

---

 論 文
 

---

大韓造船學會誌  
 第19卷 第1號 1982年 3月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 19, No. 1, March 1982

## 有限水深의 海上에서 規則波에 놓인 球의 運動特性

崔 恒 洵\* · 金 盛 均\*\*

 On the Motion Characteristics of a Freely-Floating Sphere in a  
 Water of Finite Depth

Hang Shoon Choi\*, Sung Kyun Kim\*\*

**Abstract**

Herein the motion of a freely-floating sphere in a water of finite depth is analysed within the framework of a linear potential theory. A velocity potential describing fluid motion is generated by distributing pulsating sources and dipoles on the immersed surface of the sphere, without introducing an inner flow model. The potential becomes the solution of an integral equation of Fredholm's second type.

In the light of the vertical axisymmetry of the flow, surface integrals reduce to line integrals, which are approximated by summation of the products of the integrand and the length of segments along the contour. Following this computational scheme the diffraction potential and the radiation potential are determined from the same algorithm of solving a set of simultaneous linear equations. Upon knowing values of the potentials hydrodynamic forces such as added mass, hydrodynamic damping and wave exciting forces are evaluated by integrating pressure over the immersed surface of the sphere. It is found in the case of finite water depth that the hydrodynamic forces are much different from the corresponding ones in deep water. Accordingly motion response of the sphere in a water of finite depth displays a particular behavior both in amplitude and phase.

## 기 호

$A^m$  : incident wave potential의 Fourier 전개 계수  
 $a$  : 구의 반경  
 $a_0$  : 파의 진폭  
 $B^m$  : diffraction potential의 Fourier 전개 계수  
 $b_x, b_z$  : 수평, 수직운동의 동유체감쇠력 계수  
 $d$  : 중심

$d_x, d_z$  : 수평, 수직방향의 diffraction damping 계수  
 $e_x, e_z$  : 수평, 수직방향의 diffraction exciting force 계수  
 $f_n$  : 중심에 대한 eigenfunction  
 $f_x, f_z$  : 수평, 수직방향의 Froude-Krylov force 계수  
 $F_x, F_z$  : 수평, 수직방향으로 작용하는 파랑하중  
 $G, g^m$  : Green's function  
 $g$  : 중력 가속도

接受日字: 1982年 3月 3日

\* 正會員, 서울大學校 工科學校 造船工學科

\*\* 學生會員, 서울大學校 大學院

- $H_m$  : 제 2 종의 Hankel 함수
- $I_m$  : 제 1 종의 수정된 Bessel 함수
- $J_m$  : 제 1 종의 Bessel 함수
- $K_m$  : 제 2 종의 수정된 Bessel 함수
- $k_n$  : 파수
- $l$  : 적분로  $C$ 의 길이요소
- $m_x, m_z$  : 수평, 수직운동의 부가질량 계수
- $\bar{n}$  : 단위법선벡터
- $p$  : 동유체압력
- $r, \theta, z$  : 원통좌표
- $S$  : 침수된 구의 표면
- $\bar{v}$  : 유속벡터
- $\bar{V}_0$  : 구의 단위속도벡터
- $X^m, Y^m, Z^m$  : radiation potential의 Fourier 전개계수
- $x, y, z$  : 직교좌표
- $x_0, z_0$  : 수평, 수직운동의 진폭
- $Y_m$  : 제 2 종의 Bessel 함수
- $\delta$  : Dirac's delta function
- $\delta_{ij}$  : Kronecker's delta function
- $\epsilon_m$  : Neumann 수
- $\epsilon_x, \epsilon_z$  : 수평, 수직운동의 위상차
- $\xi, \theta, \zeta$  : 원통좌표
- $\Phi, \phi$  : 속도포텐셜
- $\rho$  : 물의 밀도
- $\sigma$  : 무한수심에서의 기본파수( $=\omega^2/g$ )
- $\omega$  : 파의 원진동수

### 1. 서 론

본 논문에서는 평면규칙파가 진행하는 유한수심의 해역에 놓인 구에 작용하는 동유체력과 이로인한 구의 운동을 선형포텐셜이론을 이용하여 해석하였다.

구는 연근해역에서 부표, 해상관측기등으로 활용되고 있다. 부유체에 대한 동유체력해석은 선박유체역학의 고전적 문제의 하나로 오래전부터 많은 학자들에 의하여 연구되어 왔으나, 대부분의 경우에는 스트림방법에 의거한 2차원적 해석이었고 3차원적 해석에 관한 문헌은 비교적 적은 수에 그치고 있다.

3차원 물체중 가장 간단한 형상인 구가 무한수심에 놓인 경우에 대하여 Havelock[1]\*은 강제수직운동을 multipole expansion method로 해석하였고, Barakat [2]은 수직방향의 radiation 문제뿐 아니라 diffraction

문제도 취급하였으나 그의 수치계산은 충분히 정밀하지 못하였다. Kim[3]은 Green's function method로 구와 타원체의 수평수직운동을 계산하여 구의 강제수직운동의 경우 Havelock과 같은 결과를 얻었으며, Park & Choi [4]는 Barakat의 방법을 다시 해석하여 이를 수평운동에 적용하였다.

한편, 유한수심에서는 Fourier 무한급수로 전개한 John[5]의 3차원 pulsating source에 대한 속도포텐셜 표현식을 이용하여 Black[6]은 구에 작용하는 파랑하중을 계산하였다. 그는 구 주위의 유동이 수직축에 대칭인 점을 감안하여 속도포텐셜을 표시하는 표면적분을 선적분으로 전개하였고, 이 적분을 분할구간의 길이에 따라 수행하는 종래의 방법대신 분할구간의 대표점에서 피적분함수의 값을 계산하고 이에 분할구간의 길이를 곱하는 간략한 방법을 택하였다.

수심을 충분히 깊게하여 얻은 Black의 결과는 무한수심에 대한 Havelock의 결과와 비교할 때, 대체로 일치하나 Green함수에 내포되어 있는 특이점으로 인한 수치계산상의 문제점이 있었다.

Fenton[7]은 이 점을 지적하고 정교한 수학적방법으로 이 문제를 해결할 수 있는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 Black의 방법을 그대로 택하되 Fourier급수로 전개된 Green함수는  $r=0$ ( $r$ 은 수직축으로부터의 수평거리)인 점에서만 특이현상을 보이므로 이 접근처에서는 분할거리를 비교적 길게 잡아 수치계산상의 어려움을 피하였다. 이 방법으로 분할갯수와 local wave number수에 의한 영향을 조사한 후, 여러가지 수심에 놓인 구의 diffraction문제와 radiation문제의 해를 구하여 구의 수평, 수직운동을 해석하였다.

### 2. 문제의 정립

Fig. 1에 보인 바와 같이 수심이  $d$ 인 해역에서 반경이  $a$ 인 구가 정수면에 반이 잠겨 정적평형상태를 유지하고, 이에 진폭이  $a_0$ 이며 원진동수가  $\omega$ 인 평면규칙파가 입사하는 문제를 생각한다. 이 문제를 수식적으로 기술하기 위하여 그림에 보인바와 같이 우수직교좌표계  $(x, y, z)$ 와 원통좌표계  $(r, \theta, z)$ 를 도입하며, 두 좌표계 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}y/x, \quad z = z \quad (1)$$

이 문제를 해석적인 방법으로 처리하는 수학적모델

\* [ ]안의 숫자는 본 논문 말미에 열거한 참고문헌의 번호임.

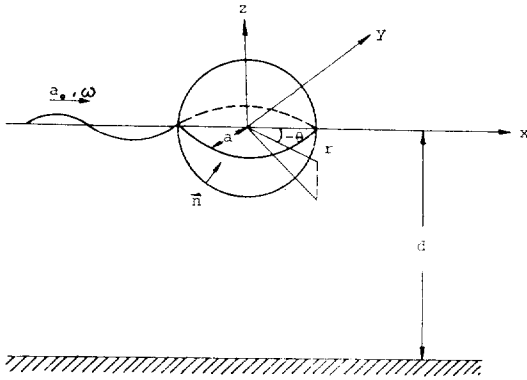


Fig. 1. Sphere and coordinate systems

에는 다음과 같은 가정들이 요구된다.

- ① 완전유체를 가정하여 속도포텐셜  $\Phi(x, y, z, t)$ 을 도입한다( $\vec{v} = \nabla\Phi$ ,  $\vec{v}$ 는 물입자의 속도벡터).
  - ② 입사파의 진폭은 작으며 구의 운동도 작다고 가정하여 John의 선형이론에 따라 속도 포텐셜은 incident wave potential  $\Phi^I$ , diffraction potential  $\Phi^D$  그리고 radiation potential  $\Phi^R$ 로 구분할 수 있다.
  - ③ 구는 강체로 가정한다.
  - ④ 비교적 긴시간이 경과하여 구의 운동과 유동은 조화운동을 한다고 가정한다.
- 이러한 가정에 따라 속도포텐셜은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Phi = \Phi^I + \Phi^D + \Phi^R = (\phi^I + \phi^D + \phi^R)e^{i\omega t} \quad (2)$$

또한 단위세기의 pulsating source의 속도포텐셜을 나타내는 Green's function  $G$ 를 유도할 수 있으며, 이는 속도포텐셜과 함께 다음과 같은 방정식과 경계조건을 만족하여야 한다.

- ① 연속방정식

$$\nabla^2 \left\{ \frac{\phi}{G} \right\} = \begin{cases} 0 \\ \delta(r-\xi, \theta-\Theta, z-\zeta)/r \end{cases} \quad (3)$$

여기서  $\delta$ 은 Dirac delta함수를,  $(\xi, \Theta, \zeta)$ 는 특이점의 원통좌표를 뜻한다.

- ② 해저면 경계조건

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\phi}{G} \right\} = 0 \quad (z = -d) \quad (4)$$

- ③ 선형화된 자유표면 경계조건

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - \sigma \right) \left\{ \frac{\phi}{G} \right\} = 0 \quad \left( z = 0, \sigma = \frac{\omega^2}{g} \right) \quad (5)$$

여기서  $g$ 는 중력가속도를 나타낸다.

- ④ 구표면의 운동학적 경계조건

$$d\phi \cdot \vec{n} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n} \quad (6)$$

여기서  $\vec{n} (n_r, \theta, n_z)$ 은 유체영역 밖으로 향한 단위법선

벡터를 그리고  $\vec{V}_0$ 는 구의 운동속도크기벡터를 표시한다.

- ⑤ radiation condition

속도포텐셜  $\Phi$ 는 진폭  $a_0$ , 원진동수  $\omega$ 의 평면진행파와 무한원방으로  $O(r^{-1/2})$ 로 감쇠되며 사방으로 전파되는 발산파를 나타낼 수 있어야 한다.

위의 방정식과 경계조건을 만족하는 평면진행파의 속도포텐셜은 선형중력파이론으로부터 잘 알려져 있으며, 이의 Fourier급수식은

$$\phi^I = a_1 f_1(z) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m J_m(kr) \cos m\theta \quad (7)$$

와 같다.

여기서  $J_m = m$ 차의 제 1종 Bessel 함수

$$a_0 = -\frac{i\omega}{g} a_1 f_1(0)$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \geq 1) \end{cases}$$

$$f_1(z) = \frac{\cosh k(z+d)}{\sqrt{N_1(d)}}$$

$$N_1(d) = \frac{d}{2} \left( 1 + \frac{\sinh 2kd}{2kd} \right)$$

$$k = \sigma / \tanh kd$$

한편 Green's function  $G$ 의  $\theta$ 에 대한 우함수는

$$G(r, \theta, z; \xi, \Theta, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m g^m(r, z; \xi, \zeta) \cos m\theta \times \cos m\theta \quad (8)$$

$$g^m = \frac{i}{4} f_1(z) f_1(\zeta) \left\{ \begin{matrix} H_m(kr) J_m(k\xi) \\ J_m(kr) H_m(k\xi) \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} f_n(z) f_n(\zeta) \left\{ \begin{matrix} K_m(k_n r) I_m(k_n \xi) \\ I_m(k_n r) K_m(k_n \xi) \end{matrix} \right\}$$

와 같으며  $\{ \}$ 안의 윗식은  $r > \xi$ 일때, 그리고 아랫식은  $r < \xi$ 일때 사용한다.

여기서  $H_m = m$ 차의 제 2종 Hankel함수 ( $J_m - iY_m$ )

$I_m = m$ 차의 제 1종 수정된 Bessel함수

$K_m = m$ 차의 제 2종 수정된 Bessel함수

$$f_n(z) = \frac{\cos k_n(z+d)}{\sqrt{N_n(d)}}$$

$$N_n(d) = \frac{d}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2k_n d}{2k_n d} \right)$$

$$k_n = -\sigma / \tan k_n d \quad (n = 2, 3, \dots)$$

윗식 (7)과 (8)에서  $k$ 와  $k_n$ 은 선형화된 dispersion relation의 eigensolutions으로 각기 free wave number와 local wave number를 뜻하며,  $f_1(z)$ 와  $f_n(z)$ 는 이에 대응하는 수심  $d$ 에 대한 eigenfunctions이다.

이제 유체영역에 Green's theorem을 적용하면 정적

평형상태에서 침수된 구의 표면  $S$ 에 유효한 속도포텐셜은

$$\frac{1}{2}\phi = \iint_S (\phi \nabla G - G \nabla \phi) \cdot \vec{n} \, dS \quad (9)$$

가 되며, 이는 구 표면  $S$ 에 source와 dipole을 분포시킨을 의미한다.

유동이 구의 수직축에 대칭이면  $\phi$ 와  $G$ 의 표현식에서 변수  $\theta$ 를 분리하여 나타낼 수 있으며(식 7과 8 참조), 표면적분은 Fig. 2에 보인바와 같이

$$\iint_S \{\cdot\} dS = \int_C dl \int_0^{2\pi} \{\cdot\} \xi \, d\theta \quad (10)$$

되며  $d\theta$ 에 대한 적분을 수행하면 결국 반구와 수직면의 교차선의 반에 해당되는 contour  $C$ 에 대한 선적분이 된다.

### 3. Diffraction Problem

구가 고정되어 있다고 가정하고 이에 입사된 파의 reflection과 transmission되는 유동을 나타내는 속도포텐셜로 구의 표면에서 다음과 같은 운동학적 경계조건이 성립된다.

$$\nabla(\phi^I + \phi^D) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{on } S \quad (11)$$

이 경계조건을 이용하면 식 (9)로부터 diffraction potential  $\phi^D$ 는

$$\frac{1}{2}\phi^D = \iint_S \phi^D (\nabla G \cdot \vec{n}) \, dS + \iint_S G (\nabla \phi^I \cdot \vec{n}) \, dS \quad (12)$$

로 쓸 수 있으며, 식(7)로 주어진 incident wave potential  $\phi^I$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\phi^I = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} A^m \cos m\theta \quad (13)$$

$$\text{여기서 } A^m = f_1(z) \varepsilon_m (-i)^m J_m(kr)$$

이에 따라  $\phi^D$ 도 유사한 형태로

$$\phi^D = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} B^m \cos m\theta \quad (14)$$

와 같이 가정할 수 있으며, 이들을 식(8)과 함께 (12)식에 대입하여 식(10)에서와 같이  $d\theta$ 에 대한 적분을 수행하면 다음과 같은 Fredholm의 제 2종 적분방정식을 얻는다.

$$\frac{B^m}{4\pi} = \int_C B^m (\nabla g^m \cdot \vec{n}) \xi \, dl + \int_C g^m (\nabla A^m \cdot \vec{n}) \xi \, dl \quad (15)$$

Contour  $C$ 를  $N$ 개로 분할하여  $dl$ 에 대한 적분을 각 구간의 중점에서 구한 피적분함수의 값에 그 구간의 길이를 곱한 합으로 근사시키고, 또한 윗식을 각 구간의

중점에 적용하면 다음과 같은 선형대수방정식으로 변환시킬 수 있다.

$$\sum_{j=1}^N \left( a_{ij}^m - \frac{\delta_{ij}}{4\pi} \right) B_j^m = b_i^m \quad (16)$$

$$a_{ij}^m = \left( \frac{\partial g_{ij}^m}{\partial \xi} n_{\xi j} + \frac{\partial g_{ij}^m}{\partial \zeta} n_{\zeta j} \right) \xi_j \, dl_j$$

$$b_i^m = - \sum_{j=1}^N g_{ij}^m \left( \frac{\partial A^m}{\partial \xi} n_{\xi j} + \frac{\partial A^m}{\partial \zeta} n_{\zeta j} \right) \xi_j \, dl_j$$

$$(i=1, 2, \dots, N; m=0, 1, \dots)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker's delta 함수이다.

윗 식으로부터  $m$ 차에 대한 해  $B^m$ 을 각 분할구간의 중점에서 얻을 수 있으며, 선형화된 Bernoulli 방정식으로부터 동유체압력을 계산할 수 있다.

$$p = -\rho \Phi_t = -i\omega \rho \phi e^{i\omega t} \quad (17)$$

여기서  $\rho$ 는 물의 밀도를 뜻한다.

윗 식의  $\phi$  대신에 앞에서 구한  $\phi^D$ 를  $\phi^I$ 와 함께 대입하여 구표면  $S$ 에 걸쳐 적분하면 구에 작용하는 수평·수직방향의 파랑하중이 결과된다.

$$F_m = \frac{(-1)^m 2\pi \rho g a_0}{\varepsilon_m f_1(0)} e^{i\omega t} \sum_{j=1}^N \left( A_j^m + B_j^m \right) n_j^m r_j \, dl_j \quad (18)$$

여기서 수평력은  $m=1$ ,  $n^1=n_r$ 을 대입하고, 수직력은  $m=0$ ,  $n^0=n_z$ 를 대입하여 얻는다.

잘 알려져 있는 바와 같이 식 (18)에서 입사파를 표시하는  $A^m$ 에 연관된 항은 항상 각 방향으로의 물입자의 가속도 위상에서 작용하는 Froude-Krylov force이고,  $B^m$ 에 연관된 항은 일반적으로 diffraction force라 한다. 그런데  $B^m$ 은 복소수이므로 각 방향으로의 물입자의 가속도 위상뿐 아니라 속도위상에서도 작용하게 된다. 따라서 전자를 diffraction exciting force로 후자를 diffraction damping force로 구분할 수 있다. 여기서는 수평방향의 경우  $I_m\{B^1\}$ 이 기진력 그리고  $-R_e\{B^1\}$ 이 감쇠력으로 작용하게 되며, 수직방향의 경우에는  $R_e\{B^0\}$ 가 기진력으로  $-I_m\{B^0\}$ 가 감쇠력으로 작용하게 된다. 즉, 이들을  $\rho g a_0 a^2$ 으로 무차원화시킨 동유체력계수는 다음과 같다. 수평방향으로는

$$f_x = - \frac{2\pi}{f_1(0)} \sum_{j=1}^N f_1(z_j) J_1(kr_j) n_{rj} r_j \, dl_j$$

$$e_x = \frac{\pi}{f_1(0)} \sum_{j=1}^N I_m\{B_j^1\} n_{rj} r_j \, dl_j$$

$$d_x = - \frac{\pi}{f_1(0)} \sum_{j=1}^N R_e\{B_j^1\} n_{rj} r_j \, dl_j \quad (19)$$

그리고 수직방향으로는

$$\begin{aligned}
 f_z &= \frac{2\pi}{f_1(0)} \sum_{j=1}^N f_1(z_j) J_0(kr_j) n_{zj} r_j \Delta l_j \\
 e_z &= \frac{2\pi}{f_1(0)} \sum_{j=1}^N R_e \{B_j\} n_{zj} r_j \Delta l_j \\
 d_z &= -\frac{2\pi}{f_1(0)} \sum_{j=1}^N I_m \{B_j^0\} n_{zj} r_j \Delta l_j \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서  $f$ 는 Froude-Krylov force계수를,  $e$ 와  $d$ 는 각각 진력과 감쇠력 계수를 표시한다.

#### 4. Radiation Problem

구속되어 있지 않은 구에 파랑하중이 가해지면 구는 그의 기하학적 특성 때문에 수평·수직운동을 하게 되며, 이 운동은 다시 주위 유체를 교란하게 된다. 이렇게 교란된 유동을 표시하는 속도포텐셜을 radiation potential이라 하며, 이는 구의 동역학적 경계조건인 운동방정식으로부터 구하여야 하나 선형이론에서는 구가 정수면에서 수평·수직방향으로 작기 단위크기의 강제조화운동을 한다는 가정에서 출발한다. 이때 강제운동의 진동수는 입사파의 값으로 취한다. 따라서 수평·수직운동에 대한 구표면의 운동학적 경계조건 식(6)은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\nabla \phi^R \cdot \vec{n} = i\omega (-x_0 n_r \cos\theta + z_0 n_z) \quad (21)$$

여기서  $x_0$ 는 구의 수평운동의 진폭을 그리고  $z_0$ 는 수직운동의 진폭을 뜻한다.

한편 radiation potential도 diffraction potential의 경우와 같이

$$\phi^R = -x_0 \sum_{m=0}^{\infty} X^m \cos m\theta + z_0 \sum_{m=0}^{\infty} Z^m \cos m\theta \quad (22)$$

로 가정하고, 이에 Green's theorem을 적용하여 우선  $d\theta$ 에 대한 적분을 수행하면 다음과 같은 유사한 두개의 제 2종 Fredholm적분방정식이 도출된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{Y^m}{4\pi} &= \int_C Y^m (\nabla g^m \cdot \vec{n}) \xi dl \\
 &- (-1)^m i\omega \int_C g^m n^m \xi dl \quad (m=0, 1) \quad (23)
 \end{aligned}$$

여기서

$$Y^0 = Z^0, \quad n^0 = n_z$$

$$Y^1 = X^1, \quad n^1 = n_\xi$$

이를 선형대수방정식으로 변환시키면

$$\sum_{j=1}^N \left( a_{ij}^m - \frac{\delta_{ij}}{4\pi} \right) Y_j^m = y_i^m \quad (m=0, 1) \quad (24)$$

이 되어 식(16)과 같은 형태가 된다

여기서  $a_{ij}^m$ 는 식(16)에 보인 표현식이며  $y_i^m$ 은 다

음과 같다.

$$y_i^m = (-1)^m i\omega \sum_{j=1}^M g_{ij}^m n_j^m \xi_j \Delta l_j \quad (25)$$

이의 수치해법은 diffraction problem과 전혀 같은 algorithm에 따라 수행된다.

마찬가지로 선형화된 Bernoulli방정식으로부터 구에 작용하는 동유체압력을 얻어, 이를 구의표면에 걸쳐 적분하면 각 방향으로 작용하는 동유체력을 얻는데, 이는 각 방향운동의 속도위상과 가속도위상에 작용하는 힘으로 구분할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F_x &= \pi i \omega \rho x_0 e^{i\omega t} R_1 = -\bar{m}_x (-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}) \\
 &- \bar{b}_x (i\omega x_0 e^{i\omega t}) \\
 F_z &= -2\pi i \omega \rho z_0 e^{i\omega t} R_0 = -\bar{m}_z (-\omega^2 z_0 e^{i\omega t}) \\
 &- \bar{b}_z (i\omega z_0 e^{i\omega t}) \\
 R_m &= \int_C Y^m n^m r dl \quad (m=0, 1) \quad (26)
 \end{aligned}$$

여기서  $\bar{m}$ 은 부가질량을 그리고  $\bar{b}$ 는 동유체감쇠력을 뜻한다.

이제 부가질량을  $\rho a^3$ 으로, 그리고 동유체감쇠력을  $\omega \rho a^3$ 으로 나누어 무차원의 계수로 표시한다.

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ b \end{matrix} \right\}_m = \frac{(-1)^m 2\pi}{\epsilon_m \omega a^3} \frac{I_m}{R_e} \left\{ R_m \right\} \quad (m=0, 1) \quad (27)$$

여기서  $m=0$ 은 수직운동, 그리고  $m=1$ 은 수평운동을 나타낸다.

#### 5. 운동방정식

구는 기하학적 특성 때문에 규칙파중에서는 파진행 방향으로의 수평운동과 수직운동을 경향하게 된다. 본 논문에서는 선형포텐셜이론에 의한 정상주기운동만을 다루므로 구의 운동특성은 평균위치를 중심으로 한 운동의 진폭과 입사파에 대한 운동의 위상차가 파의 진동수에 따라 어떠한 변화를 보이는가를 밝힘으로써 규명된다. 수평운동과 수직운동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\rho a^3 \left( \frac{2}{3}\pi + m_x \right) \ddot{x} + \rho a^3 \omega b_x \dot{x} \\
 &= \rho g a_0 a^2 \{d_x - i(f_x + e_x)\} e^{i\omega t} \\
 &\rho a^3 \left( \frac{2}{3}\pi + m_z \right) \ddot{z} + \rho a^3 \omega b_z \dot{z} + \rho g \pi a^2 z \\
 &= \rho g a_0 a^2 \{(f_z + e_z) - i d_z\} e^{i\omega t} \quad (28)
 \end{aligned}$$

이제 수평방향과 수직방향의 주기적운동을 각각  $x = x_0 e^{i(\omega t + \epsilon_x)}$ ,  $z = z_0 e^{i(\omega t + \epsilon_z)}$ 로 표시하여 뒷식에 대입하면 진폭비와 위상차를 바로 구할 수 있다.

$$\frac{x_0}{a_0} = \frac{1}{\beta} \left| \frac{d_x - i(f_x + e_x)}{-\left(\frac{2}{3}\pi + m_x\right) + ib_x} \right|$$

$$\epsilon_x = \tan^{-1} \left[ \frac{b_x d_x - (f_x + e_x)\left(\frac{2}{3}\pi + m_x\right)}{-b_x(f_x + e_x) - d_x\left(\frac{2}{3}\pi + m_x\right)} \right]$$

$$\frac{z_0}{a_0} = \left| \frac{(f_x + e_x) - id_x}{\pi - \beta\left(\frac{2}{3}\pi + m_x\right) + i\beta b_x} \right| \quad (29)$$

$$\epsilon_z = \tan^{-1} \left[ \frac{\beta b_x(f_x + e_x) + d_x\left\{\pi - \beta\left(\frac{2}{3}\pi + m_x\right)\right\}}{(f_x + e_x)\pi - \beta\left(\frac{2}{3}\pi + m_x\right) - \beta b_x d_x} \right]$$

여기서  $\beta = \sigma a$ 를 표시한다.

2. 수치계산 및 토론

Inner flow model을 도입하지 않고 일반적인 Green 정리를 그대로 적용하여 침수된 구의 표면에 연속방정식, 선형화된 자유표면경계조건, 해지조건 그리고 radiation condition을 만족하는 pulsating source와 dipole을 분포하여 속도포텐셜을 표시하였다.

Green's function은 선형화된 dispersion relation의 eigenvalue인 파수(free and local wave numbers)에 대한 Fourier급수로 전개된 형태를 취하였다. 유동이 구의 수직축에 대칭인 점을 감안하여 표면적분은 식 (10)에서와 같이 변수  $\theta$ 에 대하여 먼저 수행하여 적분으로  $C$  (Fig. 2참조)에 대한 선적분으로 변환시킬 수 있다.

수치계산을 위하여 적분로를 등분하는 보통의 방법 대신 반 구의 수직축을 등분하고 이의 사영으로 적분로를 분할하였다. 분할구간의 대표점 역시 수직축상의 자구간의 증점으로 택하였다. 이렇게 함으로써 유동의 변화가 많은 자유표면 근처에서는 분할된 구간의 길이가 짧아지고, 특이점이 되는  $r=0$  근처에서는 분할된 구간의 길이가 비교적 길어져 수치상의 어려움을 피할 수 있다. 또한 각 분할구간에서 선적분을 수행하지 않고 그 구간의 대표점에서의 피적분함수의 값을 구하고

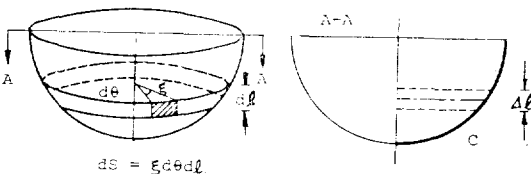


Fig. 2. Schematic illustration of numerical computation

이에 구간의 길이를 곱하는 간단한 방법을 이용하였다. 피적분수의 변화가 심한 경우에는 이러한 단순한 방법을 사용할 수 없으나, Black은 이러한 방법으로 구에 작용하는 diffraction force를 구하였는데 무한수심의 Havelock의 결과와 같은 값을 보여주고 있다[6].

우선 분할구간의 갯수(=NN)가 수치계산에 미치는 영향을 살펴보기 위하여  $d/a=10.0$ ,  $\omega^2 a/g=1.0$  그리고 극부파수의 갯수(=NF)를 10으로 택하고  $NN=3\sim 20$ 에 대하여 계산을 수행하였다. 계산된 양은 수평·수직방향의 부가질량계수  $m$ , 동유체감쇠력계수  $b$ , Froude-Krylov force 계수,  $f$ , diffraction exciting force계수  $e$  그리고 diffraction damping계수  $d$ 였다. 기준값으로 무한수심에서의 Kim[3]의 결과를 택하여 비교하였을 때,  $NN=12$ 에서 충분히 정확한 값을 얻을 수 있었다.

한편 극부파수의 갯수에 의한 영향을 조사하기 위하여  $d/a=10.0$ ,  $\omega^2 a/g=1.0$ ,  $NN=12$ 에서  $NF=1\sim 20$ 에 대하여 위에서와 같은 양을 계산하여 비교하였는데 극부파수의 갯수에 의한 영향은 그리 크지 않음을 알 수 있었고, 또한  $NF=10$ 에서 충분히 엄밀한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 본 논문에서는 다른 모든 계산에서  $NN=12$ ,  $NF=10$ 을 택하였다.

수치계산은  $d/a=10, 4, 2, 1.5, 1.2$  그리고  $\omega^2 a/g=0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$ 에 대하여 수행하였다. 동유체력은 수심이 얇아지면서 그 절대값이 계속 증가되어  $d/a=1.2$ 의 경우에는 매우 큰 값을 갖게되어 이들 결과를 도시한 Fig. 3~ Fig. 16에서 제외시켰다.

Fig. 3은 수평운동에 의한 부가질량계수의 수심과 무차원의 파진동수에 따른 변화를 보여주고 있다. 수

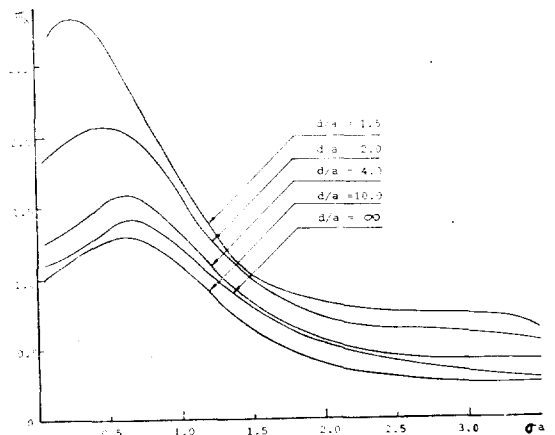


Fig. 3. Added mass coefficients of a surging sphere

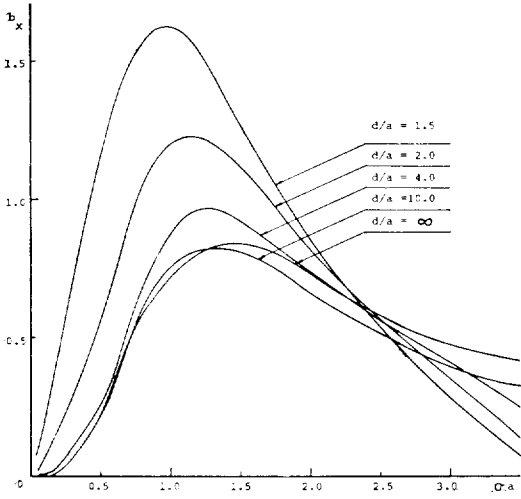


Fig. 4. Hydrodynamic damping coefficients of a surging sphere

심이 얇아질수록 부가질량은 모든 진동수에서 증가하는 경향을 보여주고 있으며, 최대치의 위치는 작은 진동수의 값으로 옮겨가고 있다. 여기서  $d/a = \infty$ 인 경우 Kim의 결과를 전제하였는데, 모든 진동수에서  $d/a = 4$ 보다 작고  $d/a = 10$ 보다 큰 값을 갖고 있다. 실제로  $d/a = 10$ 이면 작은 진동수의 영역을 제외하고는 무한수심인  $d/a = \infty$ 와 같은 경우가 되는데, 여기서 얻은 차이는 해석법의 차이에 기인한다고 여겨진다. 즉 유한수심에 대한 Green's function(식 8)으로 부리는 무한수심에 대한 표현식을 바로 구할 수 없다[5].

Fig. 4에는 수평운동에 의한 동유체감쇠력계수를 나타내고 있는데,  $\omega^2 a/g < 2.5$  영역에서는 수심이 얇을수록 값이 커지고 또한 최대치의 위치는 작은  $\omega^2 a/g$  값으로 옮겨가고 있다. 그러나  $\omega^2 a/g > 2.5$  영역에서는 상술한 경향이 바뀌어짐을 알 수 있다.

Froude-Krylov force는 Fig. 5에서 보인 바와 같이 수심에 따른 변화가  $\omega^2 a/g < 1.5$ 에서 약간 나타나지만 이보다 큰 진동수에서는 그 차이가 없다고 보아도 좋다.

수평방향으로 작용하는 diffraction force중 물입자의 가속도 위상에서 작용하는 성분( $e_x$ )과 속도위상에서 작용하는 성분( $d_x$ )을 각각 Fig. 6과 Fig. 7에 도시하였다. 부호가 반대지만 전반적인 경향은 매우 유사하여 수심이 얇을수록 절대값이 커지고  $\omega^2 a/g = 1.5$  근처에서 부호가 바뀌고 있다.

이들 결과를 종합하여 계산된 수평운동의 진폭과 위

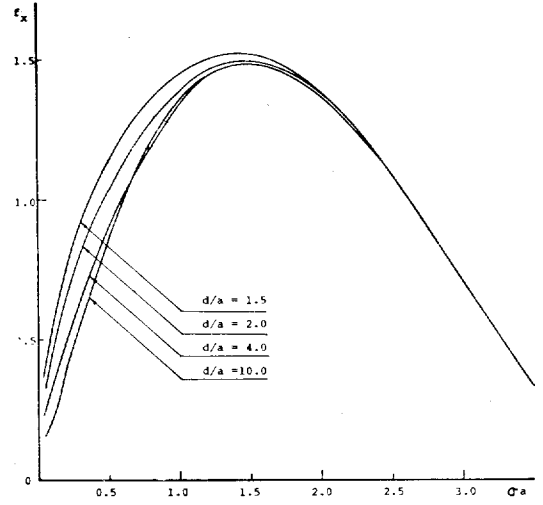


Fig. 5. Froude-Krylov force coefficients in horizontal direction

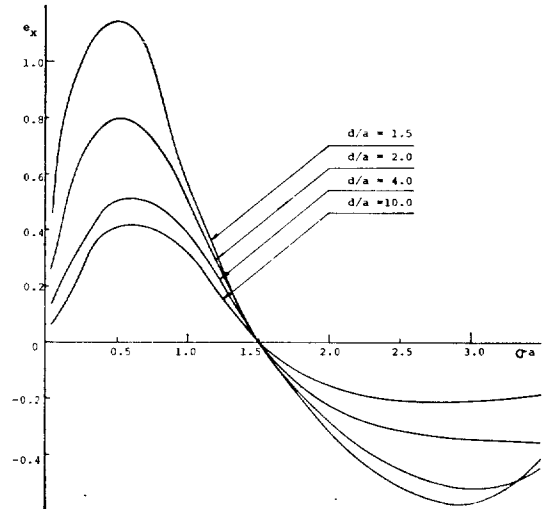


Fig. 6. Diffraction exciting force coefficients in horizontal direction

상차를 Fig. 8과 Fig. 9에 제시하였다. 운동진폭의 경우  $\omega^2 a/g > 0.5$ 의 범위에서는 수심의 영향이 거의 없지만 그보다 작은 진동수의 영역에서는 많은 차이를 보이고 있다. 즉, 무한수심의 경우에는 잘 알려진 바와 같이  $\omega^2 a/g \rightarrow 0$ 의 극한치로  $|x_0/a_0| \rightarrow 1$ 이 되나 유한수심의 경우 진폭비는 매우 큰 값을 갖게 된다.

작은 진동수의 영역이란 파장이 매우 긴 경우를 뜻하고 물체의 크기에 비하여 파장이 길 때에는 물체는 물입자와의 상대운동없이 물입자와 같은 운동을 하게

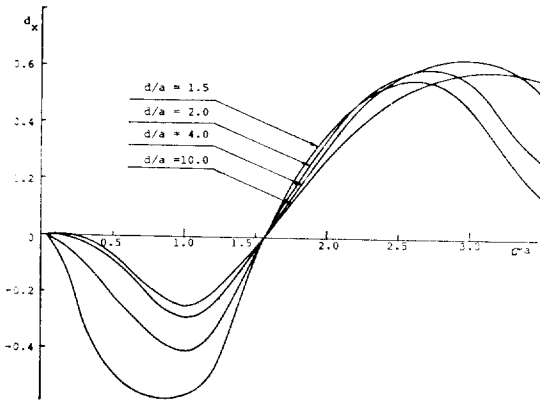


Fig. 7. Diffraction damping coefficients in horizontal direction

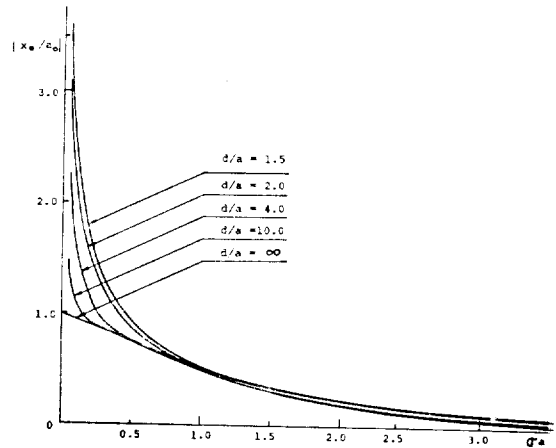


Fig. 8. Amplitude ratio for surge of a sphere

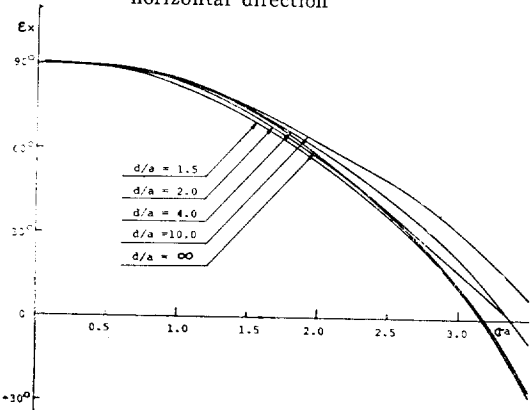


Fig. 9. Phase lag for surge of a sphere

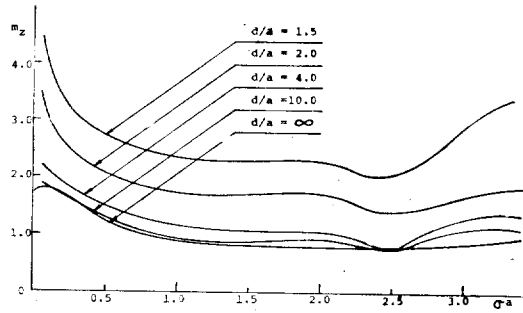


Fig. 10. Added mass coefficients of a heaving sphere

Table 1. Numerical comparison of horizontal motion of water particle and sphere in low frequencies

$d/a$	$\omega^2 a/g$	$ka$	$\xi_0/a_0$	$ x_0/a_0 $
10	0.05	0.077	1.55	1.49
	0.1	0.120	1.20	1.12
4	0.05	0.116	2.33	2.27
	0.1	0.170	1.69	1.60
2	0.05	0.160	3.23	3.11
	0.1	0.232	2.33	2.19
1.5	0.05	0.186	3.66	3.62
	0.1	0.264	2.63	2.50

된다. 정수면상에서 물입자의 수평운동진폭은 무한수심의 경우 파의 진폭과 일치한다. 한편 유한수심에서는  $\xi_0 = a_0 \coth kd$ 로 표시되어 수심과 파수에 따라 변하게 된다. 이러한 관점에서 표 1에는  $d/a=10, 4, 2, 1.5$ 에 대하여 파장이 매우 긴 경우인  $\omega^2 a/g=0.05$ 와

0.1일때 정수면에서 물입자의 수평운동진폭을 계산하여 구의 수평운동진폭과 대비하였다. 대체로 보아 두 값은 매우 유사하며 두 값은  $\omega^2 a/g=0.1$ 일때 보다  $\omega^2 a/g=0.05$ 일때 더욱 근사하여짐을 알수 있다.

그러나 위상차는 Fig. 9에 보인바와 같이 수심에 관계없이 진동수에 따라 매우 비슷한 양상을 띄우고 있다. 즉,  $\omega^2 a/g < 0.5$ 까지는  $\pi/2$ 의 위상차를 보이고 있으며 이 보다 큰 진동수에서는 수심에 따라 약간씩 차이가 나타나나 전체적으로는 0으로 감소한다.

한편 Fig. 10에는 수직운동에 의한 부가질량계수의 변화를 보여주고 있다. 수평운동에서와 마찬가지로 수심이 얕을수록 부가질량은 커지고, 특히  $\omega^2 a/g=0$  근처에서 매우 큰 값을 갖게된다. 무한수심의 경우  $\omega^2 a/g > 0.5$ 에서는 별다른 변화없이 조금씩 감소하다  $\omega^2 a/g=2.5$ 에서부터 그 경향이 바뀌어 서서히 증가하는 것으로 알려져 있는데, 유한수심의 경우에는  $\omega^2 a/g=2.5$  부근에서 갑자기 부가질량이 감소하였다가 급격히 증



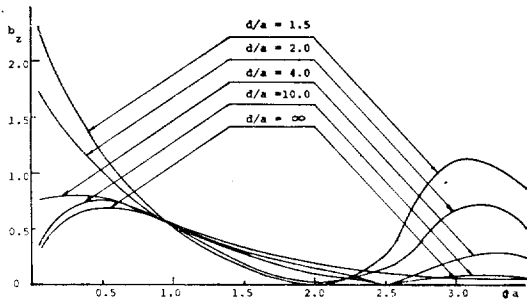


Fig. 11. Hydrodynamic damping coefficients of a heaving sphere

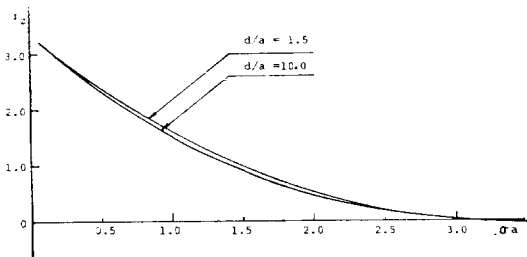


Fig. 12. Froude-Krylov force coefficients in vertical direction

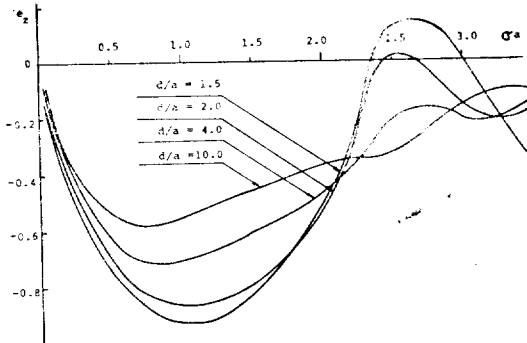


Fig. 13. Diffraction exciting force coefficients in vertical direction

가하는 결과를 얻었다. 특히나 2차원의 문제에서는 수심이 많아지면 파수가 작은 범위에서는 부가질량이 무한수심의 경우보다 작아지는데 본 논문에서 3차원 구에 대하여 얻은 결과는 반대의 경향을 보이고 있는 점에 주목할 필요가 있다.

수직운동에 의한 동유체감쇠력도 무한수심에 비하여  $\omega^2 a/g < 0.5$  범위에서 매우 큰 값을 갖고  $2.0 < \omega^2 a/g < 2.5$ 에서 0에 접근하였다가 다시 증가하는 영향을 Fig. 11에서 볼 수 있다

Froude-Krylov force는 수심에 따른 변화가 무시할 만큼 작다. 수평방향의 경우 진동수에 따른 변화는 포

물선을 그리는데 반하여 수직방향의 경우 Fig. 12에 도시한 것처럼 진동수에 따라 점진적으로 감소한다.

한편 수직방향으로 작용하는 diffraction force는 파의 진동수에 따라 매우 심한 변화를 보여주고 있다. 즉,  $e_x$ 를 도시한 Fig. 13과  $e_z$ 를 도시한 Fig. 14에 나타나 있듯이  $\omega^2 a/g = 2.5$ 와 3.0 근처에서 심한 굴곡을 보이며 이러한 경향은 수심이 깊어질수록 더욱 심하다.

이상의 결과를 종합하여 얻은 구의 수직운동진폭과 입사파에 대한 운동의 위상차를 Fig. 15와 Fig. 16에 각각 표시하였다. 진폭의 최대치는  $d/a = 10$ 일때 2.12로 제일 큰 값을 보여주고 있으며 이에 대응하는 원진동수는  $\omega^2 a/g = 1.0$ 이다. Fig. 15에는 비요목적으로 무한 수심의 결과를 함께 예시하였는데 진폭의 최대치는 같은  $\omega^2 a/g = 1.0$ 에서 일어나나 그 값은 1.83으로  $d/a = 10$ 보다 작은 값을 갖는다.

수심이 깊어지면서 진폭의 최대치는 감소하며 또한 최대치가 얻어지는 진동수도 작아짐을 알 수 있다. 이는 Fig. 11에서 볼 수 있듯이 수심이 깊어지면서 동유체감쇠력이  $\omega^2 a/g < 1.0$  구간에서 급격히 증가함에 그 원인을 찾을 수 있다.

한편 위상차도 같은 경향을 보여서 수심이 깊어질수록 그 값이 커지며 위치도 작은 진동수에서 나타난다. 또한 무한수심과  $d/a = 10$ 의 경우와는 달리 위상차의 급

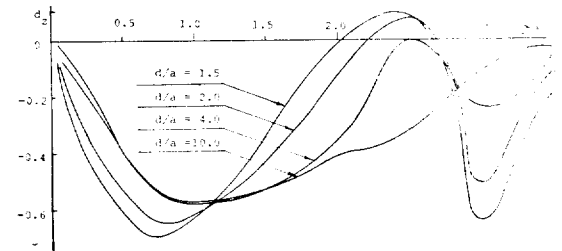


Fig. 14. Diffraction damping coefficients in vertical direction

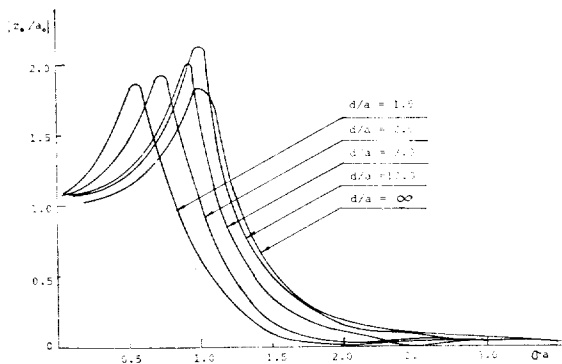


Fig. 15. Amplitude ratio for heave of a sphere

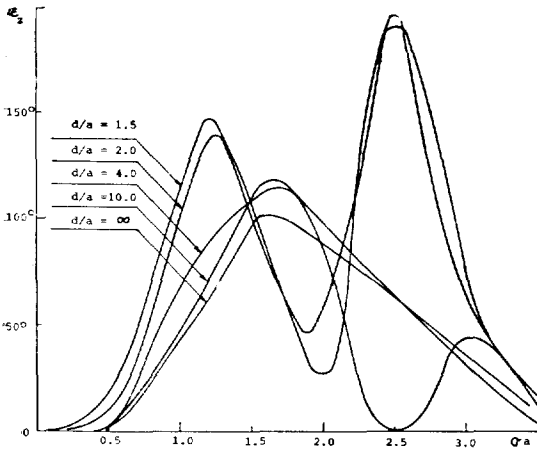


Fig. 16. Phase lag for heave of a sphere

격한 변화가 두군데에서 나타나며, 특히  $d/a=2.0$ 과  $d/a=1.5$ 인 경우에는 두번째 극점의 위상차가 최대치가 된다.

결론

본 논문에서는 유한수심의 해상에서 평면규칙파에 놓인 구의 운동특성을 해석하여 여러가지 수심에 대한 수치계산을 수행하였다. 해석법은 유한수심에 놓인 구에 대한 diffraction문제에 적용한 Black의 방법을 채택하여 이를 radiation 문제로 확대 적용하였다.

축대칭 유동의 문제에서는 표면적분을 선적분으로 변환시킬 수 있으며, 특히 이 선적분을 분할구간에서 직접 수행하는 대신 각 구간의 대표점에서의 피적분치에 구간의 길이를 곱하는 단순한 방법으로도 실용적 목적으로 받아들일 수 있는 수치상의 정확도를 얻을수 있다.

유한수심에서의 동유체력은 Froude-Krylov force만 제외하고 무한수심의 경우에 비하여 변화가 심하고 그 차이 또한 매우 크다. 특히 2차원의 유한수심에서 알려진 바와 같은 부가질량의 감소를 찾을 수 없으며 오히려 수심이 얇아짐에 따라 급격히 증가함을 확인할 수 있다.

이러한 동유체력의 차이로 인하여 유한수심에서의 운동특성 또한 무한수심의 경우에 비하여 판이하게 다른 양상을 보여주고 있다. 즉, 수평운동의 진폭은 저진동수 범위에서 물입자의 수평운동진폭과 같아져 수심이 얇아질수록 증가하게 된다. 한편 수직운동의 경우 수심이 얇아질수록 동유체력감력이 증가되어 수직운동의 진폭은 감소되며 공진이 발생하는 진동수도 작아진

다. 특히 수직운동의 경우 위상차의 변화가 심하여 수심이 얇아지면 그 경점이 두군데에서 나타난다.

이상으로부터 유한수심에 놓인 구의 운동응답은 독특한 특성을 지닌 것으로 예견되며 이에 대한 실험적 검증이 요구된다.

감사의 말

본 연구는 現代그룹이 서울대학교 공과대학 조선공학과에 기증한 교수연구활동기금의 1981년도분의 일부를 배정받아 수행하였다. 이에 연구기금을 제공한 현대그룹에 깊은 감사를 드린다.

본 논문의 해석방법을 모색하는데 결정적인 도움이 된 문헌을 일러주신 Stevens Institute of Technology의 金貞勳교수와 동유체력에 대한 많은 토론에 응하여주신 서울대학교의 黃宗屹교수께 감사드립니다.

끝으로 본 논문의 수치계산은 서울대학교 공과대학 전산실의 Facom 203과 한국과학기술원 전산실의 CDC-Cyber 174기종을 사용하였음을 부기한다.

참고 문헌

- [1] T.H. Havelock, "Waves due to a Floating Sphere Making Periodic Heaving Oscillation", Proceedings of the Royal Society, London, England, Vol. 231, Series A. pp. 1-7, 1955.
- [2] R. Barakat, "Vertical Motion of a Floating Sphere in a Sine-Wave Sea" J. Fluid Mechanics, Vol. 13, pp. 540-556, 1962.
- [3] W.D. Kim, "On a Free-Floating Ship in Waves", J. Ship Research, Vol. 10, pp. 182-200, 1965.
- [4] 朴贊旭 · 崔恒洵, "規則波에 놓인 球의 水平運動에 對한 解析", 大韓造船學會誌, 第18卷 第1號, pp. 19-27, 1981.
- [5] F. John, "On the Motion of Floating Bodies-I", Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 2, 1949.
- [6] J.L. Black, "Wave Forces on Vertical Axisymmetric Bodies", J. Fluid Mech, Vol. 67, Part 2, pp. 369-376, 1975.
- [7] J.D. Fenton, "Wave Forces on Vertical Bodies of Revolution", J. Fluid Mech, Vol. 85, Part 2, pp. 241-255, 1978.