$는 $y$와 닮은꼴이다$\}$일 때 $A$에서의 관계 $R$은 동치관계이다.

(해) 각자가 확인하여 보아라.

〈참고〉 동치관계인 것은 $=,/\!/,\equiv,\backsim$, ……등이고, 동치관계가 아닌 것은 $\leqq,<,\subset,\perp$, "나누어 떨어진다"……등이다.

**7. 분 할**

집합 $A$가 있어서 $A$의 부분집합을 $B_i$라 하자. (단 $I=\{1,2,3\cdots n\}$) 또 $\{B_i\}_{i\in I}$를 집합 $A$의 부분집합 $B_i$들로된 집합족이라 할 때 다음 세조건

① $B_i\neq\phi$. (단 $i\in I$)

② $\bigcup_{i\in I}B_i=A$. (곧 $B_1\cup B_2\cup B_3\cdots\cup B_n=A$)

③ 임의의 $i,j\in I$에 대하여 $B_i\cap B_j=\phi$이거나 또는 $B_i=B_j$이다를 만족하는 집합족 $\{B_i\}_{i\in I}$를 집합 $A$의 분할(Partition)이라고 하고, 이때 $A$의 부분집합 $B_i$ 각각을 집합 $A$의 동치류(Equivalence Class)라 부른다.

---

〈참고〉 첨자붙은 집합족 $\{B_i\}_{i\in I}$이란 정의역이 첨자집합 $I=\{1,2,\cdots,n\}$이고 치역이 집합족 $\{B_i\}_{i\in I}$인 함수 $f:I\to\{B_i\}_{i\in I}$를 뜻한다.

(예 7-1) 집합 $A=\{1,2,3,4,\cdots\}$이고, $B_1=\{1,3,5,\cdots\}$, $B_2=\{2,4,6,\cdots\}$일 때 집합족 $\{B_1,B_2\}$는 $A$의 분할인가?

(해) ① $B_i\neq\phi$ (단 $i=1,2$).

② $B_1\cup B_2=A$.

③ $B_1\cap B_2=\phi$. 곧 집합족 $\{B_1,B_2\}$는 $A$의 분할이다.

(예 7-2) 집합 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$이고 $A$의 부분집합들 $B_1=\{1,3,5\}$, $B_2=\{2,3,4\}$, $B_3=\{6\}$일 때 집합족 $\{B_1,B_2,B_3\}$는 $A$의 분할인가?

(해) $B_1\cap B_2=\{3\}\neq\phi$이므로 $\{B_1,B_2,B_3\}$는 $A$의 분할이 아니다.

**8. 동치관계와 분할에 관한 정리**

$R\subset A\times A$이고, $R$이 동치관계일 때, $A$의 부

분집합 $B_\alpha$를, 임의의 $\alpha \in A$에 대하여 $B_\alpha = \{x \mid (x, \alpha) \in R\}$로 정의하면 집합족 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$는 집합 $A$의 분할이 됨을 다음 순으로 증명하여라.

① 모든 $i \in A$에 대하여 항상 $i \in B_i$이다.

② $B_i = B_j$ 되기 위한 필요충분조건은 $(i, j) \in R$ 이다.

③ $B_i \neq B_j$이면 $B_i \cap B_j = \phi$이다. (곧, $B_i \cap B_j \neq \phi$이면 $B_i = B_j$이다.)

---

〈증명〉 ① $R$이 $A$에서의 동치관계이므로 $R$은 반사적이다.

고로 모든 $i \in A$에 대하여 $(i, i) \in R$ $\therefore$ $i \in B_i = \{x \mid (x, i) \in R\}$이다.

② 우선 $(i, j) \in R$일 때 $B_i = B_j$를 증명해 보자. $x \in B_i$, 곧 $(x, i) \in R$이라면, 가정에서 $(i, j) \in R$이므로, 추이관계에 따라 $(x, j) \in R$, 곧 $x \in B_j$이다. 이상에서 $B_i \subset B_j$임을 증명하였고, 또 $B_j \subset B_i$를 증명하면 되는데, 가정에서 $(i, j) \in R$에서, 대칭관계이므로 $(j, i) \in R$이며 $x \in B_j$, 즉 $(x, j) \in R$일 때는 추이관계에서 $(x, i) \in R$, 곧 $x \in B_i$이다. 고로 $B_j \subset B_i$가 되어서 결과적으로는 $B_i = B_j$이다. 다음은 $B_i = B_j$일 때 $(i, j) \in R$임을 증명해 보자.

위의 증명 ①에서 $i \in B_i$인데 가정에서 $B_i = B_j$이므로 $i \in B_j$이기도 하다, 곧 $(i, j) \in R$임이 증명되었다.

③ $B_i \cap B_j \neq \phi$이면 $B_i = B_j$임을 증명해 보자. 곧 $x \in B_i \cap B_j$일 때면 $(x, i) \in R$이고 $(x, j) \in R$인데 대칭관계에서 $(i, x) \in R$이 되니까 결국은 $(i, x) \in R$, $(x, j) \in R$에서 추이관계 이므로 $(i, j) \in R$이 된다. 또 $(i, j) \in R$이면 위의 증명 ②에 따라서 $B_i = B_j$이다.

〈참고〉 집합 $A$에서의 관계 $R$이 동치관계일 때 각 $\alpha \in A$에 대하여 $B_\alpha = \{x \mid (x, \alpha) \in R\}$로 정의된 $B_\alpha$는 $A$의 동치류이고, 동치류의 집합족 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$를 관계 $R$에 의한 $A$의 상집합(The Quotient of $A$)이라 하고 $A/R$로 표시한다.

(예 8-1) 집합 $A$는 유클리드 평면에서 삼각형의 집합이다. 관계 $R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times A$, $x$는 $y$와 닮은 꼴이다$\}$일 때 관계 $R$은 동치관계 이므로 집합 $A$는 $R$에 의하여 분할이 가능하다.

(해) 관계 $R$은 $A$에서의 동치관계(반사・대칭・추이) 이므로 집합 $B_\alpha = \{x \mid (x, \alpha) \in R\}$로 정의하면 $B_\alpha$는 삼각형 $\alpha$와 닮은 삼각형들의 집합이고, 따라서 집합 $A$는 서로 소인집합들로 분할된다.

(예 8-2) $Z$를 정수라 할 때 관계 $R = \{(x, y) \mid (x, y) \in Z \times Z$, $x - y$는 5의 배수$\}$라 할때 상집합 $Z/R$을 구하여라.

(해) 관계 $R$은 $Z$에서 동치관계이다. 곧 $R = \{\cdots(-11, -1)(10, 0)(-9, 1), \cdots(0, 0)$, $(5, 0)$, $(5, -5)$, $(3, 3)$, $(0, 10)\cdots\}$에서

① 모든 $x \in Z$에 대하여 $(x, x) \in R$ ($\because$ $x - x = 0$은 5의 배수)

② $(x, y) \in R$이면 $(y, x) \in R$ ($\because$ $x - y = 5K$이면 $y - x = 5K'$, $K$ 및 $K'$는 정수)

③ $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$이면 $(x, z) \in R$ ($\because$ $x - y = 5K$, $y - z = 5K'$이면 $x - z = 5K''$)

고로 $R$은 $Z$에서 동치계이므로 $B_\alpha = \{x \mid (x, \alpha) \in R\}$이라 할 때

$B_0 = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$

$B_1 = \{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11, \cdots\}$

$B_2 = \{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}$

$B_3 = \{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$

$B_4 = \{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}$

이므로 $Z/R = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4\}$이다. 이때 $B_0 = B_5 = B_{10}, \cdots$, $B_1 = B_6 = B_{11}, \cdots$, $\cdots B_4 = B_9 = B_{14}, \cdots$가 됨은 모든 정수 $x = 5q + r\,(0 \leqq r < 5)$로 유일하게 표시되므로, $x$는 동치류 $B_r$의 원소가 되어서, 여기서 $r$은 그 나머지에 따라서 정해지므로, $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$인 서로소인 다섯개의 동치류만이 존재한다. 곧 $(1, 6) \in R$, $(1, 11) \in R$, $(6, 16) \in R \cdots$등에서 $B_1 = B_6 = B_{11} = B_{16} \cdots$이 됨은 $(i, j) \in R$일 때 $B_i = B_j$이기 때문이다.

## Ⅳ. 결 어

카테이션곱의 부분집합으로서의 관계 및 역관계를, 그리고 순서관계 및 동치관계를 정의하기

위하여 반사, 대칭, 반대칭, 추이관계 등을 순서쌍의 집합만으로 정의하고 설명하였다.

아울러 동치관계와 분할에 대한 기본적인 정리만을 우선 서술하므로서 본 논문의 미약함을 맺는다.

## 참 고 문 헌


1. 박한식, 신동선, 집합론, 1971.
2. 김년식, 김응태, 박한식, 이성헌, 수학교육, 1981.
3. Seymour-Lipschutz, Finite Mathematics, 1966.
4. Seymour-Lipschutz, Set theory, 1964.
5. 김훈직, (졸고), 순서쌍의 집합으로서의 관계 및 함수지도.