韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1982. 12. Vol. XXI. No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1982. Vol. XXI. No. 1.

有限群의 實元

關東大學 鄭 春 景

1. 序 論

有限群 G에서 G의 한 元 c가 그 逆元 c^{-1}와 共軛일 때 c를 G의 **實元**(real element)라 한다. 또한 有限群 G의 한 元 a에서 $x^2=a$를 만족시키는 解 $x\in G$ 全體의 갯수를 $\rho_2(a)$로 나타내기로 한다.

이 論文에서는 다음의 세 定理를 證明하고저 한다.

定理 3.1. 有限群 G의 實共軛類의 갯수를 r이라고 할 때, 다음 式이 成立한다.

$$\sum_{a\in G}(\rho_2(a))^2=r|G|$$

특히, 群 G의 實共軛類의 갯수 r은 $|G|$의 約數이다.

定理 3.2. 有限群 G의 임의의 元 c에 대하여 $C^*_G(c)$를

$$C_G{}^*(c)=\{g\in G\,|\,c^g=c \text{ 또는 } c^g=c^{-1}\}$$

라고 定義하면, $C^*_G(c)$는 G의 部分群이고

$$|C^*_G(c):C_G(c)|\leq 2$$

이 成立한다.

특히, 等號가 成立하기 위한 必要充分條件은 c가 $c\neq c^{-1}$인 實元인 것이다.

定理 3.3. 有限群 G에 恒等元 以外의 實元이 存在한다면, 즉 G의 實共軛類가 2개 이상 存在한다면, G의 位數는 짝수이다.

이 論文에서 使用하는 用語와 記號는 모두 標準的인 것이다. 특히, 有限群 G의 位數는 $|G|$로 나타낸다.

2. 補助定理

이 節에서는 群의 實元과 主定理의 證明에 必要한 補助定理를 論하기로 한다.

群 G의 두 元 x, y에 대하여 $y=x^g=g^{-1}xg$인 $g\in G$가 存在할 때 이 두 元은 서로 共軛인 元(conjugate element)이라 한다. 또, 한 元 $x\in G$에 대하여, x와 共軛인 全體의 集合 C를 G의 **共軛類**(conjugacy class)라 한다. 즉,

$$C=\{x^g\,|\,g\in G\}=\{g^{-1}xg\,|\,g\in G\}$$

이제 有限群 G에서, 中心化部分群(centrelizer)을 $C_G(x)$로 나타낸다. 즉,

$$C_G(x)=\{g\in G\,|\,xg=gx\}=\{g\in G\,|\,x^g=x\}$$

補助定理 2.1. G를 有限群이라 하고 $x\in G$라 할 때 x를 포함하는 共軛類를 C라 하면,

$$|C|=|G:C_G(x)|=|G|/|C_G(x)|$$

이다.

證明 共軛類 $C=\{x^g|g\in G|$와 部分群 $C_G(x)$의 右剩餘類 全體의 集合 $\{C_G(x)\cdot g\,|\,g\in G\}$사이에 1對 1對應關係가 있음을 證明하면 된다.

실제로, C의 임의의 元은 x^g의 꼴로 표시되고 다음이 成立한다.

$$x^g=x^h \Leftrightarrow x^{gh^{-1}}=x \Leftrightarrow gh^{-1}\in C_G(x)$$
$$\Leftrightarrow C_G(x)g=C_G(x)h$$

그러므로, 對應 $x^g\leftrightarrow C_G(x)g$에 의하여 위의 두 集合은 1對 1 對應한다. 따라서,

$$|C|=|G:C_G(x)|$$

Lagrange 定理에 의하여

$$|C|=|G:C_G(x)|=|G|/|C_G(x)|$$

有限群 G에서, G의 한 元 c가 그 逆元 c^{-1}와 共軛일 때 c를 G의 **實元**(real element)이라고 한다.

補助定理 2.2. 群 G의 한 元 c가 實元이면 c를 포함하는 共軛類 C의 모든 元도 實元이다.

證明 가정에 의하여 c는 實元이므로 $c^y=c^{-1}$인 $y\in G$가 存在한다. 이제, $x\in C$이라고 하면

$x=c^g$인 元素 $g\in G$가 存在하고, 이때,

$$x=c^g \Leftrightarrow x^{-1}=(c^{-1})^g=g^{-1}cg$$

그런데, $x=c^g$ 이므로 $x^{g^{-1}}=c$, 따라서,

$$x^{g^{-1}yg}=(c^y)^g=(c^{-1})^g=x^{-1}$$

따라서 x는 實元이다.

한 元 c를 포함하는 共軛類를 C라고 할 때, 위의 補助定理 2.2의 結果에 따라, c가 實元이면 C의 모든 元도 實元이다. 이러한 意味에서 한 實元을 포함하는 共軛類를 **實共軛類**(real conjugacy class)라고 한다.

이 定義와 補助定理 2.2에 의하여 다음이 成立한다.

補助定理 2.3. 有限群 G의 서로 다른 實共軛類 全體를

$$C_1, C_2, \cdots\cdots C_r$$

이라 하면, G의 實元 全體의 集合은

$$C_1 \cup C_2 \cup \cdots\cdots \cup C_r$$

이다.

3. 主定理

有限群 G에서 G의 한元 c가 그 逆元 c^{-1}와 共軛일 때 c를 群 G의 實元이라 한다.

또, 有限群 G에서 한 元 $a\in G$와 임의의 自然數 n에 대하여 $x^n=a$를 만족시키는 解 $x\in G$ 全體의 갯수를 $\rho_n(a)$로 나타내면 二項方程式 $x^2=a$를 만족하는 解 $x\in G$ 全體의 갯수는 $\rho_2(a)$이고, a가 제곱元이 아니면, 즉 $a\notin\{x^2 | x\in G\}$이면 $\rho_2(a)=0$이다.

定理 3.1. 有限群 G의 實共軛類의 갯수를 r이라고 할 때, 다음 式이 成立한다.

$$\sum_{a\in G}(\rho_2(a))^2=r|G|$$

특히, 群 G의 實共軛類의 갯수 r은 $|G|$의 約數이다.

證明 群 G의 元 a가 제곱원이 아니면 $\rho_2(a)=0$이다. 따라서

$$\sum_{a\in G}(\rho_2(a))^2=\sum_{a\in G}(\rho_2(b^2))^2$$

固定된 한 元 $b^2\in G$에 대하여, $\rho_2(b^2)=n$이라 하고 方程式 $x^2=b^2$의 解를

$$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$$

이라 하면, 모든 $i, j=1, 2, \cdots, n$에 대하여 $b_i^2=b^2=b_j^2$이므로, $b_i^2=b_j^2$를 만족시키는 순서쌍(b_i, b_j)全體는 n^2개이다.

$$\text{즉} \sum_{b_i^2=b_j^2} 1=n^2\text{이다.}$$

따라서 $x^2=y^2$를 만족시키는 모든 순서쌍(x, y) 全體의 集合을 X라고 할 때, 즉 $X=\{(x, y) | x^2=y^2\}$이라 할 때, 다음 等式이 成立한다.

$$\sum_{b^2\in G}\rho_2((b^2))^2=|X|$$

이제 $(x, y)\in X$라 하자.

群 G의 두 元 x, y가 等式 $x^2=y^2$을 만족시킨다고 하고 $c=yx^{-1}$이라고 놓자. 그러면 $y=cx$이고 $x^2=(cx)^2$이다. 이때,

$$(*)\ x^2=(cx)^2 \Leftrightarrow x^2=cxcx$$
$$\Leftrightarrow c=xc^{-1}x^{-1} \Leftrightarrow c^{-1}=xcx^{-1}$$

따라서, c와 c^{-1}는 共軛元이므로 c는 實元이다.

역으로, 群 G의 한 元 c를 實元이라고 하면 $c^{-1}=xcx^{-1}$인 $x\in G$가 存在한다. 이 때 앞의 $(*)$에 의하여 $x^2=(cx)^2$ 이므로, x와 $y=cx$는 等式 $x^2=y^2$을 만족시킨다.

이제 임의의 實元 c에 대하여, c를 포함하는 共軛類를 C라고 하면 이는 實共軛類이다.

또 $c^{-1}=xcx^{-1}$를 만족하는 元 $x\in G$의 갯수를 I_c라고 하면, 補助定理 2.1에 의하여

$$I_C=|G|/|C|$$

이다. 그러므로 等式 $x^2=y^2$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 全體의 갯수는 $\sum_c I_c$이다. 여기서, $\sum$는 모든 實元 c에 대한 合을 나타낸다.

한편, 實共軛類 C의 모든 元도 實元이고, 가정에 의하여 群 G의 實共軛類는 r개 있다. 이 r개의 實共軛類를

$$C_1, C_2, \cdots\cdots C_r$$

이라 하면, 補助定理 2.3에 의하여 實元 全體의 集合은

$$C_1 \cup C_2 \cup \cdots\cdots \cup C_r$$

이다. 따라서,

$$\sum_c I_c=\sum_{i=1}^{r}\sum_{c\in C}I_c=\sum_{i=1}^{r}|G|/|C_i|\cdot|C_i|$$
$$=\sum_{i=1}^{r}|G|=r|G|$$

그러므로,

$$\sum_{a\in G}(\rho_2(b))^2=\sum_c I_c=r|G|$$

定義에 의하여 有限群 G의 恒等元 1은 分明히 實元이고 따라서 $\{1\}$은 實共軛類이다. 이제 有限群 G에 實共軛類 갯수가 그 이상이 될 必要充分條件에 대하여 알아 보기로 한다.

定理 3.2. 有限群 G의 임의의 元 c에 대하여 $C_G^*(c)$를

$$C_G^*(c)=\{g\in G\,|\,c^g=c \text{ 또는 } c^g=c^{-1}\}$$

라고 定義하면 $C_G^*(c)$는 G의 部分群이고

$$|C_G^*(c):C_G(c)|\leq 2$$

이 成立한다. 특히, 等號가 成立하기 위한 必要充分 條件은 c가 $c\neq c^{-1}$인 實元인 것이다.

證明 이제 $g\in C_G^*(c)$라고 하면

$$g^{-1}cg=c \text{ 또는 } g^{-1}cg=c^{-1}$$

이므로,

$$gcg^{-1}=c \text{ 또는 } gcg^{-1}=c^{-1}$$

이 成立한다. 따라서,

$$g\in C_G^*(c)\Rightarrow g^{-1}\in C_G^*(c)$$

$$x,y\in C_G^*(c)\Rightarrow xy\in C_G^*(c)$$

그러므로 $C_G^*(c)$는 G의 部分群이다.

먼저 $C_G^*(c)=C_G(c)$인 경우에는

$$|C_G^*(c):C_G(c)|=1$$

다음에, $C_G^*(c)\neq C_G(c)$이라고 하자. 이때 定義에 의하여 $c^x=c^{-1}\neq c$을 만족시키는 元 $x\in G$가 存在하고 따라서 c는 G의 實元이다.

역으로, $c^x=c^{-1}\neq c$인 元 $x\in G$가 存在하면 $C_G{}^*(c)$의 임의의 元 g에 대하여 $c^g=c$ 또는 $c^g=c^{-1}$ 이므로 $g\in C_G(c)$ 또는 $gx^{-1}\in C_G(c)$이다. 따라서

$$C_G^*(c)=C_G(c)\cup C_G(c)x$$

즉,

$$|C_G^*(c):C_G(c)|=2$$

定理 3.3. 有限群 G에 恒等元 以外의 實元이 存在한다면, 즉 G의 實共軛類가 2개 이상 存在한다면, G의 位數는 짝수이다.

證明 群 G의 恒等元이 아닌 c가 存在한다고 하자, 이때, c의 位數가 2이면 Lagrange의 定理에 의하여 G의 位數는 반드시 짝수이어야 한다.

한편, c의 位數가 2가 아니면, $c\neq c^{-1}$이므로 定理 3.2에 의하여

$$|C_G{}^*(c):C_G(c)|=2$$

따라서 G의 位數는 짝수이다.

參考文獻

1. Burnside, W., *Theory of group of finite order*, 2nd ed., Dover, New York, 1955.
2. Gorenstein, D., *Finite groups*, Chelsea Pub., Co., New York, 1980.
3. Higgins, R., *Numerical relationships in group theory*, M.S. Thesis, South Dakota School of Mines and Technology, Rapid City, 1970.
4. Suzuki, M., *Group Theory I*, Spinger-Verlag, New York, 1982