

Shading Coil 이 裝置된 電磁開閉器의 吸引力에 關한 研究

金 是 和* · 盧 彰 注**

A Study on the Attracting Force of an Electromagnetic Contactor with Shading Coil

Si Hwa Kim · Chang Joo Noh

〈 目 次 〉	
Abstract	3. 實 驗
記號說明	3.1 實驗裝置 및 方法
1. 序 論	3.2 吸引力의 比較實驗
2. 理 論	3.3 電氣的 回路定數의 測定實驗
2.1 電磁石의 吸引力에 關한 基礎式	4. 實驗結果 및 檢討
2.2 交流電磁石과 Shading coil	4.1 吸引力特性에 關한 比較
2.2.1 Shading coil의 原理	4.2 電磁開閉器의 設計上의 改良에 關 한 檢討
2.2.2 變壓器의 理論에 의한 Shading coil의 解釋	5. 結 論
2.3 直流 및 交流의 單位消耗電力當 吸引力의 比較	參考文獻
	附 錄

Abstract

The attempt of this paper is to examine the basic theory on the analysis of the effect of a shading coil fitted to an electromagnetic contactor, and to compare experimentally the attracting force of an AC electromagnetic contactor with that of a DC electromagnetic contactor, with varying the airgap length.

Equations are also proposed for calculating the AC and DC attracting force per unit consumption wattage by using the circuit constants measured from the experiment, and these calculated attracting forces are compared with those actually measured, and then, the experimental contactor is examined in the view of its design.

The calculated attracting forces are appeared to coincide well with the measured ones and the experimental contactor fitted with shading coil is revealed not so well designed for reducing the fluctuation of the attracting force.

* 正會員, 韓國海洋大學

** 教 授, 韓國海洋大學

記 號 說 明

B	: 磁束密度	(N/A·m)
E_1	: 一次側 逆起電力	(V)
E_s	: 一次側 端子電壓	(V)
F_1	: Shading coil의 外部磁極面이 내는 吸引力	(N)
F_2	: Shading coil의 內部磁極面이 내는 吸引力	(N)
F_{av}	: 平均 吸引力	(N)
F_0	: 利用可能한 無騒音 吸引力	(N)
F_{AC}	: 交流吸引力	(N)
F_{DC}	: 直流吸引力	(N)
I_1	: 一次側 電流	(A)
I_0	: 勵磁電流	(A)
I_i	: 鐵損電流	(A)
I_s	: Shading coil의 電流	(A)
I_t	: 電源側의 補充電流	(A)
I_t	: 一次側 全電流	(A)
L_1	: 勵磁 Coil의 自己 Inductance	(H)
L_s	: Shading coil의 自己 Inductance	(H)
L'_s	: ϕ_L 을 만드는 自己 Inductance	(H)
L_e	: 一次側의 等價自己 Inductance	(H)
M	: 相互 Inductance	(H)
N_1	: 勵磁 Coil의 捲數	
N_s	: Shading coil의 捲數	
P	: Permeance	(N·m/A ²)
P_{AC}	: 交流 消耗電力	
P_{DC}	: 直流 消耗電力	
Q	: 磁路抵抗	(A ² /N·m)
R_1	: 勵磁 Coil의 抵抗	(Ω)
R_i	: 鐵損抵抗	(Ω)
R_s	: Shading coil의 抵抗	(Ω)
R_e	: 一次側의 等價抵抗	(Ω)
W, W_1, W_2, W_e	: Energy	
ΔW	: 일	
Z_1	: 一次側 Impedance	(Ω)
Z_i	: 鐵損抵抗	(Ω)
Z_0	: $R_1 + XL_1$	(Ω)
Z_s	: Shading coil의 Impedance	(Ω)
Z_m	: $-j\omega M$	(Ω)
α	: ϕ_1 과 ϕ_2 의 位相角	($^\circ$)
μ_0	: 眞空透磁率	(N/A ²)
ν_1	: Shading coil外部 磁路의 漏洩係數	

ν_2	: Shading coil內部 磁路의 漏洩係數	
ϕ	: 磁束	(N·m/A)
Φ_m	: 最大磁束	(N·m/A)
ϕ_1	: Shading coil外部 磁極面의 磁束	(N·m/A)
ϕ_2	: Shading coil內部 磁極面의 磁束	(N·m/A)
ϕ_0	: 勵磁電流에 의한 磁束	(N·m/A)
ϕ_L	: Shading coil의 漏洩磁束	(N·m/A)
φ_1	: \dot{I}_1 의 \dot{E}_1 에 대한 位相角	(°)
φ_2	: \dot{I}_s 의 \dot{E}_s 에 대한 位相角	(°)
a	: Shading coil外部 磁路의 斷面積(S_1)	(m ²)
b	: Shading coil內部 磁路의 斷面積(S_2)	(m ²)
m	: $\frac{a}{a+b}$	
S	: 磁路의 斷面積($a+b$)	(m ²)
x	: 空隙의 길이	(m)
Δx	: 空隙의 變位	(m)

1. 序 論

電力의 磁力作用을 利用한 電磁石은 오늘날 그 應用範圍가 넓어, 回路의 開閉器, 繼電器, 電動機 制御用 機器를 비롯하여, 一般工業用 各種裝置로부터 家庭 日用品에 이르기까지 多樣하게 製作使用 되고 있다.

이런 狀況下에서, 電磁石에 대한 具體的인 理論과 解釋方法 및 그 經濟性을 檢討해 보는 것은 意義가 있는 것으로 생각한다. 그러나 현재까지 이들에 關한 設計 및 解釋方法은 막연한 程度로 紹介 되어 있을 뿐이며, 특히 Shading coil이 끼워져 있는 AC 電磁石의 경우는 더욱 그러하다.

여기서는 Shading coil의 解釋에 關한 理論的 根據를 밝히고, 實驗對象으로 Shading coil이 끼워진 電磁開閉器를 선정하여, 空隙을 變化시켜 가면서, AC 및 DC 電源에 의한 吸引力의 크기를 測定하고, 그 各各의 單位電流 및 單位消耗電力當의 吸引力을 比較檢討하였다.

研究方法으로는 Shading coil이 끼워진 AC 電磁石의 吸引力을 나타내는 式을 誘導하고, 이 式으로 計算한 理論的 吸引力과 實測吸引力을 比較함으로써 그 吸引力 計算式의 妥當性을 立證하고 아울러 電磁開閉器의 設計上 改良하여야 할 點을 檢討해 보았다.

2. 理 論

2.1 電磁石의 吸引力에 關한 基礎式

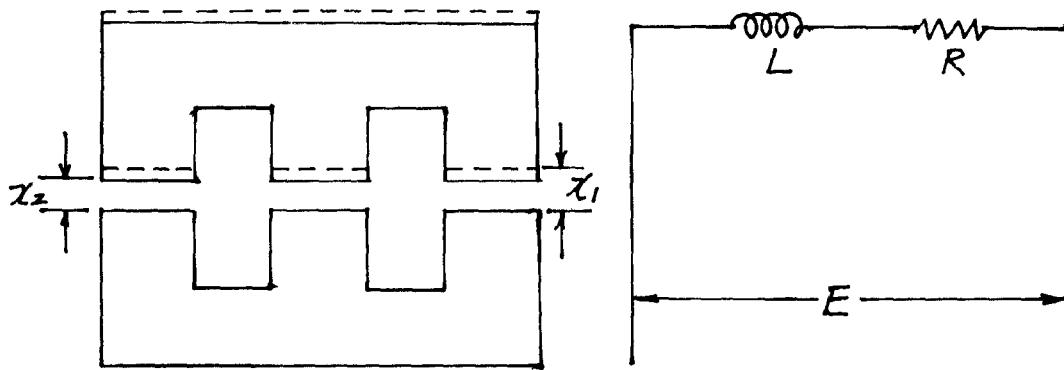


Fig.1 (a) Principle feature of experimental core

(b) Equivalent circuit of experimental coil

Fig.1(a)와 같은 構造의 電磁石은 R과 L의 直列回路로서 Fig.1(b)와 같은 等價回路로 나타낼 수 있다.

이 回路에 電壓 E를 加했을 때 t초 후의 電流를 i로 하면 그 Energy 關係式은 다음과 같다.

$$\int_0^t Ei \, dt = \int_0^t i^2 R \, dt + \int_0^t Li \, di \quad (1)$$

式 (1)의 左邊은 電壓 E인 電源으로부터 t초간 供給받은 全 Energy 이고, 右邊 第一項은 Joule 熱로 消費된 Energy이며, 右邊 第二項은 周圍의 磁界中에 蓄積된 電磁 Energy이다.

$L = \frac{N\phi}{i}$ 를 利用하여 式 (1)의 右邊 第二項을 다시쓰면

$$W = \int_0^i Li \, di = \int_0^i N\phi \, di = \int_0^\phi iN \, d\phi \quad (2)$$

가 된다.^{1),2)}

지금 Fig. 1(a)와 같은 電磁石의 空隙을 x_1 으로 하고 勵磁電流를 增加시키면 電磁石의 磁化特性曲線은 Fig. 2(a)의 OA와 같다.

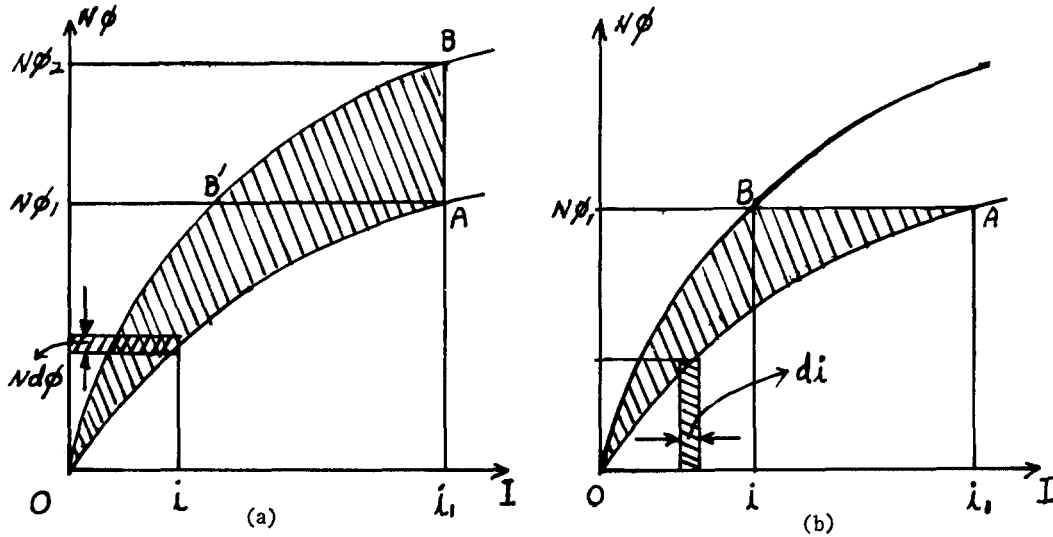


Fig. 2 Magnetization curves

電流 i_1 , 磁束 ϕ_1 이 되었을 때 磁界의 電磁 Energy

$$W_1 = \int_0^{\phi_1} i_1 N \, d\phi \quad (3)$$

가 되며 Fig. 2(a)의 面積 $OA \overline{N\phi_1}$ 으로 表示된다.

이때 電磁石의 吸引力에 의해 空隙이 x_2 로 되면 磁路의 Permeance는 增加하여 磁化特性曲線은 OB와 같이 되고, 勵磁電流 i_1 일 때의 磁束은 ϕ_2 로 增加한다. 여기서 $\frac{d\phi}{dt}$ 에 比例하는 磁氣誘導에 의한 逆起電力에 대하여 i_1 을 一定하게 維持하기 위한 Energy W_e [Fig. 2(a)의 面積 $AB \overline{N\phi_2}, \overline{N\phi_1}$]는 電源으로부터 供給된다.

空隙이 x_2 일 때 磁界의 電磁 Energy

$$W_2 = \int_0^{\phi_2} i_1 N \, d\phi \quad (4)$$

가 되며 Fig. 2(a)의 面積 $OB \overline{N\phi_2}$ 로 나타난다.

즉 $W_1 + W_e - W_2 = \Delta W$ 인 Energy [Fig. 2(a)의 面積 OAB]로 $x_1 - x_2 = \Delta x$ 만큼 可動鐵心을 吸引한 것이며 그 吸引力은

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} \quad (5)$$

가 된다.^{3),4),5)} Fig. 2(b)의 경우는 x_1 에서 x_2 로 되었을 때에도 磁束을 ϕ_1 으로 一定하게 維持한 것이며 吸引力式의 符號만 反對로 되고 結果는 同一하다.

一般的으로 電流 i 일 때 周圍磁界에 蓄積되는 電磁 Energy

$$W = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} (Ni)^2 P = \frac{1}{2} \phi^2 Q \quad (6)$$

으로 表示할 수 있다.

그러므로 電磁石의 吸引力은

$$F = \frac{d}{dx} W = \frac{1}{2} (Ni)^2 \frac{dP}{dx} = \frac{1}{2} \phi^2 \frac{dQ}{dx} \quad (7)$$

가 되고 이를 다시 정리하면 式(8)과 같다.

$$F = \frac{1}{2} \phi^2 \frac{1}{\mu S} = \frac{1}{2} B^2 \frac{S}{\mu_0} \quad (8)$$

2.2 交流電磁石과 Shading coil

한편 電磁石을 交流電源으로 勵磁시킬 경우 $\phi = \phi_m \sin \omega t$, $B = B_m \sin \omega t$ 이므로 $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$ 에 의해 吸引力의 式은

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\mu_0 S} \phi_m^2 - \frac{1}{4\mu_0 S} \phi_m^2 \cos 2\omega t \\ &= \frac{S}{4\mu_0} B_m^2 - \frac{S}{4\mu_0} B_m^2 \cos 2\omega t \end{aligned} \quad (9)$$

가 된다. 여기서 平均 吸引力을 求하면 式(9)의 右邊 第二項들은 0 이 되므로 第一項들만 남게 되어

$$F_{av} = \frac{1}{4\mu_0 S} \phi_m^2 = \frac{S}{4\mu_0} B_m^2 \quad (10)$$

이 된다.

그러나 式(9)의 右邊 第二項들의 要素에 의하여 吸引力은 供給電壓 周波數의 2倍 周波數로 振動하며, 이 振動으로 因한 電磁石의 磨損 및 騒音을 防止하기 위하여 Fig.3(a)와 같이 電磁石의 極片에 Shading coil을 끼우는 것이다.¹⁾

2.2.1 Shading coil의 原理

순수한 單相交流에 의한 電磁石의 吸引力은 비록 平均力은 있어도 振動하는 吸引力이므로 利用可能한 吸引力은 현저하게 작다. 이 振動을 어느 程度 減少시키기 爲해 時差를 가지는 두 交番磁束을 만드는 役割을 하는 것이 바로 Shading coil이다. Fig. 3(a)에서 보듯이 勵磁 Coil에 의해 發生한 磁束 ϕ_0 중 一部는 Shading coil內部를 通過하여 Shading coil에 誘起電壓을 만들지만 그 외는 漏洩磁束이 된다.

그러므로 Shading coil을 가진 電磁石을 漏洩係數가 큰 變壓器理論으로 解釋하여 Fig.3(b)와 같은 Phasor圖로 說明할 수가 있다.²⁾

우선 勵磁 Coil에 電源이 供給되면 ϕ_0 의 磁束을 만들게 되는 勵磁電流 I_0 는, 鐵損과 勵磁 Coil의 抵抗損 및 Inductance에 의해 ϕ_0 보다 다소 빠른 位相을 갖는다. 一次電流 I_1 은 이 勵磁電流 I_0 와 鐵

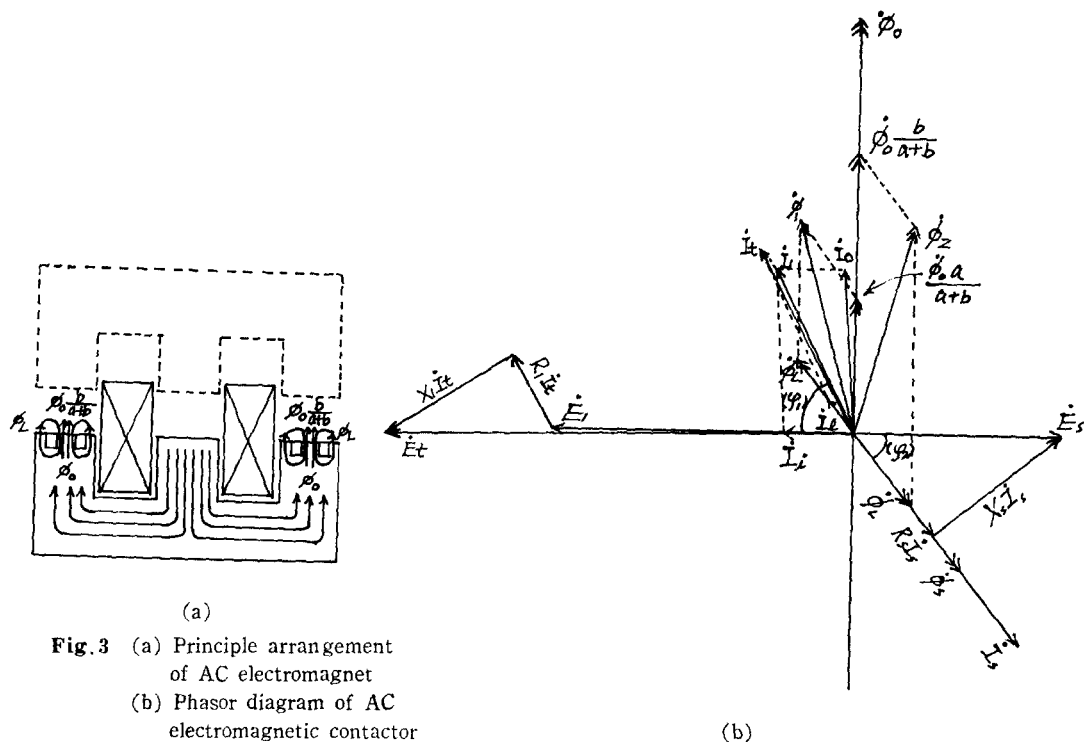


Fig. 3 (a) Principle arrangement of AC electromagnet
(b) Phasor diagram of AC electromagnetic contactor

損電流 I_1 의 合이다. Fig. 3에서 보듯이 $\phi_0 \frac{b}{a+b}$ 에 해당하는 磁束에 의하여 Shading coil에는 ϕ_0 보다 90° 位相이 늦은 電壓 E_s 가 誘起되며, 거기에서 Shading coil의 抵抗 R_s 및 誘導 Reactance X_s 로 因하여 ϕ_s 만큼 늦은 位相으로 Shading coil의 電流 I_s 가 흐른다. I_s 에 의해 생기는 磁束 ϕ_s 중 一部는 勵磁 Coil과 交叉하고 나머지는 漏洩磁束 ϕ_L 이 된다. ϕ_s 는 勵磁 Coil에 의해 생긴 原磁束을 방해하는 方向으로 생기므로 ϕ_s 중 勵磁 Coil과 交叉하는 磁束分은 電源側의 電流 I_1 에 의해 補償되며 電源으로부터의 供給 全電流는 I_1 가 된다.

결국 電磁石의 極片에 끼워진 Shading coil의 外部를 通過하는 磁束

$$\phi_1 = \phi_0 \frac{a}{a+b} - \phi_L \quad (11)$$

이 되고 Shading coil 内部를 通過하는 磁束

$$\phi_2 = \phi_0 \frac{b}{a+b} + \phi_L \quad (12)$$

이 된다.

이 때 電磁石의 한쪽 極片만 생각하면 ϕ_1 과 ϕ_2 兩者에 의해 생기는 合成瞬時吸引力은 다음과 같다.

$$F = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{\Phi_{1m}^2 \sin^2 \omega t}{S_1 \nu_1^2} + \frac{\Phi_{2m}^2 \sin^2(\omega t - \alpha)}{S_2 \nu_2^2} \right] \quad (13)$$

$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ 를 利用하여 式 (13)을 다시 쓰면

$$F = \frac{\Phi_{1m}^2}{4\mu_0 S_1 \nu_1^2} + \frac{\Phi_{2m}^2}{4\mu_0 S_2 \nu_2^2} - \frac{\Phi_{1m}^2}{4\mu_0 S_1 \nu_1^2} \cos 2\omega t - \frac{\Phi_{2m}^2}{4\mu_0 S_2 \nu_2^2} \cos 2(\omega t - \alpha) \quad (14)$$

와 같이 된다.

式 (14)는 $\frac{\Phi_{1m}^2}{4\mu_0 S_1 \nu_1^2} = F_1$, $\frac{\Phi_{2m}^2}{4\mu_0 S_2 \nu_2^2} = F_2$ 라 하면 Fig. 4와 같이 2배의 位相角 2α 만큼 벌어진 \vec{F}_1 , \vec{F}_2 의 合力으로 나타나는 脈動吸引力과, 一定한 吸引力인 $(F_1 + F_2)$ 로 그 吸引力을 表示할 수 있다.

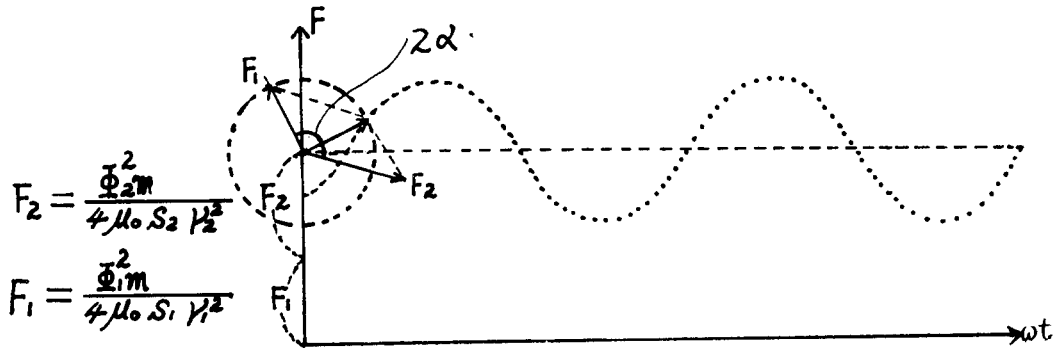


Fig. 4 Fluctuation curve of AC attracting force.

만약 位相角 $\alpha = 90^\circ$ 이고 $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ 이면 脈動吸引力은 相殺되고 그 吸引力은

$$F = \frac{\Phi_{1m}^2}{2\mu_0 S_1 \nu_1^2} = \frac{\Phi_{2m}^2}{2\mu_0 S_2 \nu_2^2} \quad (15)$$

와 같이 된다.

그러나 實際로 式(15)와 같은 理想的인 結果를 얻는 것은 理論적으로 不可能한 일이므로 吸引力의 式에서 脈動吸引力의 要素를 完全히 消去해 버릴 수는 없다. ⁸⁾ Fig. 4의 脈動吸引力曲線에서 騒音의 發生없이 利用할 수 있는 吸引力을 구하려면 平均吸引力 $(F_1 + F_2)$ 에서 脈動吸引力의 振幅 만큼을 빼 주면 된다.

$$\text{즉, } F_0 = F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2 \cos 2\alpha} \quad (16)$$

이다. 여기서 F_0 를 크게 하려면 가능한 한 根號內의 값을 작게 해야 하며 $\alpha = 90^\circ$ 이고 $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ 일 때, 式(14)의 경우와 마찬가지로 式(16)도 式(15)와 같아진다.

따라서 $|\vec{F}_1| / |\vec{F}_2|$ 와 α 가 重要な 뜻을 가지고 있다.

2.2.2 變壓器의 理論에 의한 Shading coil의 解釋

鐵心이 밀착된 狀態에서는 近似的으로 勵磁 Coil을 一次, Shading coil을 二次로 하여 相互 Inductance를 包含하는 磁氣的 結合回路를 構成하는 것으로 볼 수 있다. Shading coil은 단락되어 있고,

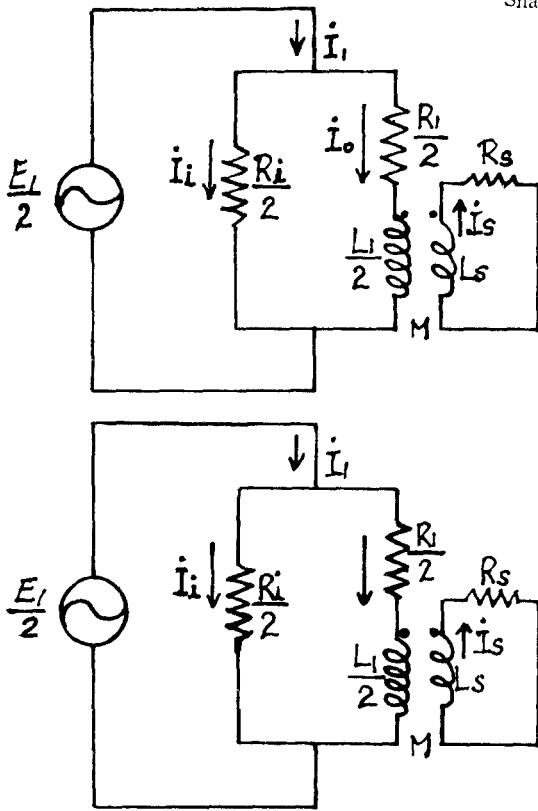


Fig. 5 Equivalent circuit of experimental contactor.

鐵心은 兩脚으로 나누어져 있으므로 Fig. 5와 같이 等價回路를 그릴 수 있다.

그러나 空隙이 넓어지는 경우는 漏洩磁束이 많아져서 이런 等價回路는 생각할 수 없다.⁹⁾

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \frac{R_1(R_1^2 + R_i R_1 + \omega^2 L_1^2)}{(R_i + R_1)^2 + \omega^2 L_1^2} + j \frac{\omega L_1 R_1^2}{(R_i + R_1)^2 + \omega^2 L_1^2} \\ &= R_e + j\omega L_e = R_e + jX_e \end{aligned}$$

$$\dot{Z}_0 = R_1 + j\omega L_1$$

$$= R_1 + jX_1$$

$$\dot{Z}_i = R_i$$

$$\dot{Z}_s = R_s + j\omega L_s$$

$$= R_s + jX_s$$

$\dot{Z}_m = -j\omega M$ 이라고 할 때 다음 式이 成立한다.

$$\frac{\dot{Z}_1}{2} \dot{I}_1 + \dot{Z}_m \dot{I}_s = \frac{\dot{E}_1}{2} \quad (17)$$

$$\frac{\dot{Z}_0}{2} \dot{I}_0 + \dot{Z}_m \dot{I}_s = \frac{\dot{E}_1}{2} \quad (18)$$

$$\dot{Z}_m \dot{I}_0 + \dot{Z}_s \dot{I}_s = 0 \quad (19)$$

式 (17), (19)에서

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{E}_1/2 & \dot{Z}_m \\ 0 & \dot{Z}_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{Z}_1/2 & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_s \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \dot{E}_1 \dot{Z}_s}{\frac{1}{2} \dot{Z}_1 \dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2} \quad (20)$$

이고, 式 (18), (19)에서

$$\dot{I}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{E}_1/2 & \dot{Z}_m \\ 0 & \dot{Z}_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{Z}_0/2 & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_s \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \dot{E}_1 \dot{Z}_s}{\frac{1}{2} \dot{Z}_0 \dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2} \quad (21)$$

$$\dot{I}_s = \frac{\begin{vmatrix} \dot{Z}_1 \dot{E}_1/2 & 1/2 \\ \dot{Z}_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{Z}_0/2 & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_s \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{2} \dot{E}_1 \dot{Z}_m}{\frac{1}{2} \dot{Z}_0 \dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2} \quad (22)$$

가 된다.

一次側에서 본 위 結合回路의 等價 Impedance

$$\dot{Z}_P = \frac{\dot{E}_1/2}{\dot{I}_1} = \frac{\frac{1}{2} \dot{Z}_1 \dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2}{\dot{Z}_s} = \frac{1}{2} \dot{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\dot{Z}_s} \quad (23)$$

이다. 이것은 二次側 Impedance 의 逆數에 $\omega^2 M^2$ 을 곱한 것이 一次側 Impedance 에 더해진 것과 같다.¹⁰⁾

式 (23)을 다시 整理하면

$$\begin{aligned} \dot{Z}_P &= \frac{1}{2}(R_e + j\omega L_e) + \frac{\omega^2 M^2}{R_s + j\omega L_s} \cdot \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s - j\omega L_s} \\ &= \frac{1}{2}R_e + \frac{\omega^2 M^2}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} R_s + j\omega \left(\frac{1}{2}L_e - \frac{\omega^2 M^2}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} L_s \right) \end{aligned} \quad (24)$$

이 되며 $\frac{\omega^2 M^2}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} = q$ 라 두면

$$\dot{Z}_P = \frac{1}{2}R_e + qR_s + j\omega \left(\frac{1}{2}L_e - qL_s \right) \quad (25)$$

가 된다.

따라서 Shading coil이 끼워져 있는 交流電磁石의 消耗電力은

$$P_{AC} = 2 \left[I_1^2 \left(\frac{1}{2}R_e + qR_s \right) \right] \quad (26)$$

이다.

또 一次側인 勵磁 Coil에 의한 磁束 ϕ_0 와 二次側인 Shading coil의 漏洩磁束 ϕ_L 은 다음과 같이 表示할 수 있다.¹¹⁾

$$\phi_0 = \frac{L_1}{2N_1} \dot{I}_0 \quad (27)$$

$$\phi_L = \frac{L'_s}{N_s} \dot{I}_s \quad (28)$$

式 (27), (28)을 利用하여 ϕ_1 과 ϕ_2 를 求하면 다음과 같다.

$$\phi_1 = m \frac{L_1}{2N_1} \dot{I}_0 - \frac{L'_s}{N_s} \dot{I}_s \quad (29)$$

$$\phi_2 = (1-m) \frac{L_1}{2N_1} \dot{I}_0 + \frac{L'_s}{N_s} \dot{I}_s \quad (30)$$

따라서 Shading coil이 끼워진 Fig. 3(a)와 같은 交流電磁石의 吸引力은

$$F_{AC} = \frac{1}{\mu_0 S} \left[\frac{1}{m} \phi_1^2 + \frac{1}{(1-m)} \phi_2^2 \right] \quad (31)$$

이 되며 여기서

$$\sqrt{\frac{(1-m)}{m}} \frac{\phi_1}{\phi_2} = A \angle \alpha \quad (32)$$

라 두면 $A=1$, $\alpha=90^\circ$ 일 때, ϕ_1 과 ϕ_2 가 만드는 吸引力의 크기가 같고, 位相角이 90° 가 되는 가장 理想的인 狀態가 되는 것이다.

2.3 直流 및 交流의 單位消耗電力當 吸引力의 比較

勵磁 Coil을 直流와 交流로 各各 勵磁시킬 때 그 各各의 單位消耗電力當의 吸引力을 서로 比較해 보는 것은 意味있는 일이다.

먼저 直流의 경우를 생각하면 $P_{DC} = I^2 R$ 이므로 單位消耗電力當의 吸引力은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\frac{F_{DC}}{P_{DC}} = \frac{\frac{1}{2} \phi^2 \frac{1}{\mu_0 S}}{I^2 R_1} = \frac{L_1^2}{2\mu_0 S N_1^2 R_1} \quad (33)$$

한편 交流의 경우는 式 (16), (26), (31)에 의하여

$$\frac{F_{AC}}{P_{AC}} = \frac{\frac{1}{m} \phi_1^2 + \frac{1}{1-m} \phi_2^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{m} \phi_1^2\right)^2 + \left(\frac{1}{1-m} \phi_2^2\right)^2} - \frac{2}{m(1-m)} \phi_1^2 \phi_2^2 \cos 2\alpha}{2\mu_0 S \left[I_1^2 \left(\frac{1}{2} R_e + qR_s \right) \right]} \quad (34)$$

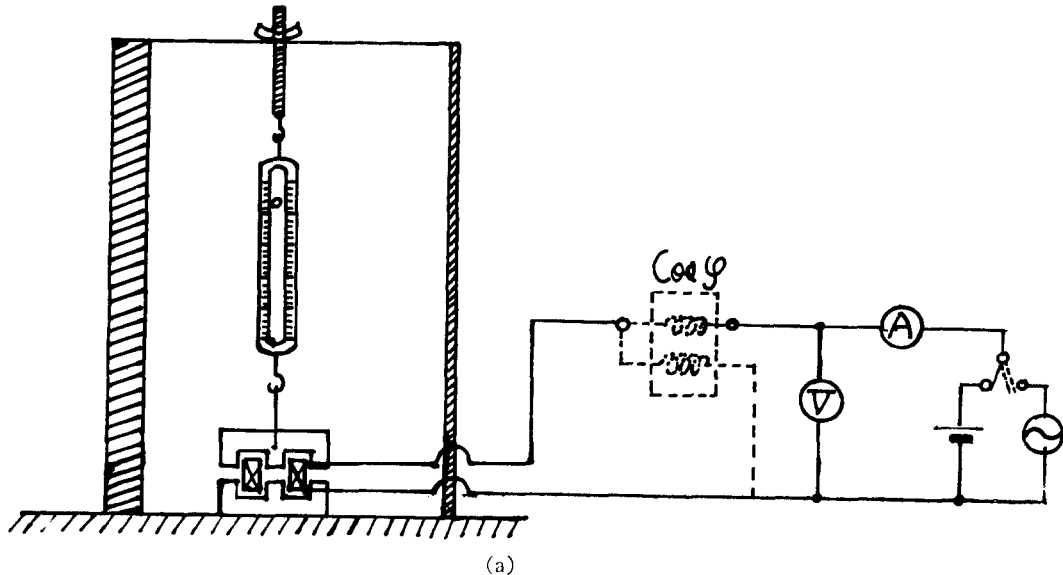
와 같이 된다.

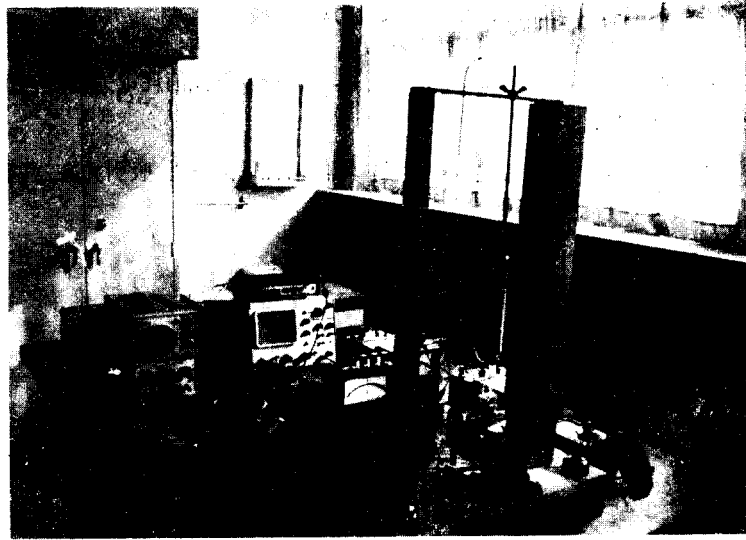
式 (33), (34)를 理論的으로 比較 檢討하기에는 매우 번거로운 形態로 되어 있다. 그래서 交流의 경우에는 電氣의 回路定數들을 實驗으로 測定하고 이들을 利用하여 式 (34)에 의해 그 單位消耗電力當의 吸引力을 求하기로 한다.

3. 實 驗

3.1 實驗裝置 및 方法

實驗對象으로 선정된 하나의 電磁開閉器에 대하여, gap을 變化시키면서 交流의 定格電壓을 가하





(b)

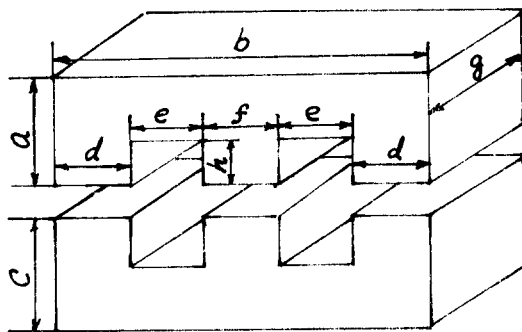
Fig. 6 Explanation of experimental devices

- (a) Principle Arrangement of experimental devices
- (b) Picture of general view

였을 때와 直流電壓을 가하였을 때의 吸引力의 크기를 測定하고, 이 때 흐르는 電流 및 電壓 등을 測定함과 아울러 吸引力의 比較解釋에 必要한 電氣的 回路定數들도 測定하는 實驗이다.

그 實驗裝置의 概略圖 및 外觀은 Fig. 6과 같다. 그림에서 電流計 및 電壓計는 交流 및 直流共通이며 接線부분은 直流의 吸引力 測定時 단락시켰다. 또한 電氣的 回路定數의 測定을 위한 實驗에서는 Oscilloscope, Op Amp, Recorder 등이 使用되었다.

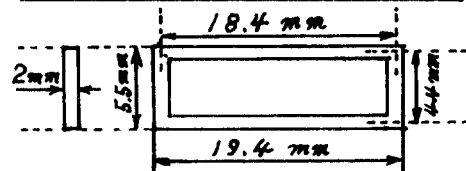
實驗對象으로 選定된 電磁開閉器는 200V用 C-5, A-4, A-4F型이며 鐵心の 크기는 Fig. 7(a)와 같고, 一次捲數는 4150回, 捲線의 굵기는 0.2mm이다. Shading coil의 材質은 Aluminium이며 그 치수는 Fig. 7(b)와 같다.



(a)

Table 1. Measurements of experimental core (mm)

a	b	c	d	e	f	g	h
21.8	49.7	23	7.7	11.5	11	15.3	14.3



(b)

Fig. 7 (a) Dimension of experimental core
(b) Dimension of shading coil

3.2 吸引力의 比較實驗

Fig.6과 같은 實驗裝置를 利用하여 gap을 바꾸어 가면서 實驗한 결과 吸引力曲線은 Fig.8과 같은 그래프로 나타났다.

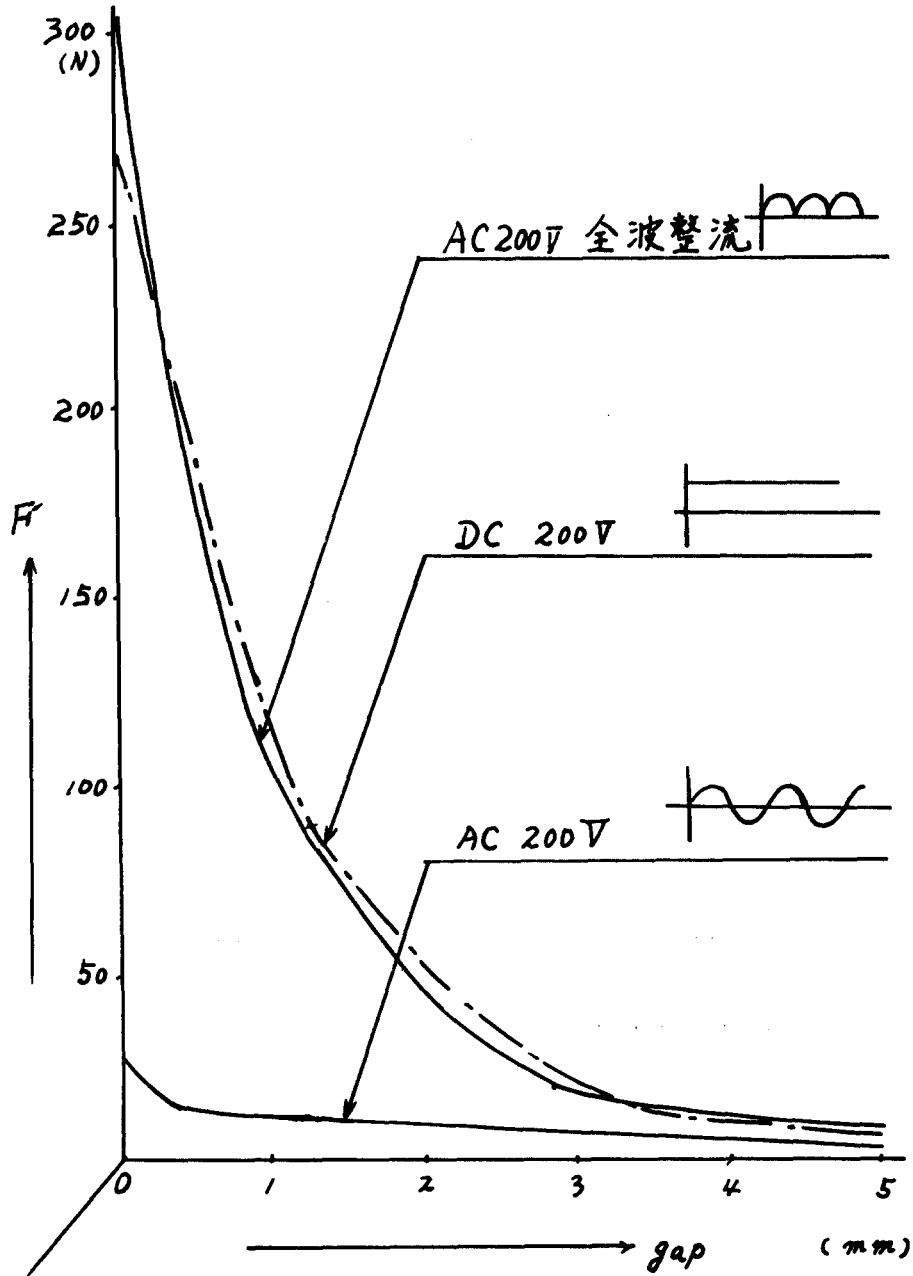


Fig.8 Force/airgap length characteristic of contactor.

그리고 AC 200V電壓을 가했을 때의 各 gap에 대한 電流와 同一한 直流電流를 同一한 gap에 대하여 흘렸을 때의 吸引力曲線은 Fig. 9와 같다.

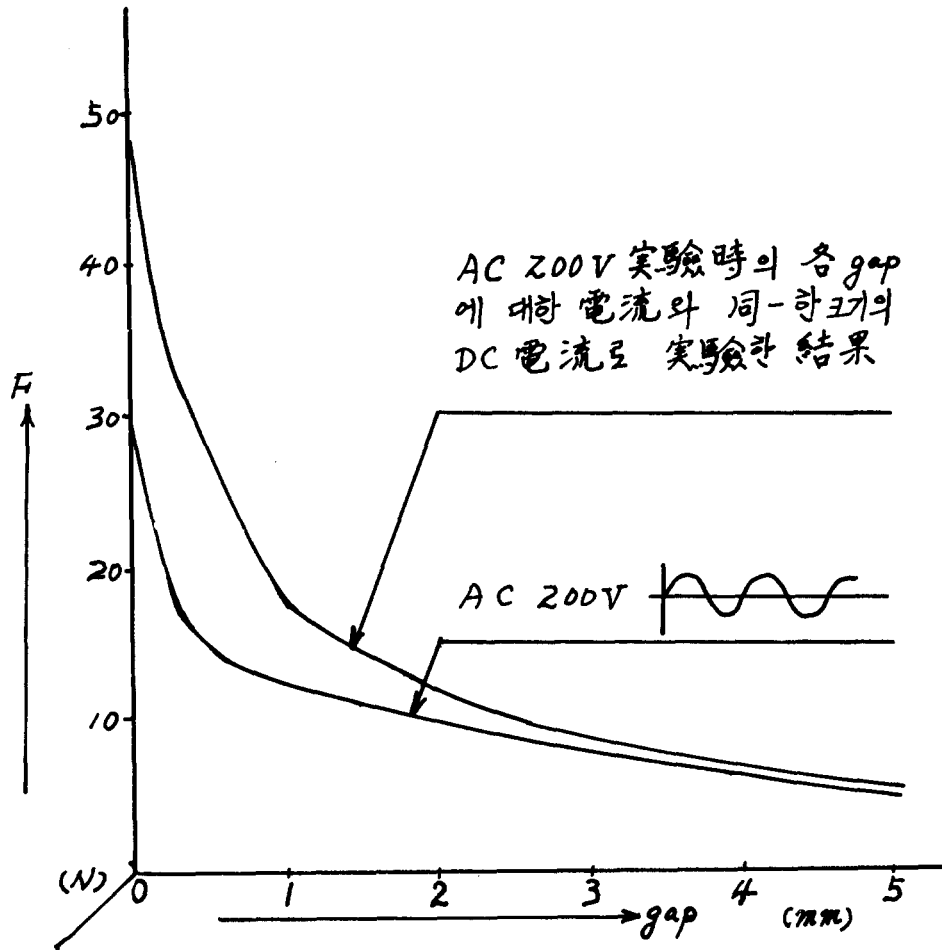


Fig. 9 Force/airgap length characteristic of contactor when supplied with same currents of AC and DC

3.3 電氣的 回路定數의 測定實驗

Fig. 5에 주어진 等價回路上에 나타나는 各種 電氣的 回路定數들을 구하는 實驗이다.

우선 R_1 은 常用狀態 程度의 온도(40°C 정도)를 유지하면서 直接 抵抗計로써 測定하여 420Ω의 값을 얻었다. L_1 을 구하기 위해 Recorder를 使用하여 時定數를 측정한 결과는 Fig. 9와 같고 $L_1=12.18$ henry임을 알았다.

그리고 Mutual Inductance를 구하기 위해 極片에 끼워진 Shading coil을 精巧하게 除去해내고, Fig. 11과 같이 에나멜銅線을 그흠에 並列로 2회씩 감아서 각각 3A의 電流가 흐르도록 하여, 一次側

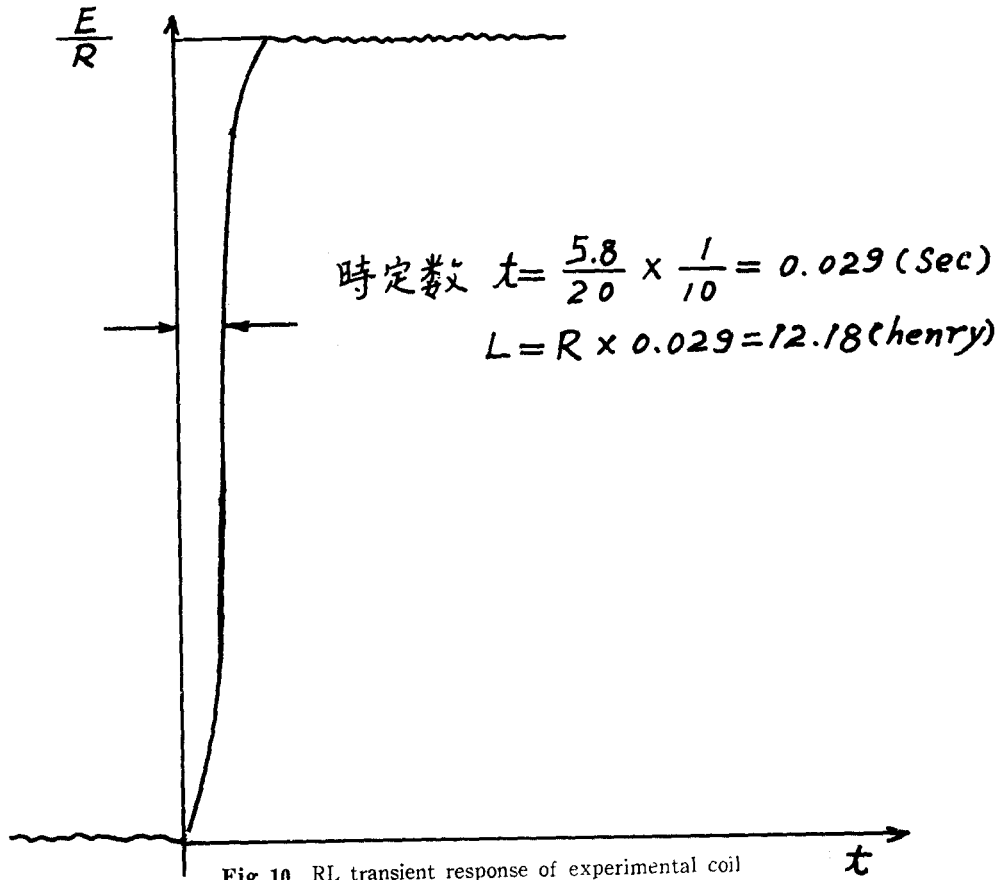


Fig. 10 RL transient response of experimental coil

勵磁 Coil의 電壓을 測定한 結果 4.2V가 나왔다.

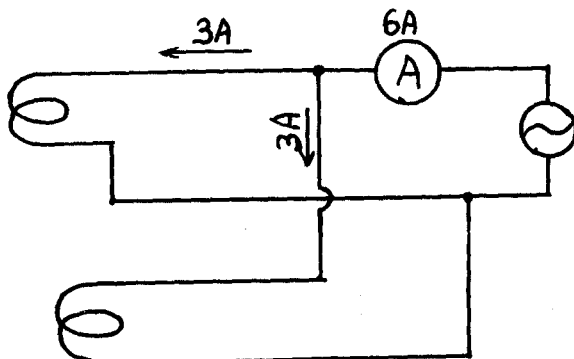


Fig. 11 Experimental circuit for determining mutual inductance

二次捲數는 2회이고 $j\omega MI_2 = E_1$ 이므로

$$M = \frac{4.2/2}{2\pi \times 60 \times 3 \times 2} = 0.9284 \text{ (m henry)} \text{가 된다.}$$

또 I_0 를 알기 위해 이 Shading coil을 除去해 낸 홈의 한쪽에만 에나멜銅線을 2회 감고 一次側에 200V의 電壓을 가했을 때 二次側 電壓은 30mV가 나왔고, 一次側電流 I_1 은 E_1 보다 $59^\circ.2$ 낮은 位相으로 49.6mA가 흘렀다. $E_s = j\omega MI_0$ 에서 M 은 알고 있으므로 I_0 를 구할 수 있으며

$$I_0 = \frac{15}{2\pi \times 60 \times 0.9284} = 42.86 \text{ (mA)} \text{이다.}$$

$\dot{E}_1 = E_1 \angle 0^\circ \text{ (V)}$ 라 할때 \dot{I}_1, \dot{Z}_0 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\dot{I}_0 = 49.60 \angle -59^\circ.2 = 25.39 - j42.60 \text{ (mA)}$$

$$\dot{Z}_0 = 420 + j4591.75 = 4610.92 \angle 84^\circ.8 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Fig. 5에서 $\dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_1}{Z_0}$ 이므로

$$\dot{I}_0 = 42.86 \angle -84^\circ.8 = 3.90 - j42.68(\text{mA}) \text{ 이고}$$

$$\dot{I}_i = \dot{I}_1 - \dot{I}_0 = (25.39 - 3.90) - j(42.60 - 42.68) = 21.49 + j0.08 \approx 21.49 \angle 0^\circ.0(\text{mA}) \text{ 가 된다.}$$

이를 Phasor圖로 나타낸 것이 Fig. 12이다.

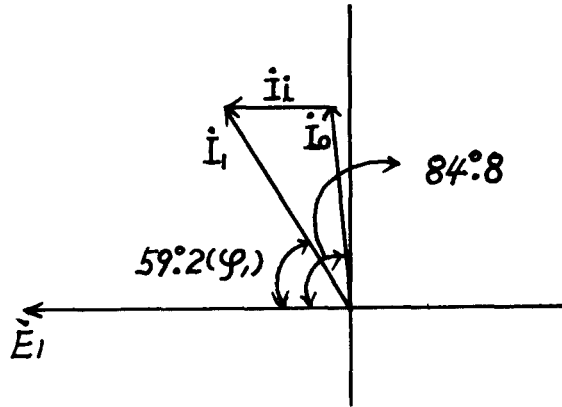


Fig. 12 Phasor diagram for determining iron loss 7(b)에 나타나 있다.

$$\frac{\omega L_s}{R_s} = \tan \varphi_2 = \tan(90^\circ - 33^\circ.7) = \tan 56^\circ.3 = 1.50$$

이므로

$$L_s = \frac{R_s}{\omega} \times 1.50 = \frac{0.006}{2\pi f} \times 1.50 = 0.0238(\text{mH}) \text{ 이며}$$

$$I_s = \frac{E_s}{\sqrt{R_s^2 + (\omega L_s)^2}} = \frac{15 \times 10^{-3}}{(0.006)^2 + \left(\frac{2\pi \times 60 \times 0.0238}{1000}\right)^2} = 1.39(\text{A}) \text{ 가 된다.}$$

그리고 ϕ_L 의 자속분을 만드는 $L's$ 를 實驗으로 實測하는 일은, $L's$ 자체가 미세한 回路要素일 뿐만 아니라 Shading coil 이 磁路要素인 鐵心에 끼워져 있는 상태여서, 매우 어려운 일이다. 여기서는 Mutual Inductance의 概念에 着眼하여 大略 다음과 같이 推定하기로 한다.

鐵心으로 磁路를 構成하고 있을 때 電流와 磁束이 線形關係는 아니나, 一次側磁束 ϕ_0 중 二次側인 Shading coil을 通過하는 磁束을 ϕ_{0s} 라 할 때

$$M = N_s \frac{d\phi_{0s}}{dI_0} \approx N_s \frac{\phi_{0s}}{I_0} \text{ 라 보고 } \phi_{0s} \text{ 를 구하면 } \phi_{0s} = 42.9 \times 0.9284 \times 10^{-6} = 3.983 \times 10^{-5}(\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}) \text{ 이다.}$$

鐵損電流 I_i 가 21.49(mA)이므로 鐵損抵抗

$$R_i = \frac{100}{21.49 \times 10^{-3}} \times 2 = 9311.0(\Omega) \text{ 이 된다.}$$

따라서 Fig. 5와 같은 等價回路의 電力式은 $E_1 I_1 \cos \varphi_1 = I_0^2 R_1 + I_i^2 R_i$ 가 될 것이다.

Shading coil의 R_s 와 L_s 를 구하기 위하여 一次側 勵磁 Coil에 200V를 가하면서 Shading coil의 電壓 \dot{E}_s 와 電流 \dot{I}_s 간의 位相角을 구한 것이 Fig. 13의 Phasor圖이며 Aluminium으로 만들어진 Shading coil의 抵抗算定을 위한 寸수는 Fig.

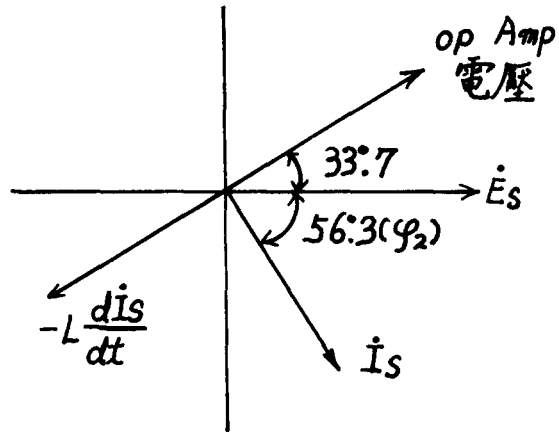


Fig. 13 Diagram for determining phase angle of I_s

$$\phi_0 = \frac{L_1}{2N_1} I_0 = 6.295 \times 10^{-5} (\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}) \text{이므로}$$

$$\frac{\phi_0 - \phi_{0S}}{\phi_0} = \frac{\phi_L}{\phi_S} \text{에서 } \phi_L = \phi_S \times \frac{\phi_0 - \phi_{0S}}{\phi_0} \text{이고 따라서 } L'_S = L_S \times \frac{2.312}{6.295} = 0.009 (\text{mH}) \text{로 推定하였다.}$$

以上の 電氣的 回路定數 測定實驗에 의해 구한 回路要素 및 定數들은 附錄으로 整理하였다.

4. 實驗結果 및 檢討

4.1 吸引力 特性에 關한 比較

前述한 式(33)과 (34)를 利用하여 AC 및 DC吸引力的 特性을 比較해 보는 것이 重要한 일이었으나 그것은 式(34)가 復雜한 關係因數들로 이루어져 있어서 매우 번거로운 일이므로 實驗結果에 依存하여 그 吸引力의 特性을 比較하였다.

Fig. 8에 나타난 結果에서 直流의 경우 그 吸引力은 交流의 그것에 비해 대단히 크며 특히 gap이 작을수록 懸隔한 吸引力의 差를 보여준다. 그러나 그 電流 또한 대단히 커서 鐵心은 磁氣飽和가 이미 일어난 상태가 되어, Fig. 8을 利用하여 單位消耗電力當의 吸引力 特性曲線을 그리는 것은 별 意味가 없다. 또 直流勵磁의 경우, 吸引力이 交流의 그것에 비해 현저히 크다 해도 電流의 크기를 고려하지 않으면 그 吸引力은 Coil의 지나친 發熱로 因하여 利用하기에 不適當하다.

그래서 AC 200V의 電源으로 勵磁하여 實驗했을 때의 各 gap에 對한 電流와 同一한 크기의 電流를 直流로 흘려서 實驗한 Fig. 9를 利用하여, 몇가지 다른 形態의 吸引力 特性曲線을 그려서 이를 比較檢討하고자 한다.

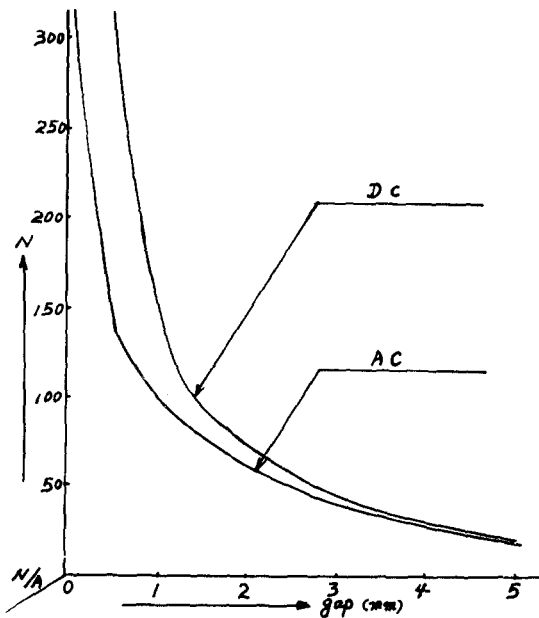


Fig. 14 Attracting force per unit ampere/airgap length characteristic of contactor.

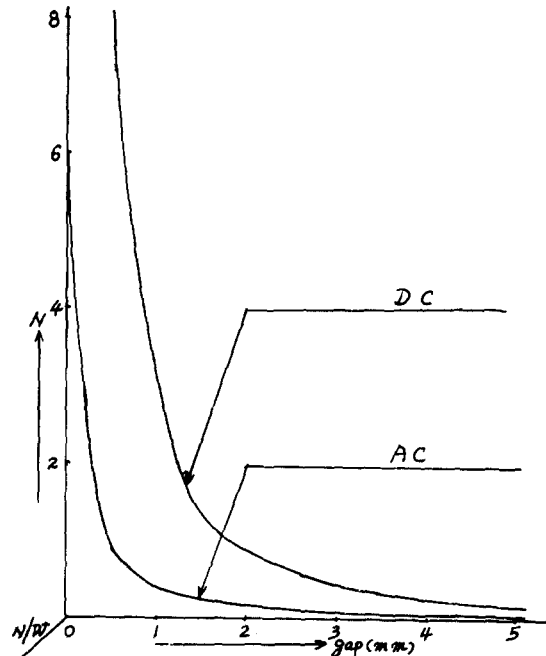


Fig. 15 Attracting force per unit wattage/airgap length characteristic of contactor

Fig. 14는 Fig. 9의 結果를 利用하여 單位電流當의 吸引力을 각 gap에 對하여 나타낸 것이며 Fig. 15는 각 gap에 對한 單位消耗電力當의 吸引力을 그려 본 것이다.

Fig. 14, 15에서 보듯이 吸引力 實測의 結果는 單位電流 및 單位消耗電力當 吸引力 둘다 直流의 경우가 有利한 것으로 드러났다. 이는 交流勵磁의 경우 電磁開閉器에 必然的으로 存在하는 鐵損 때문에 消耗되는 電流가 있어서, 吸引力 發生에 有效한 電流가 減少하는데 그 原因이 있다. 또 gap이 작을때 吸引力의 差가 顯著한 것을 보아, 直流의 吸引力은 鐵心이 密着된 狀態일때 交流의 그것보다 훨씬 크다는 점이 特記할 事實이라 할 수 있다.

鐵心이 밀착된 상태일 때의 單位消耗電力當 吸引力은, 實驗에서 구한 電氣的 回路定數들을 式(33)과 (34)에 代入하여 구할 수가 있다. 그러나 모든 gap에 대한 吸引力을 式(33), (34)에 의해 구할 수는 없다.

먼저 式(33)에 의해 直流의 單位消耗電力當 吸引力을 계산해 보면

$$\begin{aligned} \frac{F_{DC}}{P_{DC}} &= \frac{L_1^2}{2\mu_0 S N_1^2 R_1} \\ &= \frac{(12.18)^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.9 \times 15.3 \times 10^{-6} \times 2 \times 4150^2 \times 420} \\ &= 45.2(\text{N/W}) \text{이 된다.} \end{aligned}$$

그리고 交流의 單位消耗電力當 吸引力은 附錄의 값을 利用하면 式(34)에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{F_{DC}}{P_{AC}} &= \frac{\frac{1}{m} \phi_1^2 + \frac{1}{1-m} \phi_2^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{m} \phi_1^2\right)^2 + \left(\frac{1}{1-m} \phi_2^2\right)^2} - \frac{2}{m(1-m)} \phi_1^2 \phi_2^2 \cos 2\alpha}{2\mu_0 S \left[I_1^2 \left(\frac{1}{2} R_e + qR_s \right) \right]} \\ &= \frac{15.55 + 4.61 - \sqrt{(15.55)^2 + (4.61)^2} - 2 \times 15.55 \times 4.61 \times \cos 46^\circ}{2.51} \\ &= 2.93(\text{N/W}) \text{이 된다.} \end{aligned}$$

鐵心이 密着된 狀態일때의 實驗結果에 의하면 $\frac{F_{DC}}{P_{DC}} = 48.3(\text{N/W})$, $\frac{F_{AC}}{P_{AC}} = 6.00(\text{N/W})$ 으로 直流의 境遇가 交流의 境遇보다 約 8배나 크게 나왔다. 交流의 경우 吸引力 實測值가 式(34)에 의한 값보다 훨씬 큰 것은 實驗時에 平均 吸引力을 測定했기 때문이다. 實際로 利用可能한 無騒音 吸引力을 實測하는데는 推定에 의한 誤差가 介入될 수 있으며 또 그 吸引力도 작아서 實測에 不適合했다. 式(34)에서 根號內의 部分을 除外하고 平均吸引力에 대하여 求한 값 $\frac{F_{AC}}{P_{AC}} = 8.03(\text{N/W})$ 은 實測值와 비슷함을 알 수 있다.

4.2 電磁開閉器의 設計上の 改良에 關한 檢討

實驗에서 구한 電氣回路의 諸定數를 利用하면 式(29)(30)으로부터 $\frac{1}{\sqrt{m}} \phi_1$ 과 $\frac{1}{\sqrt{1-m}} \phi_2$ 의 크기 및 位相角을 구할 수 있다. 이를 다시 式(32)에 代入하여 電磁開閉器의 設計上の 改良에 關하여 檢討하고자 한다.

먼저 式(21), (22)에 의한 \dot{I}_1 , \dot{I}_s 를 式(29), (30)에 代入하여 ϕ_1 과 ϕ_2 를 구할 수 있으므로 다음

두 式을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\phi_1 = \frac{\dot{E}_1/2}{\frac{1}{2}\dot{Z}_0\dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2} \left[\sqrt{m} \frac{L_1}{N_1} \dot{Z}_s + \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{L'_s}{N_2} \dot{Z}_m \right] \quad (35)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-m}}\phi_2 = \frac{\dot{E}_1/2}{\frac{1}{2}\dot{Z}_0\dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2} \left[\sqrt{1-m} \frac{L_1}{N_1} \dot{Z}_s - \frac{1}{\sqrt{1-m}} \frac{L'_s}{N_2} \dot{Z}_m \right] \quad (36)$$

式 (35), (36)을 다시 整理하면

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\phi_1 = \frac{\dot{E}_1/2}{\frac{1}{2}\dot{Z}_0\dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2} \left[\sqrt{m} \frac{L_1}{N_1} R_s + j\omega \left\{ \sqrt{m} \frac{L_1}{N_1} L_s - \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{L'_s}{N_2} M \right\} \right] \quad (37)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-m}}\phi_2 = \frac{\dot{E}_1/2}{\frac{1}{2}\dot{Z}_0\dot{Z}_s - \dot{Z}_m^2} \left[\sqrt{1-m} \frac{L_1}{N_1} R_s + j\omega \left\{ \sqrt{1-m} \frac{L_1}{N_1} L_s + \frac{1}{\sqrt{1-m}} \frac{L'_s}{N_2} M \right\} \right] \quad (38)$$

와 같이 된다.

式 (37), (38)에서 볼 때 式(32)에서 言及한 $A \angle \alpha$ 의 α 가 90° 에 가깝게 커지려면 式 (37)의 虛數部가 (-)로 되면 좋다. 그러기 위해서는 m 이 작아야 하며 따라서 可能한 한 S_1 이 작을수록, S_2 는 클수록 좋다. 그러나 L'_s 와 M 은 서로 相反되는 要素여서 어느 한 쪽만을 크게 해야 한다고 말할 수 없다. 또한 式 (37), (38)에서 A 가 1이 되는 關係式을 求하여도 별 意味가 없다. 여기서는 實驗에서 구한 값을 利用하여 그 結果를 檢討하기로 한다.

附錄의 ϕ_1 및 ϕ_2 와 m 의 값을 式 (32)에 代入하면

$$\frac{\sqrt{0.542}}{\sqrt{0.458}} \cdot \frac{4.02 \times 10^{-5} \angle -76^\circ.2}{2.38 \times 10^{-5} \angle -99^\circ.3} = 1.837 \angle 23^\circ.1 \text{ 이 되어 } A=1.837, \alpha=23^\circ.1 \text{ 으로 나타}$$

났다.

따라서 實驗에 使用된 電磁開閉器는, 그 設計上으로 볼 때 A 의 값은 어느 程度 良好한 편이라 할 수 있으나 ϕ_1 과 ϕ_2 의 位相角 α 의 값이 너무 작으므로, Shading coil에 의해 脈動吸引力을 줄여주는 役割이 滿足스럽지 못함을 알 수 있으며, 이로 因해서 式 (34)에 의한 結果와 實測한 平均 吸引力에 의한 結果와는 큰 差가 있었던 것이다.

5. 結 論

지금까지 AC電磁石의 Shading coil에 關한 理論의 解釋方法을 밝히고, DC電磁石의 吸引力 計算式과 함께 Shading coil이 끼워진 AC電磁石의 吸引力 計算式을 誘導하여, 이 式에 의한 計算結果를 實驗結果와 比較함으로써 그 理論式의 妥當性을 立證하였고, 아울러 電磁開閉器의 設計上 改良하여야 할 점에 關하여도 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

1) 交流勵磁의 境遇, 電磁開閉器에 必然的으로 存在하는 鐵損으로 因하여, 吸引力 發生에 有効한

電流가 減少하고 따라서 直流勵磁의 境遇에 비하여 吸引力이 떨어진다.

2) AC와 DC의 單位消耗電力當 吸引力을 理論的으로 直接 比較하기는 번거로우나 實測實驗에서 直流의 境遇가 훨씬 有利한 것으로 나타났다. 特히 gap이 작을수록 直流의 境遇가 顯著하게 큰 힘을 내며 鐵心이 密着된 狀態에서는 直流의 境遇가 交流의 境遇보다 約 8倍나 큰 힘을 보여 주었다.

3) 鐵心이 密着된 狀態에서의 式(33)에 의한 直流의 單位消耗電力當 吸引力은 實測吸引力의 境遇와 거의 一致하고 있으나, 式(34)에 의한 交流의 그것은 實測 吸引力의 境遇에 비해 현저히 작은 것으로 나타났다. 그 原因은 實測 吸引力이 平均吸引力인데 對하여 式(34)의 吸引力은 利用 가능한 無驗音吸引力이기 때문이다. 만약 式(34)에서 根號部分을 除外하고 平均吸引力에 對하여 計算하면 그 結果는 實測吸引力의 境遇와 거의 一致하므로 式(33)과 (34)는 妥當性을 가진다고 볼 수 있다.

4) 實驗對象으로 選定된 電磁開閉器를 式(32)에 의해 設計上의 觀點에서 檢討한 結果, A의 값은 어느 程度 良好한 편이나 α 가 작아서, 實驗對象의 Shading coil이 脈動吸引力을 滿足스럽게 消除해 주지 못하고 있음을 보여 주었으며, 電磁開閉器의 改良에 關하여는 이 A와 α 의 값을 適切히 갖도록 考慮해야 할 것이다.

參 考 文 獻

1. E.A. LOEW ; Direct and Alternating Currents, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 4th Ed., 1954, pp.85~89.
2. C.L. DAWES ; Electrical Engineering, Vol. 1, Direct Currents, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York 4th Ed., 1952, pp.310~311.
3. 日本電氣學會 ; 電氣工學 Hand Book, 電磁石과 吸引力, 東京, 1967, pp.760~762.
4. Gordon R. Slemon ; Magnetolectric Devices, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966, pp.64~68.
5. 前掲書 1) pp.71~73.
6. 李成馥·盧彰注 ; 韓國海洋大學 論文集, Vol.14, p.10(1979)
7. 石黑敏郎外 2名 ; 交直 マグネットの設計と應用, オーム社, 東京, 1969, pp.102~104.
8. 前掲書 7) pp.108~109.
9. 前掲書 4) pp.168~178.
10. H. Alex Romanowitz ; Introduction to Electric Circuits, University of Kentucky, 1971, pp.477~482.
11. 前掲書 10) pp.251~255.

附 錄

Fig. 5에서의 回路要素들과 各種 定數 및 係數, 그리고 ϕ_0 , ϕ_L , ϕ_1 , ϕ_2 및 α 는 다음과 같다.

$$\dot{E}_1 = E_1 \angle 0^\circ = 200 \angle 0^\circ \quad (\text{V})$$

$$\dot{Z}_1 = 2024.32 + j3438.35 = 3990.0 \angle 59^\circ.5 \quad (\Omega)$$

$$\dot{Z}_0 = 420 + j4591.75 = 4610.92 \angle 84^\circ.8 \quad (\Omega)$$

$$\dot{Z}_s = 0.006 + j0.009 = 0.0103 \angle 56^\circ.3 \quad (\Omega)$$

$$\dot{Z}_m = -j0.35 = 0.35 \angle -90^\circ.0 \quad (\Omega)$$

$$\dot{I}_1 = 25.39 - j42.60 = 49.6 \angle -59^\circ.2 \quad (\text{mA})$$

$$\dot{I}_0 = 3.90 - j42.68 = 42.9 \angle -84^\circ.8 \quad (\text{mA})$$

$$\dot{I}_i = 21.49 + j0.08 = 21.49 \angle 0^\circ.0 \quad (\text{mA})$$

$$\dot{I}_s = -0.772 + j1.156 = -1.390 \angle -56^\circ.3 \quad (\text{A})$$

$$\dot{E}_s = -15 = -15 \angle 0^\circ.0 \quad (\text{mA})$$

$$R_e = 2024.32 \quad (\Omega) \quad R_1 = 420 \quad (\Omega)$$

$$R_i = 9311.0 \quad (\Omega) \quad R_s = 0.006 \quad (\Omega)$$

$$L_e = 9.12 \quad (\text{H}) \quad L_1 = 12.18 \quad (\text{H})$$

$$L_s = 0.0238 \quad (\text{mH}) \quad L'_s = 0.009 \quad (\text{mH})$$

$$M = 0.9284 \quad (\text{mH})$$

$$q = \frac{\omega^2 M^2}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2} = \frac{0.1225}{1.165 \times 10^{-4}} = 1051.5$$

$$m = \frac{a}{a+b} = \frac{2.7}{5.9} = 0.458, \quad 1-m = \frac{b}{a+b} = 0.542$$

$$S = 5.9 \times 15.3 \times 10^{-8} \quad (\text{m}^2)$$

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{L_1}{2N_1} \dot{I}_0 = (1.467 \times 10^{-6})(3.90 - j42.68) \\ &= (5.72 - j62.61) \times 10^{-6} \\ &\doteq 6.293 \times 10^{-5} \angle -90^\circ \end{aligned} \quad (\text{N} \cdot \text{m/A})$$

$$\begin{aligned} \phi_L &= \frac{L'_s}{N_s} \dot{I}_s = (9 \times 10^{-6}) \times (-0.772 + j1.156) \\ &= -(6.948 - j10.40) \times 10^{-6} \\ &= -(1.25 \times 10^{-5}) \angle -56^\circ.3 \end{aligned} \quad (\text{N} \cdot \text{m/A})$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= m \frac{L_1}{2N_1} \dot{I}_0 - \frac{L'_s}{N_s} \dot{I}_s \\ &= 0.458 \times (5.72 - j62.61) \times 10^{-6} + (6.948 - j10.40) \times 10^{-6} \\ &= (9.568 - j39.08) \times 10^{-6} \\ &= 4.02 \times 10^{-5} \angle -76^\circ.2 \end{aligned} \quad (\text{N} \cdot \text{m/A})$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= (1-m) \frac{L_1}{2N_1} \dot{I}_0 - \frac{L'_s}{N_s} \dot{I}_s \\ &= 0.542 \times (5.72 - j62.61) \times 10^{-6} - (6.948 - j10.40) \times 10^{-6} \\ &= -(3.348 + j23.53) \times 10^{-6} \\ &= 2.38 \times 10^{-5} \angle -99^\circ.3 \end{aligned} \quad (\text{N} \cdot \text{m/A})$$

$$\alpha = 23^\circ.1$$