平板内의 直線 Crack tip 에서의 應力擴大係數에 關한 研究

(A Study of Stress Intensity Factors at the Crack tips in a Finite Plate)

趙 宣 彙* · 曺 喜 福**

Abstract

In this paper, the stress intensity factors at the crack tips in a finite plate having a straight crack with arbitrary lengths and directions are analyzed by means of Boundary Collocation Method in Cartesian coordinates under the following two cases.

A) Case of only considering stress components at the boundary collocation points

B) Case of considering the stress resultant at the boundary, in addition to case of (A)

and analyzed by means of F. E. M.

To certify the Boundary Collocation Method, the solutions of B. C. M. are compared with the solutions of F. E. M. and M. Isida on the infinite plate.

Consequently, B. C. M. demonstrates the simplicity of input data preparation and the reduction of cpu time against F. E. M.

目　次

記　號

C_n, d_n ; 복소수 常數

x_1, x_2 ; 平板의 直角座標

x, y ; Crack 의 直角座標

U_1, U_2 ; x_1, x_2 方向의 變位 成分

U, v ; x, y 方向의 變位 成分

$Z = x_1 + i x_2$ (or $Z = x + iy$) ; 복소수 變數

B_1 ; Crack 의 境界(Contour of crack)

E ; 彈性 係數

$F_1(z), F_2(z)$; 복소수 多項式(Complex Polynomials)

K_I, K_{II} ; 應力擴大係數(Stress intensity factors for opening(or symmetric) and sliding(or skew-symmetric) modes of crack surface displacements)

$U(x_1, x_2)$ (or $U(x, y)$) ; Airy's 應力函數

* 서울大學校 工科大學
** 서울大學校 大學院

μ ; Shear modulus

ν ; Poisson's ratio

σ_{ij} ; 應力 成分(i, j =1, 2 or x, y)

$\phi(z)$, $\psi(z)$; 복소수 應力函數(Complex potentials)

β ; 平板 座標系(x_1, x_2)에 對한 Crack 座標系(x, y)의 回轉角度(時計方向)

N, T ; 平板 境界에 垂直과 水平으로 作用하는 Stress resultant.

2a ; Crack 길이

2d ; 平板의 폭

2h ; 平板의 길이

n, s ; 바깥 境界의 座標(Surface coordinates)

1. 序 論

바깥 境界에서 單純 引張力을 받는 有限 平板에 對하여, 平板內部에 應力이 없는 임의의 크기와 方向을 갖는 直線 crack이 있는 경우, crack tip에서의 應力擴大係數(stress intensity factor)를 복소수 應力函數의 power series를 使用한 境界 配列法(Boundary Collocation Method)으로 求하는 한편, 또한 有限 要素法을 使用하여 應力擴大係數의 값을 求하도록 試圖하였다.

이때 power series를 使用하여 境界配列法으로 求한 解를 確認하기 爲하여 M. Isida가 Laurent's expansion을 使用하여 無限平板에 對하여 求한 解[1]와 比較하였다.

內部에 直線 crack을 갖는 平板에 있어서 crack tip에서의 應力擴大係數(stress intensity factors)에 對한 解析은 Irwin, G. R.[2], Paris, P. C. and Sih, G. C.[3], Vooren, J. V.[4], Kobayashi, A. S.[5], Isida, M.[6] 等에 依하여 이루어졌지만 이들은 모두 Symmetric한 crack을 갖는 平板에 對하여 解析하였다.

本 論文에서는 Muskhelishvili, N. I.[7]의 理論을 根據로 하여 直線 crack을 갖는 有限 平板의 應力擴大係數에 對한 a/d(平板의 폭에 對한 crack 길이의 比), β(荷重 方向에 對한 crack의 기울기), h/d(平板의 폭에 對한 平板 길이의 比)等의 영향을 考察하기 위하여 복소수 應力函數의 power series에 依한 境界 配列法을 使用하였다. 한편 이 값들을 M. Isida가 복소수 應力函數의 Laurent's expansions을 使用하여 symmetric한 直線 crack을 갖는 無限 平板에 對하여 求한 解와 比較하였다.

또한, 應力 解析에 많이 利用하는 有限 要素法에 依하여 crack tip부근에서의 應力值를 求한 다음, 應力值와 應力擴大係數와의 關係式[8]을 使用하여 crack tip에서의 應力擴大係數 값을 求하였으며, 이 값을 境界 配列法으로 求한 값과 比較하였다.

2. 數學的 解析

2-1 一般的 應力函數

一般的 2次元 彈性問題에 있어서 體力 (body force)과 溫度 變化를 무시한다면 평형방정식과 適合條件式은

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\times\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0\\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,\ a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22})=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,\ b)$$

Airy's 應力函數 $U(x_1, x_2)$를 도입한 關係式은

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}&=\frac{\partial^2U(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\\ \sigma_{22}&=\frac{\partial^2U(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\\ \sigma_{12}&=-\frac{\partial^2U(x_1,x_2)}{\partial x_1,\partial x_2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,\ c)$$

위의 式들로부터 Airy's stress function $U(x_1, x_2)$는 다음과 같은 Biharmonic 函數의 解로 된다.

$$\Delta^4U=\frac{\partial^4U}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4U}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+\frac{\partial^4U}{\partial x_2^4}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1,\ d)$$

2-2 복소수 應力函數

應力 成分 σ_{ij}와 analytic 한 복소수 應力 函數 $\phi(z)$, $\psi(z)$와의 關係式은 다음과 같다.[7]

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=2\left[\phi(z)+\overline{\phi(z)}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}2, a)$$

$$-\sigma_{11}+\sigma_{22}+i2\sigma_{12}=2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z)-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\right] \cdots\cdots (2\text{-}2, b)$$

또한, 變位 成分 U_1, U_2와의 關係式은

$$2\mu(u_1+iu_2)=k\int_0^z \phi(z)\,dz-\int_0^{\bar{z}}\Omega(\bar{z})\,d\bar{z}-(z-\bar{z})\phi(z) \cdots\cdots (2\text{-}2, c)$$

와 같다. 여기서

$$\bar{\Omega}(z)=\psi(z)+\left[z\phi(z)\right]' \cdots\cdots (2\text{-}2, d)$$

$=3-4\nu$ (for plane strain)

$$\kappa=\frac{3-\nu}{1+\nu} \text{ (for plane stress)}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

2-3 直線 Crack 이 있는 경우

Fig. 1과 같이 平板內部에 直線 crack이 있는 경우에 복소수 應力函數 $\phi(z)$, $\Omega(z)$는 아래와 같은 模樣으로 취할 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}\phi(z)&=F_1(z)G(z)+F_2(z)\\ \Omega(z)&=F_1(z)G(z)-F_2(z)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2\text{-}3, a)$$

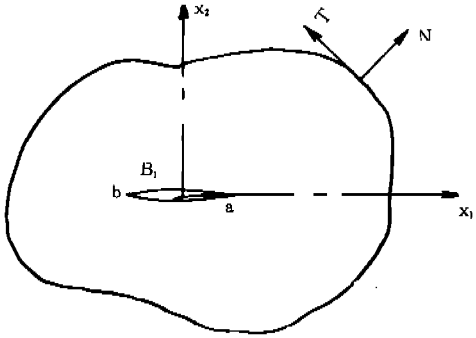

Fig. 1. Finite plate with interior crack

여기서

$$\left.\begin{aligned}F_1(z)&=C_0+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots\cdots+C_nz^n+\cdots\cdots\\ F_2(z)&=d_0+d_1z+d_2z^2+d_3z^3+\cdots\cdots+d_nz^n+\cdots\cdots\\ G(z)&=\left[(z-a)(z+d)\right]^{-1/2}\end{aligned}\right\} (2\text{-}3, b)$$

C_i, d_i는 임의의 복소수 常數이며 $x_1=a$ 에서 $x_2=-b$ 까지 x_1 축상에서 Branch cut 를 갖도록 함수 $G(z)$를 위와 같이 定義한 것이다.

2-4 境界 條件

1) 一般的인 境界 條件

有限 平板에서의 境界 條件은 一般的으로 다음과 같이 3가지 경우로 주어질 수 있고,

i) U와 $\frac{\partial U}{\partial n}$의 값이 주어지는 경우

ii) $\frac{\partial U}{\partial n}$와 $\frac{\partial U}{\partial s}$의 값이 주어지는 경우

iii) $\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$와 $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$의 값이 주어지는 경우

여기서는 (iii)의 경우를 使用하였다.

2) 應力에 對한 境界 條件

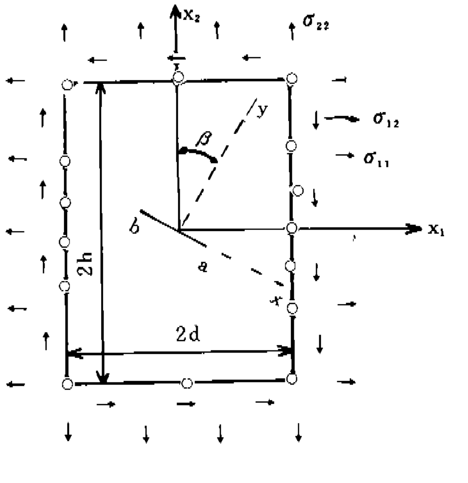

Fig. 2. Slant cracked rectangular plate and collocation points.

Fig. 2와 같이 直角 平板의 바깥境界에서의 應力값이 주어졌으므로 應力函数 條件式(2-2, a) (2-2, b)를 使用한다.

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=2\left[\phi(z)+\overline{\phi(z)}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}2,\ a)$$

$$-\sigma_{11}+\sigma_{22}+i2\sigma_{12}=2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z)-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}2,\ b)$$

그런데, crack 座標(x, y)와 平板 座標(x_1, x_2)에서의 應力 關係式은 다음과 같다.[11]

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=\sigma_{11}+\sigma_{22}=2\left[\phi(z)+\overline{\phi(z)}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ a)$$

$$\begin{aligned}-\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+i2\sigma_{xy}&=(-\sigma_{11}+\sigma_{22}+i\sigma_{12})e^{-2i\beta}\\&=2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z)-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\right] \cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ b)\end{aligned}$$

여기서 변수 z의 값은 $z=x_1+ix_2$로 부터 $z=x+iy$로 바뀌었으며 이 때, x_1, x_2와 x, y 와의 關係式은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1\cos\beta-x_2\sin\beta\\y&=x_2\cos\beta+x_1\sin\beta\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ c)$$

위의 式(2-4, a)와 (2-4, b)로부터

i) (2-4, a)+(2-4, b)에 依하여

$$\begin{aligned}2(\sigma_{xx}+i\sigma_{xy})&=2\left[\bar{\phi}(z)+(\bar{z}-z)\phi'(z)+\bar{\Omega}(z)\right]\\&=(\sigma_{11}+\sigma_{22})+(-\sigma_{11}+\sigma_{22}\\&\quad+i2\sigma_{12})e^{-2i\beta} \cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ d)\end{aligned}$$

ii) (2-4, a)−(2-4, b)에 依하여

$$\begin{aligned}2(\sigma_{xx}-i\sigma_{xy})&=2\left[2\phi(z)+\bar{\phi}(z)+(\bar{z}-z)\phi'(z)\right.\\&\quad\left.-\bar{\Omega}(z)\right]\\&=(\sigma_{11}+\sigma_{22})-(-\sigma_{11}+\sigma_{22}\\&\quad+i2\sigma_{12})e^{-2i\beta} \cdots\cdots (2\text{-}4,\ e)\end{aligned}$$

또한 應力 成分의 다른 境界 條件은 stress resultant N, T를 使用한 다음과 같은 條件式이 된다.[9]

$$\begin{aligned}2(N-iT)&=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}-(-\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\\&\quad+i2\sigma_{xy})e^{2i\beta} \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ f)\end{aligned}$$

式(2-4, f)는 式(2-4, a)와 (2-4, b)로부터 應力函数 $\phi(z)$, $\Omega(z)$를 使用하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}2(N-iT)&=2\left[\phi(z)+\overline{\phi(z)}\right]\\&=2\left[(\bar{z}-z)\phi'(z)-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\right]e^{2i\beta}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ g)\end{aligned}$$

여기서 N은 境界 변에 作用하는 合成 應力(stress resultant)의 수직 성분이며, T는 接線方向의 成分이다. 그리고, β는 N과 x축과의 角度를 表示한다.

3) 變位에 對한 境界 條件

앞 절(2-2)의 式(2-2, c)로부터 crack 座標系 x, y)에서의 變位 成分 u, v는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}2\mu(u+iv)&=k\int_0^z\phi(z)\,dz\\&\quad-\int_0^{\bar{z}}\Omega(\bar{z})\,d\bar{z}-(z-\bar{z})\phi(z)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ h)\end{aligned}$$

여기서

$z=x+iy$이다.

Fig. 1에서와 같이 Doubly-connected region에서의 (2-4, h)의 값은 multi-valued이기 때문에 이 變位 成分이 single-valuedness가 되기 爲해서는 다음과 같은 條件式을 滿足하여야 한다.

$$k\oint_{B_1}\phi(z)\,dz-\oint_{B_1}\Omega(\bar{z})\,d\bar{z}=0 \cdots\cdots\cdots (2\text{-}4,\ i)$$

여기서 B_1은 crack 주위의 contour을 表示한다.

3. 境界 配列 過程

境界 配列 過程은 Fig. 2에서와 같이 有限 平版의 변(edge)을 따라 境界 條件이 주어졌을 때, 거의 등간격으로 여러 점을 취하여 그 点에서의 荷重 값과 座標 값을 應力 函数(2-4, d)와(2-4, e), 그리고 變位의 single-valuedness 條件式 (2-4, h)에 代入하여 미지의 복소수 常数 C_i, d_i를 미지수로 갖는 nonhomogeneous 연립 방정식을 만든다.

이 연립 方程式으로부터 복소수 常数 C_i, d_i의 값을 求한 다음, 아래와 같은 式에 代入하여 crack tip에서의 應力擴大係数를 求한다.[8]

$$K_I - iK_{II} = (8\pi)^{1/2} \lim_{z \to z_1} (z - z_1)^{1/2} \phi(z) \quad \cdots\cdots (3-a)$$

여기서 z_1은 crack tip에서의 座標값을 나타낸다.

만약 $z_1 = a$ 라면

$$K_I - iK_{II} = \left(\frac{8\pi}{a+b}\right)(C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + \cdots\cdots + C_n a^n + \cdots\cdots) \cdots\cdots (3-b)$$

이 方法은 配列하는 点의 数, 즉 함수 $F_1(z)$, $F_2(z)$의 次数를 増加시키면 시킬수록 正確度가 増加하지만 어느 정도 以上이면 一定한 값을 유지하게 된다.

本 論文에서는 함수 $F_1(z)$, $F_2(z$의 次数를 다음과 같이 定하여 解析하였다.

$$F_1(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots\cdots C_9 z^9 \cdots\cdots (3-c)$$

$$F_2(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots\cdots + d_8 z^8 \cdots\cdots (3-d)$$

그리고, $\sigma_{22} = 1000\,(kg/cm^2)$, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ 인 單純 引張의 荷重 條件을 갖는 치수가 6×12 (cm)와 10×15 (cm)인 直角 平板에 對하여 解를 求하였다.

복소수 변수 z가 무한히 커질 때, $\phi(z)$와 $\Omega(z)$가 有限 값을 갖기 爲해서는 式(2-3, a)로 부터,

$$F_1(z) = C_0 + C_1 z, \quad F_2(z) = d_0 \cdots\cdots (3-e)$$

그러므로 $z \to \infty$일때 함수 $\phi(z)$, $\Omega(z)$는 다음과 같다.

$$\phi(z) = C_1 + d_0, \quad \Omega(z) = C_1 - d_0, \quad \cdots\cdots (3-f)$$

式(3-f)를 式(2-4, a), (2-4, b)에 代入하면

$$d_0 = -\frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{11} + i2\sigma_{12})e^{-2i\beta} \cdots\cdots (3-g)$$

$$C_1 = \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{11} + i2\sigma_{12})e^{-2i\beta} \cdots\cdots (3-h)$$

을 얻는다.

그런데 $\sigma_{22} = 1{,}000\,(kg/cm^2)$, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$이므로

$$C_1 = 250\,(1 + e^{-2i\beta})$$

$$d_0 = -250\,e^{-2i\beta}$$

의 값을 얻게 된다.

그리고, C_0는 變位의 single-valuedness 條件式(2-4, i)으로부터 0이 된다.

그러므로 式(2-3, a)로부터 함수 $\phi(z)$, $\Omega(z)$는 16개의 미지 常数 C_i $(i = 2 \sim 9)$, d_i $(i = 1 \sim 8)$를 갖는 함수가 된다. 이 함수 $\phi(z)$, $\Omega(z)$를 式(2-4, d), (2-4, e), (2-4, f) 그리고 (2-4, i)에 代入하여 16개의 미지 常数를 갖는 條件式을 만든 後, 15개의 配列点을 취하여 그 点에서의 座標값과 應力 값을 式(2-4, d), (2-4, e), (2-4, f)에 代入하여 15개의 條件式을 求하고 變位의 single-valuedness 條件式(2-4, i)으로부터 한 個의 條件式을 求하여 16개의 條件式을 만든다. 그런데 C_i, d_i는 복소수 常数이므로 32個의 미지수를 갖게 되고 條件式도 실수부와 허수부로 各各 분리하여 方程式을 얻게 되므로 32個의 條件式을 얻게 된다.

結果的으로 32個의 미지수를 갖는 32個의 non-homogeneous연립方程式이 만들어지므로 解를 求할 수 있다.

i) $z = x_1 + 6_i$ 上의 配列点들에 對해 式(2-4, d), (2-4, g)의 다음과 같은 두가지 式으로부터 12個의 條件式을 求한다.

$$R_e[\overline{\phi(z)} + (\bar{z} - z)\phi'(z) + \bar{\Omega}(z)]$$

$$= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11})\cos 2\beta + \sigma_{12}\sin 2\beta \cdots\cdots (3-i)$$

$$R_e[(\phi(z) + \overline{\phi(z)}) - \{(\bar{z} - z)\phi'(z) - \phi(z) + \bar{\Omega}(z)\}e^{2i\beta}] = N \cdots\cdots (3-j)$$

ii) $z = 3 \pm x_2 i$ 上의 配列点들에 對해 式(2-4 e)와 (2-4, g)의 다음과 같은 두 가지 式으로부터 18個의 條件式을 求한다.

$$R_e[2\phi(z)+\overline{\phi(z)}+(z-\bar{z})\phi'(z)-\bar{\Omega}(z)]$$

$$=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}-\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}\cos 2\beta-\sigma_{12}\sin 2\beta \quad \cdots\cdots (3\text{-k})$$

$$R_e[(\phi(z)+\overline{\phi(z)}-\{(\bar{z}-z)\phi'(z)-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\}e^{2i\beta}]=0 \quad \cdots\cdots (3\text{-l})$$

iii) 變位의 single-valuedness 條件式(2-4, i) 로부터

$$\kappa\oint_{H1}\phi(z)\,dz-\oint_{H1}\Omega(\bar{z})\,d \ =A_0+\frac{1}{2}A_2+\frac{3}{8}A_4+\frac{5}{16}A_6+\frac{35}{128}A_8=0 \quad \cdots\cdots (3\text{-m})$$

여기서 A_i 는 다음과 같은 미지 복소수 常数 C_i 와 Crack 길이 a, b 의 函数이다.

$$A_0=c_0+c_1(Q)+c_2(Q^2)+\cdots\cdots+c_9(Q^9)$$

$$A_2=c_2(P^2)+c_3(3QP^2)+c_4(6Q^2P^2)+c_5(10Q^3P^2)+C_6(15Q^4P^2)+c_7(21Q^5P^2)+c_8(28Q^6P^2)+c_9(36Q^7P^2)$$

$$A_4=c_4(P^4)+c_5(5QP^4)+c_6(15Q^2P^4)+c_7(35Q^3P^4)+c_8(70Q^4P^4)+c_9(126Q^5P^4)$$

$$A_6=c_6(P^6)+c_n(7QP^6)+c_8(28Q^2P^6)+c_9(84Q^3P^6)$$

$$A_8=c_8(P^8)+c_9(9QP^8)$$

여기서

$$P=\frac{a+b}{2},\quad Q=\frac{a-b}{2}$$

그러므로 式(3－m)의 실수부와 허수부로 부터 2個의 條件式을 求한다.

4. 有限 要素法에 依한 解析

F. E. M에 의한 解析에서의 computer program 은 2次元 parabolic isoparametric element 內部에 9개의 gauss point 를 定하여 가각의 gauss point 에서 應力 값을 찾는 Hinton & Owen[10] 의 program을 使用하였다.

Mesh는 치수가 100×150(mm)인 平板에 a＝b＝15mm인 crack을 갖는 경우, $\beta=15°,\ 45°, 75°$ 의 가각에 對하여 Fig. 3과 같이 element는 56個, nodal point 数는 196個로 하였다.

이와 같이 하여 求한 應力값을 아래 式과 같은 crack tip 부근에서의 應力값과 應力擴大係数 K_I, K_{II} 와의 関係式[8] 에 代入하여 K_I, K_{II}의 값을 求하였다.

$$\sigma_{xx}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1-\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad \cdots\cdots (4\text{-a})$$

$$\sigma_{yy}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad \cdots\cdots (4\text{-b})$$

$$\sigma_{xy}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad \cdots\cdots (4\text{-c})$$

여기서 r은 crack tip으로 부터 應力 값을 취한 点까지의 거리로 보통 r은 a/20보다 작은 값을 취한다. a는 crack 길이의 半이다. 그리고 θ는 crack tip을 원점으로 취하여 x_1축으로부터 應力 값을 취한 点까지의 角度로서 反時計 方向으로 측정한다.

本 論文에서는 crack tip 부근에서 원점으로부터의 거리가 a/20의 범위 안에 있는 여러점을 취하여 가장 큰 값을 應力擴大係数로 취하였다.

Fig. 3(b)는 Fig. 3(a)의 crack tip 부근의 領域 R을 擴大한 그림으로서 작은 원의 半徑은 1mm이고 큰 원의 半徑은 2.5mm이다.

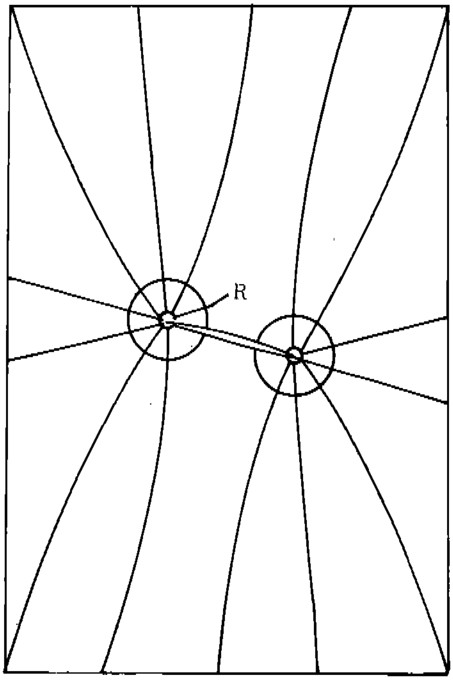

Fig. 3 (a) mesh for slant cracked plate (β=15°, a, b =15 (mm))

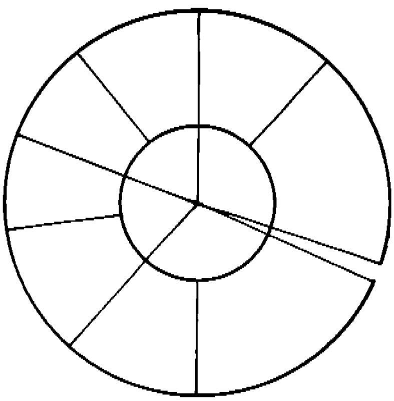

Fig. 3 (b) mesh around crack tip (region R)

5. 結果 및 考察

5-1 数學的 解

Fig. 4에서는 平板의 應力擴大係数 K_I에 對한 h/d, a/d의 영향을 알아보기 爲하여 복소수 응력함수의 power series를 使用한 境界 配列法으로 求한 값을 表示하였으며, 이 解들을 M. Isida가 복소수 응력함수의 Laurent's expansions를 使用하여 無限 平板에 對하여 求한 解[1]와 比較하였다.

Fig. 4에서 보는 바와 같이 h/d의 값이 增加함에 따라 境界 配列法에 依한 解가 M. Isida의 解에 接近하므로 빈을 만 하지만 h/d가 2보다 작은 경우에는 a/d의 값이 增加함에 따라 많은 差異를 나타내므로 有限 平板에 對한 境界 配列法은 h/d가 2보다 큰 경우에 適合할 것으로 判斷된다.

Computer는 KAIST에 소장된 CDC를 使用하였는데, crack의 크기 및 方向이 變化될 때마다 각각 하나씩의 解를 求하는데에 약 2초의 計算時間이 소비되었다.

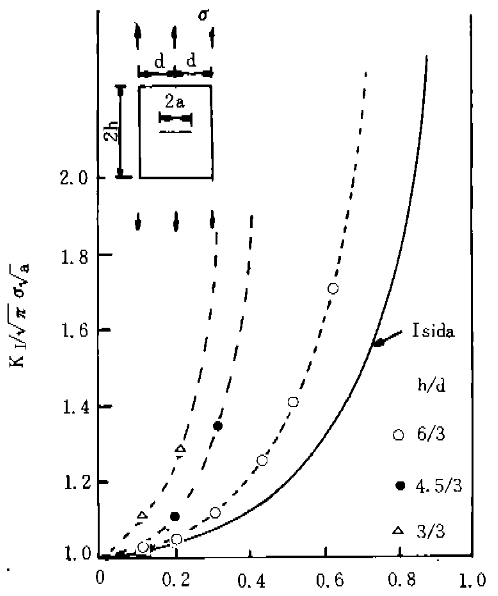

Fig. 4. Analytic solutions compared with infinite solutions by means of Laurent's series by Isida.

Fig. 5에서는 Fig. 4에서 表示된 바와 같이 a/d의 값이 0.3보다 작은 경우에는 구사한 方法에 関係없이 K_I의 값이 거의 같으므로 β의 變化에 따른 K_I, K_{II}의 變化를 알고자, 치수가 6

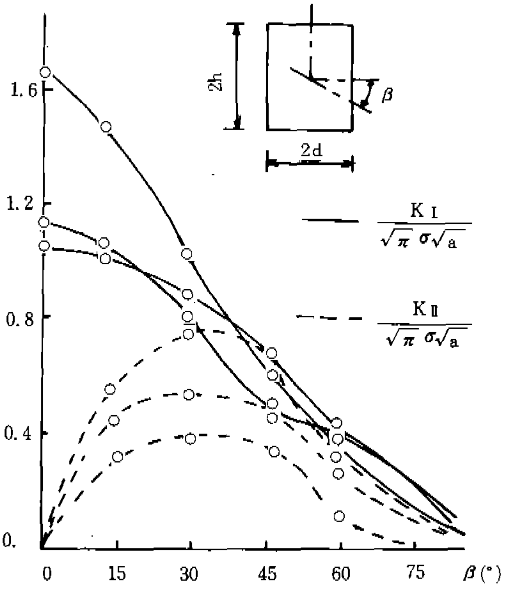

Fig. 5. Analytic solutions of crack in arbitrary directions (d =3cm, h =4.5cm)

× 9 (cm)인 平板에 a/d =0.08, 0.17, 0.25인 경우에 對한 解를 power series 를 使用한 境界 配列法으로 求하여 表示하였다.

여기에서 a/d의 값과 β의 값이 增加할수록 應力擴大係数 K_I의 값이 급격하게 감소하여 β =90°에서는 거의 0과 같은 값을 갖고, K_{II}의 값은 β=15°까지 급격하게 增加하고 β= 15°～45°사이에서는 a/d의 값이 작아질수록 거의 一定한 값을 가지며 β=45°以後에는 급격하게 감소함을 알 수 있다.

또한 β값이 增加할수록 K_I과 K_{II}의 差異가 감소하여 β=45° 부근에서는 K_I과 K_{II}의 값이 거의 같아짐을 알 수 있다.

5-2 F.E.M. 에 依한 解

Fig. 6은 치수가 10×15(cm)인 平板 内部에 crack의 길이가 a = b = 1.5(cm)인 경우에 對해 β=15°, 30°, 45°, 60°, 75°의 應力擴大係数 값을 無次元化하여 F.E.M에 依한 解와 数學的解析에 依하여 求한 解를 比較하였다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 F.E.M에 依한 解와 数學的 方法에 依한 解가 거의 같은 값을 가짐을 알 수 있으며 F.E.M에 依한 解析에서 crack tip 부근에서의 mesh를 좀 더 작게 나누고, 또한 應力과 應力擴大係数의 関係式(4-a)—(4-c)에서 삼각함수의 次数를 더 增加시키면 더 좋은 수렴치를 얻을 수 있을 것으로 생각된다.

이 部分에 對하여 computer는 서울 大學校에 소장된 IBM370을 使用하였으며, crack의 크기 및 方向이 變化될 때 마다 각각 하나씩의 解를 求하는데에 약 200초의 計算 時間이 소비되었다.

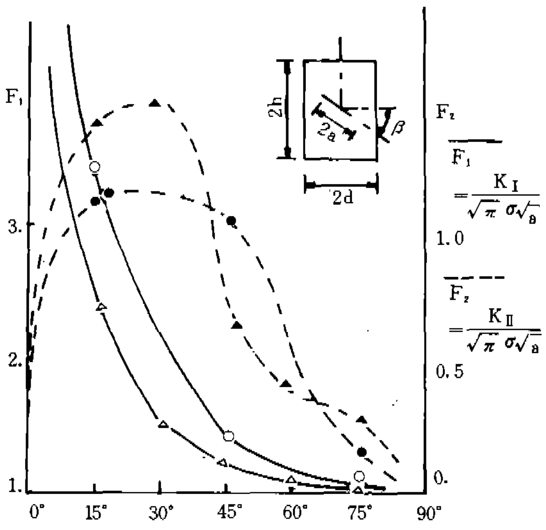

Fig. 6. Analytic solutions compared with solutions by means of F.E.M. (d =5cm, h=7.5cm, a =1.5cm)

6. 結 論

直線 crack을 갖는 有限 平板에 單純 引張力이 作用하는 경우, crack tip에서의 應力擴大係数에 영향을 미치는 crack의 크기 및 位置, 平板의 相對 치수, crack의 기울기 等을 變化하여 복소수 應力函数의 power series를 使用한 境界·配列法에 依한 解와 有限 要素法(F.E.M.)에 依한 解를 求하여 比較 검토한 結果, 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) h/d = 2 以上인 경우에는 境界 配列法으로도 충분히 믿을 만한 應力擴大係数 값을 얻을 수 있음을 알 수 있다(Fig. 4, Fig. 6).

2) a/d의 값과 β의 값이 增加함에 따라 無次元化된 應力擴大係数 K_I의 값은 급격히 작아짐을 알 수 있고, K_{II}의 값은 $\beta=15°$ 까지 급격히 增加하고, $\beta=15°-45°$에서는 a/d의 값이 작아짐에 따라 거의 一定한 값을 가지며, 45° 以後에서는 급격히 감소함을 알 수 있다(Fig. 5).

3) 境界 配列法에 依한 解析 方法이 F.E.M에 依한 解析 方法보다 Input data 준비의 간편성, 計算 時間의 절약을 期할 수 있음을 提示할 수 있었다.

參 考 文 獻

1. Sih, G. C.
"Methods of analysis and solutions of crack problems." Noordhoff international publishing Leyden, 1973.
2. Irwin, G. R.
"Analysis of stresses and strains near the end of a crack." Trans. ASME. Vol. 79, 1959.
3. Paris, R. C. & Sih, G. C.
"Stress Analysis of Cracks" Fracture Toughness Testing and It's Application, No. 381, 1965.
4. Vooren, J. V.
"Remarks on an existing numerical method of estimate the stress intensity factor of a straight crack in a finite plate." Journal of Basic Engineering, Trans. ASME. Series D. Vol. 89, No. 1. Mar. 1937.
5. Kobayashi, A. S. & Cherepy, R. D. & Kinsel, W. C.; "A numerical procedure for estimating the stress intensity factor of a crack in a finite plate." Journal of Basic Engineering, Trans. ASME. Series D. Vol. 86. No. 4. Dec. 1964.
6. Isida. M.
"Stress intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip." Journal of Applied Mechanics, Vol. 31. Trans, ASME. Vol. 86, Series E. No. 3. Sept. 1966.
7. Muskhelishvili, N. Z.
"Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity." 4th. ed. P. Noordhoff Ltd. 1963.
8. Kobayashi, A. S.
"Experimental Techniques in Fracture Mechanics." SESA. 1973.
9. Sokolnikoff, I. S.
"Mathematical Theory of Elasticity." 2nd. ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.
10. Hinton, E. & Owen, D. R. J.
"Finite Element Programming." Academic Press. 1977.
11. Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N. "Theory the of Elasticity." 3rd. ed. McGraw-Hill, Inc. 1970.