

가우스 雜音을 고려한 非線形 펄스 變調 시스템의 安定度 分析

(Stability Analysis of Nonlinear Pulse-Modulated System Subject to Gaussian Noise)

姜 永 採*
(Young Chae Kang)

要 約

가우스 雜音의 출현시 PWM 시스템의 安定도가 研究되었다. 一般 시스템은 종래의 서술 함수 方法을 利用할 때 非線形 素子和 線形 素子로 나누어진다. 等價 어드미턴스 개념이 이 시스템의 非線形 素子の 傳達 特性을 구하는데 使用되었다. 이 論文에서는 가우스 雜音만이 존재하는 경우 자기 발진 조건이 유도되었고 그 결과를 컴퓨터 시뮬레이션으로 分析하였다.

Abstract

The stability of general pulse-width modulation system with Gaussian random disturbance was discussed. General system is divided into nonlinear and linear elements using the conventional describing function method. The concept of the equivalent admittance was used to find the transfer characteristic of the nonlinear element of the system. In this paper the self-sustained oscillation condition in the autonomous system was derived and the results was analyzed with computer simulation.

I. 序 論

非線形 PM 制御 시스템은 현재 우주선체의 制御에 광범위하게 使用되고 있다.

과거에는, Delfeld와 Murphy^[1]가 變調된 describing function으로 PWM 시스템의 安定度를 조사하였고 Murphy와 Wu^[2]는 Liapunov 함수를 使用해서 안정도 판별을 연구했다.

그러나 이런 여러 사람들이 제시한 安定度 판별법은 랜덤혼신에는 적용이 안되었고 단지 Gupta와 Jury^[3]가 가우스 랜덤 入力에 대한 PWM 시스템 出力의

實効值를 구하는 方法으로 안정도를 연구했다.

따라서 그들은 PAM에서 PWM을 발전시켰고 그 결과는 一係 혹은 二係 시스템에 적용되었다.

랜덤 혼신을 고려한 일반적인 PWM 시스템의 安定度 결정 方法은 문헌상으로 조사되지는 않았다.

이 論文에서 使用한 方法은 쌍 입력 서술함수(dual input describing function)를 使用했고 그것은 통계학적 線形化 理論에 부합한 종래의 서술함수 方法을 발전시킨 것이다.

Gibson에 의한 종래의 서술함수 方法은 基本 周波數외의 高調波는 무시한 線形化 方法이다.

서술함수 方法은 보통 正張波 信號뿐 아니라 랜덤信號와 혼신을 설명하기 위해 쌍 입력인 경우까지 발전시켰다. [4],[5],[6]

非線形 素子の 等價 Adm.(equivalent admittance)라 불리우는 雙入力 서술 함수를 使用해서 가우스 랜덤

*正會員, 仁川大學 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Incheon Univ.)
接受日字: 1982年 10月 7日

혼신이 있을 때의 연속 非線形 시스템의 安定度를 Sridhar와 Oldenburger^[7]가 研究했다.

이 論文은 그들의 研究를 일반적인 非線形 시스템의 분석에 使用할 수 있도록 발전시켰다.

특히 아주 일반적인 부분 직선화 傳達 特性의 等價 Adm.가 구해졌다. 이것은 매우 일반적인 非線形 素子가 부분 직선화 傳達 特性으로 어느 정도까지 근사해석 될 수 있기 때문에 매우 유용하다.

II. 가우스 雜音이 있는 부분 직선화 傳達 特性의 等價 Adm.

참고문헌[13]에 의하면, 부분 직선화 傳達 特性의 等價 Adm. $J_{nl}(A, \phi_0)$ 는 정현파 입력과 동일한 周波數를 갖는 出力의 크기 P와 정현파 입력의 크기 A의 復合比率이다. 즉

$$J_{nl}(A, \phi_0) = P/A \tag{1}$$

여기서 ϕ_0 는 雜音의 분산이고 nl은 非線形 裝置를 의미한다.

非線形 裝置의 入力은 정현파와 가우스 분포를 갖는 定常 狀態 랜덤 雜音으로 구성되고 雜音의 스펙트럼 密度에서 가장 낮은 해당 周波數 成分이 入力 정현파보다 훨씬 더 큰 周波數라 가정한다.

이 等價 Adm.의 使用은 종래의 서술 함수 방법을 발전시킨 것인데 일반적인 시스템 분석에는 적용이 안되었다.

Sridhar와 Oldenburger^[7]는 순간적인 非線形 素子의 等價 Adm.의 式을 積分 形式으로 발전시켰다.

入力を x, 出力을 y 라 하면 非線形 裝置의 傳達 特性은

$$y = f(x) \tag{2}$$

라 하고 우선 $f(x)$ 는 푸리에 변환 $F(j\omega)$ 가 들어 있는 積分 형태로 표시된다고 가정하자. 즉,

$$y = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega x} d\omega \tag{3}$$

와

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \tag{4}$$

두 入力 x를

$$x = x_s + x_n \tag{5}$$

의 형태로 가정하고

$$x_s = A \cos(\omega t - \theta) \tag{6}$$

이고 x_n 은, 평균이 0 및 분산 ϕ_n 인 雜率 密度를 갖는 정상 상태의 가우스 랜덤 과정에서의 샘플 函數로로서 그 確率 密度는

$$P(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi_n}} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2\phi_n}\right) \tag{7}$$

이다.

이 조건으로 等價 Adm.은 아래와 같이 결정된다.

$x_1 = x(t), x_2 = x(t + \tau)$ 인 入力 joint特性 函數 $M_x(j\omega, j\omega', \tau)$ 는

$$M_x(j\omega, j\omega', \tau) = M_{x_s}(j\omega, j\omega', \tau) M_{x_n}(j\omega, j\omega', \tau) \tag{8}$$

로 주어지고, 여기서 $M_{x_s}(j\omega, j\omega', \tau)$ 는 $x_s(t)$ 와 $x_s(t + \tau)$ 의 조인트 特性 函數이고, $M_{x_n}(j\omega, j\omega', \tau)$ 는 $x_n(t)$ 와 $x_n(t + \tau)$ 의 joint 特性 函數이다. 참고문헌[12]에 따르면,

$$M_{x_s}(j\omega, j\omega', \tau) = J_0(A\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \omega \tau}) \tag{9}$$

$$M_{x_n}(j\omega, j\omega', \tau) = \exp\left[-\frac{\phi_n}{2}(u^2 + v^2) - \phi_n(\tau)uv\right] \tag{10}$$

이고, 여기서 $J_0(\cdot)$ 는 Zero 次的 Bessel 函數이고

$$\phi_n(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x_n(t) x_n(t + \tau) dt \tag{11}$$

은 雜音의 자기상관 函數이다.

式(9)와 (10)을 (8)에 代入하면

$$M_x(j\omega, j\omega', \tau) = J_0(A\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \omega \tau}) \times \exp\left[-\frac{\phi_n}{2}(u^2 + v^2) - \phi_n(\tau)uv\right] \tag{12}$$

이 되고, 참고문헌 [8]의 Bessel 函數 확장에 의하면

$$J_0(A\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \omega \tau}) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n J_n(Au) J_n(Av) \cos_n \omega \tau \tag{13}$$

이고 여기서 ϵ_n 은

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1. & n = 0 \\ 2. & n = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{14}$$

으로 노이만 계수이다.

$$\text{그리고 } \exp[-\phi_n(\tau)uv] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[\phi_n(\tau)uv]^k}{K!} \tag{15}$$

式(13)과 (15)를 (12)에 代入하면

$$\begin{aligned}
 Mx(ju, jv, \tau) &= \exp\left[-\frac{\phi_0}{2}(u^2 + v^2)\right] \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(Au) J_n(Av) \cos n\omega\tau \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \\
 &\times \frac{[\phi_n(\tau)uv]^k}{K!} \quad (16)
 \end{aligned}$$

이 되고 出力 자기 상관 函數는

$$\phi_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)P(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \quad (17)$$

이고 $P(x_1, x_2)$ 는 x_1 과 x_2 의 joint 確率 密度이다. (3)式에 의해

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) e^{jux_1} du \quad (18)$$

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jv) e^{jvx_2} dv \quad (19)$$

인데 式(18)과 (19)를 (17)에 代入하면

$$\begin{aligned}
 \phi_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) \int_{-\infty}^{\infty} F(jv) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \\
 &P(x_1, x_2) e^{jux_1 + jvx_2} dx_1 dx_2 dv du \quad (20)
 \end{aligned}$$

이고, 참고문헌[9]에 의해

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, x_2) e^{jux_1 + jvx_2} dx_1 dx_2 \\
 = Mx(ju, jv, \tau) \quad (21)
 \end{aligned}$$

이고 式(21)을 (20)에 代入하면

$$\begin{aligned}
 \phi_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) F(jv) \\
 &Mx(ju, jv, \tau) dv du \quad (22)
 \end{aligned}$$

가 되고 式(16)의 $Mx(ju, jv, \tau)$ 를 式(22)에 代入하고 積分과 冪의 順序를 바꾸면

$$\begin{aligned}
 \phi_y(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n\omega\tau \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{[\phi_n(\tau)]^k}{K!} \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) J_n(Au) u^k e^{-\frac{\phi_0 u^2}{2}} du \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} F(jv) J_n(Av) v^k e^{-\frac{\phi_0 v^2}{2}} dv \quad (23)
 \end{aligned}$$

이 된다.

基本 周波數 ω 의 $y(t)$ 成分을 결정하기 위해서는 우선 基本 周波數를 갖는 $\phi_y(\tau)$ 成分을 결정하여야 한다. $\tau \rightarrow \infty$ 하면 $\phi_y(\tau)$ 의 주기적인 成分만이 남는다. 雜音의 자기상관 函數는 주기적 항이 불필요하므로

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_n(\tau) = 0 \quad (24)$$

이다. 式(24)에 의하면, $\tau \rightarrow \infty$ 이므로 $k=0$ 에서의 (23)式이 남는다. 즉

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_y(\tau) &= \phi_y(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n \cos n\omega\tau \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) J_n(Au) e^{-\frac{\phi_0 u^2}{2}} du \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} F(jv) J_n(Av) e^{-\frac{\phi_0 v^2}{2}} dv \quad (25)
 \end{aligned}$$

이고, 周波數 ω 의 $\phi_y(\infty)$ 의 成分 A_1 은 $n=1$ 일때의 항이다. 즉,

$$\begin{aligned}
 A_1 \cos \omega\tau &= [\phi_y(\infty)]_{n=1} \\
 &= -2 \cos \omega\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) J_1(Au) e^{-\frac{\phi_0 u^2}{2}} du \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} F(jv) J_1(Av) e^{-\frac{\phi_0 v^2}{2}} dv \quad (26)
 \end{aligned}$$

혹은

$$A_1 = -2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(ju) J_1(Au) e^{-\frac{\phi_0 u^2}{2}} du \right]^2 \quad (27)$$

참고문헌[12]에 의해 周波數 ω 의 出力 成分의 크기 P 는 A_1 과

$$P = \sqrt{2} A_1 \quad (28)$$

의 관계가 있다.

式(27)의 A_1 을 (28)에 代入하면

$$P = 2j \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) J_1(Au) e^{-\frac{\phi_0 u^2}{2}} du \quad (29)$$

가 된다.

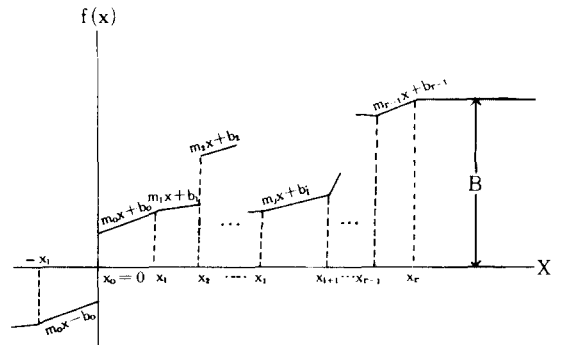


그림 1. 일반적 부분 직선화 전달 특성

Fig. 1. General piecewise-linear transfer characteristic.

式(29)를 式(1)에 代入하면 等價 Adm.는

$$\begin{aligned}
 J_{\omega}(A, \phi_0) \\
 = \frac{2j}{A} \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) J_1(Au) e^{-\frac{\phi_0 u^2}{2}} du \quad (30)
 \end{aligned}$$

이 되고 J_1 은 1次 Bessel 函數이다.

이제 부분 직선화 傳達 特性의 等價 Adm. 를 구하기 위한 傳達 特性 $f(x)$ 는 그림 1과 같다.

$f(x)$ 는 $x = x_r$ 에서 포화되는 x 의 부분 직선 單價 기함수라 하자.

일반적으로 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} -B & x < -x_r \\ m_i x - b_i & -x_{i+1} < x < -x_i \\ m_i x + b_i & x_i < x < x_{i+1} \\ B & x_r < x \end{cases}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (31)$$

이다.

式(31)의 $F(j\omega)$ 는 (4)를 使用해서 얻어진다. 積分 하면

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^r c_{ni} \right) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n-1} \quad (32)$$

$$C_{nr} = (2n+1) B x_r^{2n} \quad (33)$$

이고 여기서 C_{ni} 는

$$C_{ni} = 2nm_i (x_i^{2n+1} - x_{i+1}^{2n+1}) + (2n+1)b_i (x_i^{2n} - x_{i+1}^{2n}),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (34)$$

等價 Adm. $J_{ne}(A, \phi_0)$ 는 式(32)와 (30)으로 구할 수 있다.

$$J_{ne}(A, \phi_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \left(\frac{1}{\sqrt{2\phi_0}} \right)^{2n+1}$$

$$\left(\sum_{i=0}^r C_{ni} \right) M \left(n + \frac{1}{2}, 2, -\frac{A^2}{2\phi_0} \right) \quad (35)$$

여기서 $M(a, b, z)$ 는 Kummer 函數이다.

III. 等價 Adm. 와 그 使用의 例

1. 포화 양자화 장치의 等價 Adm. 와 量子化된 시스템의 安定度 분석

그림 2는 포화Q(포화 양자화)의 특별한 형태의 傳

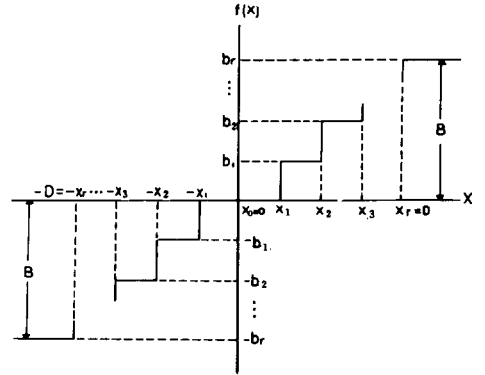


그림 2. 일반적인 포화 Q의 傳達 特性

Fig. 2. Transfer characteristic of general saturating quantizer.

達 特性인데 이것은 첨자 r 이 어떤 값을 가진 경우의 일반적인 特性이다.

$$X_i = \frac{i}{r} D, m_i = 0, b_i = \frac{i}{r} B, i = 0, 1, 2, \dots, r$$

이것을 式(33)과 (34)에 代入하면

$$C_{ni} = (2n+1) \frac{i}{r} B \left[\left(\frac{i}{r} D \right)^{2n} - \left(\frac{i+1}{r} D \right)^{2n} \right],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (36)$$

$$C_{nr} = (2n+1) B D^{2n} \quad (37)$$

각 C_{ni} 를 summation 하면

$$\sum_{i=0}^r C_{ni} = (2n+1) B D^{2n}$$

$$\left[1 + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{i}{r} \left[\left(\frac{i}{r} \right)^{2n} - \left(\frac{i+1}{r} \right)^{2n} \right] \right] \quad (38)$$

다시 정리하면

$$\sum_{i=0}^r C_{ni} = (2n+1) B D^{2n} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left(\frac{i}{r} \right)^{2n} \quad (39)$$

式(39)를 (35)에 代入하면

$$J_{ne}(A, \phi_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{B}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{D}{\sqrt{2\phi_0}} \right)^{2n+1}$$

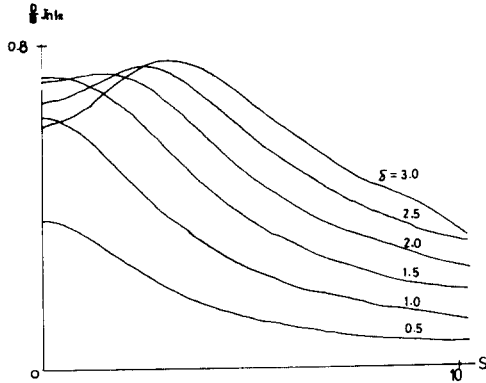


그림 3. Q의 정규화된 等價 Adm. ($r = 3$)

Fig. 3. Normalized equivalent admittance of quantizer for ($r = 3$).

$$\times \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left(\frac{i}{r}\right)^{2n} M\left(n + \frac{1}{2}, 2, \frac{-A^2}{2\phi_0}\right) \quad (40)$$

이고 다음과 같이 정규화 할 수 있다.

$$\frac{D}{B} J_{n,1}(A, \phi_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} \times \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left(\frac{i}{r}\right)^{2n} M\left(n + \frac{1}{2}, 2, -\frac{s^2}{2}\right) \quad (41)$$

여기서

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{\phi_0}} \quad (42)$$

$$S = \frac{A}{\sqrt{\phi_0}} \quad (43)$$

(41) 式은 디지털 컴퓨터로 δ 와 s 의 여러 값들과 $r = 3$ 으로 계산되고 그림 3과 같은 그래프를 나타낸다. 그림 4의 시스템을 等價 Adm. 방법에 의한 자기 지속 發振의 관점에서 살펴 보기로 한다.

자기 지속 發振 경우 고차항을 무시할 때 시스템 誤差는

$$e(t) = -C(t) + e_n(t) \quad (44)$$

혹은

$$e(t) = E_m \sin \omega t + e_n(t) \quad (45)$$

여기서 $e_n(t)$ 는 분산 ϕ_0 의 가우시안 랜덤 과정에서의 샘플函數이다.

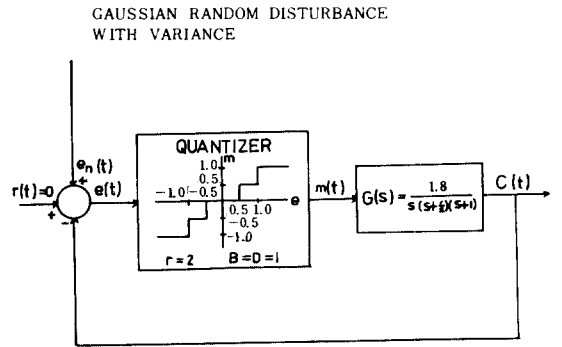


그림 4. 等價 Adm.방법에 의한 Q의 제한 시스템

Fig. 4. Feedback system with Quantizer to be analyzed by equivalent admittance method.

이 시스템의 周波數 영역 방정식은

$$c(j\omega) = G(j\omega) m(j\omega) \quad (46)$$

$$m(j\omega) = -J_{n,1}(E_m, \phi_0) C(j\omega) \quad (47)$$

式 (46)과 (47) 를 합하면

$$1 + J_{n,1}(E_m, \phi_0) G(j\omega) = 0 \quad (48)$$

혹은

$$G(j\omega) J_{n,1}(E_m, \phi_0) = -1 \quad (49)$$

式 (49)의 Nyquist 곡선은 고정된 크기 E_m 과 周波數 값의 변화에 대해 작성된다.

$G(j\omega) J_{n,1}(E_m, \phi_0)$ 곡선과 임계점 $(-1, j0)$ 의 교점에서 이 시스템은 발진한다.

이것은 상수 E_m 커브와 임계점과의 관계에 의해 安定된 리미트 사이클 혹은 不安定한 리미트 사이클이

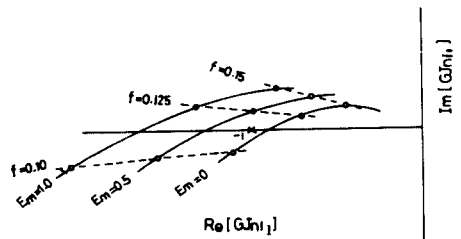


그림 5. 그림 4 시스템의 나이퀴스트 곡선

Fig. 5. Nyquist curves for system of Fig.4 with $\phi_0 = 0.1 - 1$.

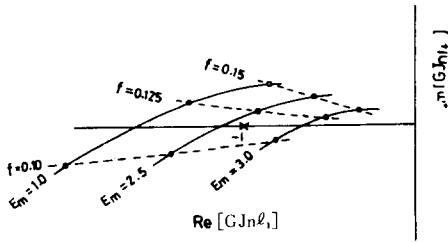


그림 6. 그림 4 시스템의 나이퀴스트 곡선
Fig. 6. Nyquist curves for system of Fig. 4 with $\phi_0 = 0.1 - j$.

된다. 이 예의 나이퀴스트 곡선은 E_m, w_1, ϕ_0 의 변화치에 대한 $G(j\omega) J_{w_1}(E_m, \phi_0)$ 의 실수부와 허수부를 디지털 컴퓨터 계산으로 작성되었다. 그림 5와 6의 커브는 $\phi_0 = 0.1$ 인 잡음에 대한 것이다. 이들 곡선은 $E_m = 0.15, f = 0.11$ 에서 임계점 $(-1 + j0)$ 와 $E_m = 2.7, f = 0.11$ 에서 임계점과 교차하는데 이러한 값에서 리미트 사이클(자기 지속 發振)의 發生을 나타낸다. 그림 5에서 E_m 이 0.15보다 작을 때 동작이 안정하고, 0.15 이상일 때는 불안정한 동작임을 알 수 있다. 이에 반해 그림 6에서는 $E_m = 2.7, f = 0.11$ 에서의 limit cycle이 安定하다는 것을 알 수 있다.

그림 7의 커브는 $\phi_0 = 0.8$ 잡음에 대한 것이다.

이 경우 하나의 安定한 리미트 사이클은 $E_m = 2.6, f = 0.11$ 에서 나타난다. 이 과정은 잡음 분산으로 부터 수행되었다. 결과는 표 1과 그림 8에 나타난다.

等價 Adm. 방법의 결과를 증명하기 위해서 그림 4의 시스템이 $T_{ou}^{(10)}$ 에 의한 상태 공간 방법을 使用해서 디지털 컴퓨터로 시뮬레이션 되었다.

표 1에서 等價 Adm. 방법에 의한 예시적인 發振과 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 관찰된 發振이 $f = 0.11$ 에서 모두 發生됨을 알 수 있고 安定한 리미트 사이클은 모든 ϕ_0 값에서 존재한다.

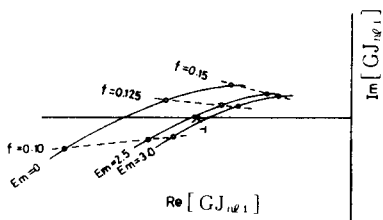


그림 7. 그림 4 시스템의 나이퀴스트 곡선
Fig. 7. Nyquist curves for system of Fig. 4 with $\phi_0 = 0.8$.

표 1. 그림 4 시스템의 자기 발진 비교

Table 1. Predicted and observed self-oscillations in the system of Fig. 4.

| 잡음분산 ϕ_0 | 등 가 Adm. 방법 | | 컴퓨터시뮬레이션 | |
|---------------|-------------|----------|----------|----------|
| | 비안정 | 안정 | 안정 | 안정 |
| | 크기 E_m | 크기 E_m | 크기 E_m | 크기 E_m |
| 0.1 | 0.15 | 2.7 | 3.0 | |
| 0.2 | — | 2.9 | 3.0 | |
| 0.4 | — | 2.8 | 2.95 | |
| 0.6 | — | 2.7 | 2.85 | |
| 0.8 | — | 2.6 | 2.75 | |
| 1.0 | — | 2.5 | 2.65 | |
| 1.4 | — | 2.4 | 2.55 | |
| 1.8 | — | 2.1 | 2.35 | |
| 2.2 | — | 1.8 | 1.95 | |

(주파수 $f = 0.11$ 에서)

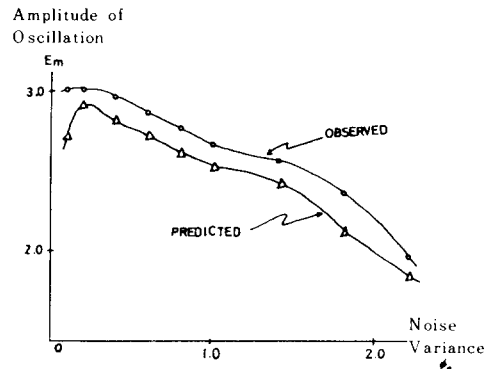


그림 8. 그림 4 시스템의 安定한 자기 發振의 예시치와 결과치

Fig. 8. Predicted and observed stable self-oscillations in the system of Fig. 4.

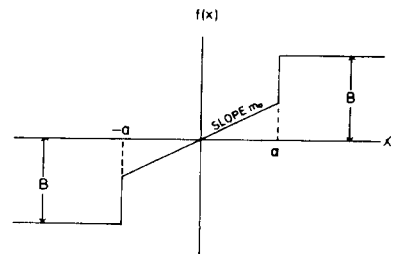


그림 9. 線形 릴레이 둘-모드 Amp.의 傳達 特性
Fig. 9. Transfer characteristic of linear-relay dual-mode amplifier.

모든 경우 그 크기는 예시된 크기보다 약간 크고 가장 큰 誤差가 12%였다.

개략적인 분석이라면 결과는 비교적 만족할 수 있다. 크기가 작으며 不安定한 리미트 사이클은 $\phi_0 = 0.1$ 에서였다.

이 리미트 사이클의 크기에 관련된 상당량의 雜音때문에 자기 발진의 관찰이 어려웠다.

2. 線形 릴레이 둘-모드 Amp. 의 等價 Adm.

그림 9의 傳達 特性은 Gibson과 Mevov^[11]에 의한 線形 릴레이 둘-모드 Amp의 特性이다.

이 例에서

$$r = 1, x_1 = a, m_0 = m_o, b_0 = 0$$

式(33), (34), (35)에 이 파라미터를 使用하면 等價 Adm. 는

$$J_{n\omega_2} = (A, \phi_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a}{\sqrt{2\phi_0}} \right)^{2n+1}$$

$$\left(\frac{B}{a} - \frac{2n \cdot m_0}{2n+1} \right) M \left(n + \frac{1}{2}, 2, \frac{-A^2}{2\phi_0} \right) \quad (50)$$

이 된다.

IV. PWM 시스템에 대한 等價 Adm. 방법의 응용과 安定度 分析

PWM 은 每 샘플링 주기의 초기에서 펄스를 發生하는 非線形 샘플 데이터 裝置이다.

이 펄스간격은 人力의 크기에 비례한다. 펄스 간격은 샘플링 주기보다 작으므로 PWM은 이 값에서 필수적으로 포화된다.

펄스의 크기는 人力과 같은 대수적인 부호를 갖는 상수이다. 그림10은 대표적인 PWM의 入出力 신호이다. PWM은 재래적인 릴레이 형태의 제어보다, 더욱 精巧한 on-off 制御 형태이다.

그림10의 PWM의 入出力 特性은

$$m(t) = \begin{cases} M \operatorname{sgn}[e(nT)], & nT < T \leq nT + \tau_n \\ 0, & nT + \tau_n < T \leq (n+1)T \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (51)$$

$$\text{여기서 } \tau_n = T \operatorname{sat} \left[\frac{\alpha |e(nT)|}{T} \right] \quad (52)$$

이고 M, α , T는 PWM의 파라미터이고

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

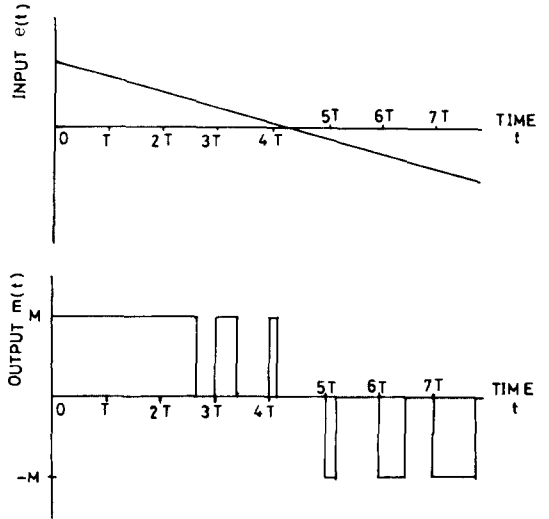
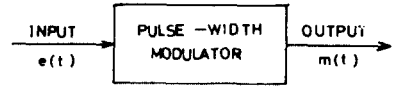


그림10. 대표적인 PWM 入, 出力

Fig.10. Typical pulse-width modulator.

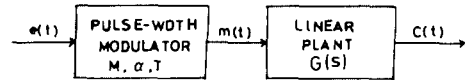


그림11. 開 루우프 PWM 시스템

Fig.11. Open-loop pulse-width modulated system.

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & |x| \leq 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

이다. 그림11은 토의할 開 루우프 PWM 시스템이다.

G(s)는

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (53)$$

으로 나타내고 P(s)와 Q(s)는 s의 다항식이다.

G(s)는 실수 극점을 갖고 있으며 분자의 차수가 분모의 차수보다 낮은 것으로 한다.

이 가정이 사실이라면 G(s)는

$$G(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i}{s + a_i} \quad (54)$$

의 부분 분수로 표시된다.

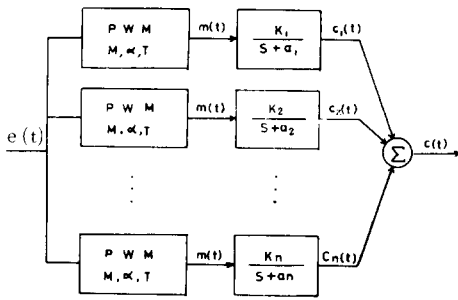


그림 12. 開 루우프 PWM 시스템의 병렬형
Fig. 12. Open-loop pulse-width modulated system in parallel form.

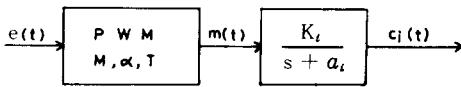


그림 13. 그림 12의 i 번째 지로
Fig. 13. Ith branch of open-loop pulse-width modulated system of Fig. 12.

開 루우프 시스템을 그림 12와 같이 병렬 형태로 놓으면 그림 13의 i 번째 지로의 미분 방정식은

$$\dot{c}_i(t) = -a_i c_i(t) + K_i m(t) \tag{55}$$

이다.

式(51)의 $m(t)$ 값을 (55)에 代入하면

$$\dot{c}_i(t) = -a_i c_i(t) + K_i M \text{sgn}[e(nT)], \tag{56}$$

$$nT < t \leq nT + \tau_n$$

$$\dot{c}_i(t) = -a_i c_i(t), \tag{57}$$

$$nT + \tau_n < t \leq (n+1)T$$

式(56)을 라프라스 변환하면

$$sC_i(s) = -a_i c_i(s) + \frac{K_i M \text{sgn}[e(nT)]}{s} + C_i(nT) \tag{58}$$

$C_i(s)$ 에 대해 풀면

$$C_i(s) = \frac{K_i M}{a_i} \text{sgn}[e(nT)] \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a_i} \right) + \frac{c_i(nT)}{s+a_i} \tag{59}$$

式(59)를 역변환시키면

$$c_i(t) = \frac{K_i M}{a_i} \text{sgn}[e(nT)] (1 - e^{-a_i \lambda}) + c_i(nT) e^{-a_i \lambda} \tag{60}$$

$$nT < t \leq nT + \tau_n$$

여기서 $\lambda = t - nT$

式(60)에 $t = nT + \tau_n$ 을 代入하면

$$c_i(nT + \tau_n) = \frac{K_i M}{a_i} \text{sgn}[e(nT)] (1 - e^{-a_i \tau_n}) + c_i(nT) e^{-a_i \tau_n} \tag{61}$$

같은 방법으로 (56)도 라프라스 변환을 이용해서 풀면

$$c_i(n+1)T = c_i(nT + \tau_n) e^{-a_i T - \tau_n} \tag{62}$$

式(61)과 (62)를 합하면 n번째 샘플링 순간에서 c_i 처럼 (n+1)번째 샘플링 순간에서의 c_i 를 구할 수 있다.

$$c_i(n+1)T = K_i M \alpha v_i[e(nT)] + c_i(nT) e^{-a_i T} \tag{63}$$

여기서

$$v_i[e(nT)] = \frac{e^{-a_i T}}{a_i \alpha} (e^{a_i \tau_n} - 1) \text{sgn}[e(nT)] \tag{64}$$

전과 같이

$$\tau_n = T \text{sat} \left[\frac{\alpha}{T} |e(nT)| \right]$$

이다.

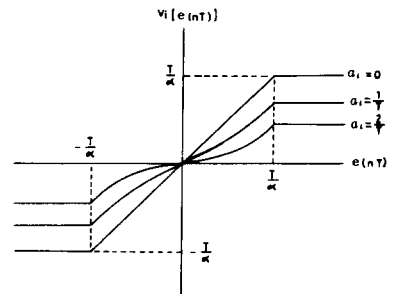


그림 14. PWM 시스템의 비선형 특성
Fig. 14. Characteristic nonlinearity of pulse-width modulated system.

式(64)는 PWM 시스템의 非線形 特性을 나타내고 그림14는 그 特性 그래프이다.

式(63)의 순환 관계는 모든 開루우프 시스템에 대해서 다음과 같은 벡터 행렬 형태로 나타내어진다.

$$\underline{x}(n+1T) = G(T) \underline{x}(nT) + H\underline{v}(nT) \quad (65)$$

여기서

$$\underline{x}(nT) = \begin{pmatrix} C_1(nT) \\ C_2(nT) \\ \vdots \\ C_N(nT) \end{pmatrix}, \quad \underline{v}(nt) = \begin{pmatrix} V_1[e(nT)] \\ V_2[e(nT)] \\ \vdots \\ V_N[e(nT)] \end{pmatrix},$$

$$G^T = \begin{pmatrix} e^{-a_1T} & & 0 \\ & e^{-a_2T} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{-a_N T} \end{pmatrix} \quad (66) \quad (67) \quad (68)$$

$$H = \begin{pmatrix} K_1 M \alpha & & 0 \\ & K_2 M \alpha & \\ 0 & & \ddots \\ & & & K_N M \alpha \end{pmatrix} \quad (69)$$

초기 조건이

$$\underline{x}(0) = 0 \quad (70)$$

이라면 式(65)의 z 변환은

$$z \underline{X}(z) = G(T) \underline{X}(z) + H\underline{V}(z) \quad (71)$$

$\underline{X}(z)$ 에 대해 풀면

$$\underline{X}(z) = [zI - G(T)]^{-1} H\underline{V}(z) \quad (72)$$

여기서

$$[zI - G(T)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z - e^{-a_1 T}} & & 0 \\ & \frac{1}{z - e^{-a_2 T}} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \frac{1}{z - e^{-a_N T}} \end{pmatrix} \quad (73)$$

式(67)의 Z 변환과 (69), (73)을 (72)에 代入해서 행렬 積을 하면

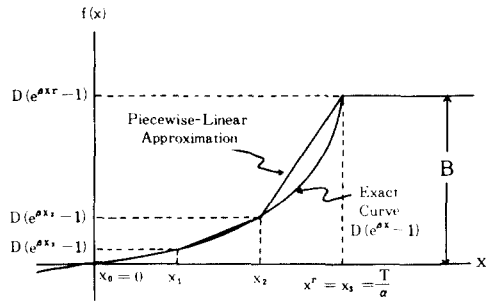


그림15. PWM 시스템의 特性과 그 근사값 (r = 3)
Fig.15. Exact and approximate (r=3) pulse-width modulator characteristic nonlinearity.

$$\underline{X}(z) = \begin{pmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_N(z) \end{pmatrix} \quad (74)$$

여기서

$$C_i(z) = \frac{K_i M \alpha V_i(z)}{z - e^{-a_i T}} \quad (75)$$

그림12로부터

$$C(z) = \sum_{i=1}^N C_i(z) \quad (76)$$

혹은

$$C(z) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i M \alpha V_i(z)}{z - e^{-a_i T}} \quad (77)$$

임이 분명하다.

PWM 시스템의 等價 Adm. 를 근사적으로 구하기 위해서 (31)式의 $f(x)$ 중에서 단지 $0 < x < \frac{\tau}{\alpha}$ 의 영역의 곡선 부분만을 고려하면

$$f(x) = D(e^{\tau x} - 1), \quad 0 < x < \frac{T}{\alpha} \quad (78)$$

으로 표현되고 영역을 r로 균등 분배하여 부분직선으로 근사시키면, r = 3인 경우 그림15에서와 같이 각부분의 중점에서 원래의 곡선과 일치하도록 선택되어진다.

(i + 1)번째 부분직선은 다음과 같이 주어짐은 쉽게 증명된다.

$$m_i x + b_i = \left[\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_1} \right] x$$

$$+ [(i + 1)f(x_i) - if(x_{i+1})] \tag{79}$$

여기서 $x_i = \frac{i}{r} \cdot \frac{T}{\alpha}$ (80)

式(78)의 $f(x)$ 를 (79)에 代入하면 $i+1$ 번째 부분 직선은

$$m_i x + b_i = \left[\frac{r}{\beta} (e^{\frac{\gamma}{r}} - 1) \exp\left\{ \left(\frac{i}{r} - 1 \right) r \right\} x + \left[\frac{e^{-\gamma}}{\beta} \left\{ (i + 1 - i e^{\frac{\gamma}{r}}) \exp\left(\frac{i}{r} r \right) - 1 \right\} \right] \right] \tag{81}$$

이고 여기서

$$r = \alpha_i T \tag{82}$$

이다.

式(80)와 (81)은 r 개의 부분 직선화 特性의 파라미터를 정의한다.

이 파라미터를 式(33)과 (34)에 代入하면

$$C_{ni} = \left(\frac{r}{\beta} \right)^{2n+1} \frac{1}{r^{2n}} \left\{ 2n(e^{\frac{\gamma}{r}} - 1) \exp\left[\left(\frac{i}{r} - 1 \right) r \right] (i^{2n+1} - \overline{i+1}^{2n+1}) + (2n+1)e^{-\gamma} [(i+1 - i e^{\frac{\gamma}{r}}) \exp\left(\frac{i}{r} r \right) - 1] (i^{2n} - \overline{i+1}^{2n}) \right\} \tag{83}$$

$i = 0, 1, 2, \dots, r-1$

$$C_{nr} = \left(\frac{r}{\beta} \right)^{2n+1} (2n+1) \frac{1 - e^{-\gamma}}{r} \tag{84}$$

i 에 대해 合하면

$$\sum_{i=0}^r C_{ni} = \left(\frac{r}{\beta} \right)^{2n+1} C_{nr} \tag{85}$$

여기서

$$C_{nr} = \frac{1}{r^{2n}} \left\{ 2n(e^{-\frac{\gamma}{r}} - 1) \sum_{i=0}^{r-1} \exp\left(\left(\frac{i}{r} - 1 \right) r \right) (i^{2n+1} - \overline{i+1}^{2n+1}) + (2n+1)e^{-\gamma} \sum_{i=0}^{r-1} \left[(i+1 - i e^{\frac{\gamma}{r}}) \exp\left(\frac{i}{r} r \right) - 1 \right] (i^{2n} - \overline{i+1}^{2n}) \right\} + (2n+1) \frac{1 - e^{-\gamma}}{r} \tag{86}$$

이고, 특히 $r=0$ 에서

$$G_n = 1 \tag{87}$$

式(85)를 (35)에 代入하면 r 개의 부분 직선화 特性의 等價 Adm.는

$$J_{n\ell}(A, \phi_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}} \right)^{2n+1} \times G_n M\left(n + \frac{1}{2}, 2, -\frac{S^2}{2}\right) \tag{88}$$

여기서

$$S = \frac{A}{\sqrt{\phi_0}} \tag{89}$$

$$\delta = \frac{T}{\alpha \sqrt{\phi_0}} \tag{90}$$

그리고 G_n 은 (86)과 (87)에 의해 주어진다.

그림16은 컴퓨터에 의한 PWM의 5개 부분 직선화 特性의 等價Adm.의 그래프이다. 그림17과 같은 시스템에서 等價 Adm.로 리미트 사이클 發生을 구하기 위해서 그림18과 같이 두 갈래로 확장할 수 있다.

이로부터 等價 非線形 샘플 데이터 시스템을 좀더 개조한 것이 그림19이다. 고차항을 무시하면 시스템 誤差는 $e(t) = -c(t) + e(t)$ (91)

혹은

$$e(t) = E_m \sin \omega t + e_n(t) \tag{92}$$

이고 여기서 $e_n(t)$ 는 분산 ϕ_0 인 가우시안랜덤 과정의 샘플 函數이다.

다시 非線形 素子를 발전시켜서 고차항을 무시하면 出力은

$$v_i(t) = V_m \sin \omega t \tag{93}$$

基本 周波數보다 높은 周波數 成分은 고려하지 않으므로, 각 非線形 素子의 入出力은 다음과 같은 Adm.로 관계되어진다.

$$v_i(j\omega) = J_{\omega i}(E_m, \phi_0) e(j\omega) \tag{94}$$

그리고 式(77)에서

$z = e^{j\omega T}$ 로 놓아 周波數 영역으로 하면

$$c(j\omega) = M\alpha \sum_{i=1}^N \frac{K_i v_i(j\omega)}{e^{j\omega \tau_i} - e^{-\alpha_i T}} \tag{95}$$

이다.

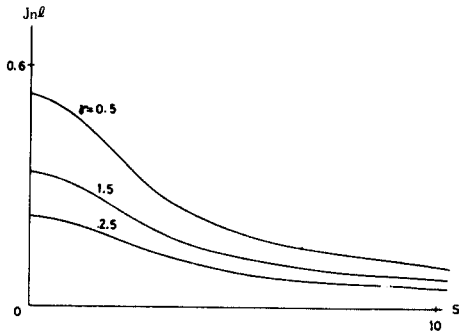


그림 16. PWM 非線形 特性의 等價 Adm.
($r=5, \delta=1.0$)

Fig. 16. Normalized equivalent admittance of characteristic pulse-width modulator nonlinearity for $r=5$ and $\delta=1.0$.

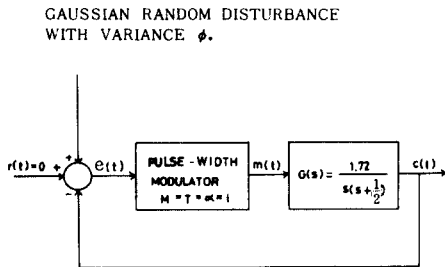


그림 17. 開 루우프 PWM 시스템

Fig. 17. Closed-loop pulse-width modulated system to be analyzed by equivalent admittance method.

式(94)를 (95)에 代入하면

$$c(j\omega) = M\alpha e(j\omega) \sum_{i=1}^N \frac{K_i J_{N,i}(E_m, \phi_*)}{e^{j\omega_i T} - e^{-a_i T}} \quad (96)$$

$$c(j\omega) = -e(j\omega) \quad (97)$$

式(96)에 (97)을 代入하면

시스템이 자기 지속 發振이고 雜音항이 高周波로 무시되므로

$$G'(j\omega, E_m) = -1 \quad (98)$$

여기서

$$G'(j\omega, E_m) = M\alpha \sum_{i=1}^N \frac{K_i J_{N,i}(E_m, \phi_*)}{e^{j\omega_i T} - e^{-a_i T}} \quad (99)$$

GAUSSIAN RANDOM DISTURBANCE WITH VARIANCE ϕ .

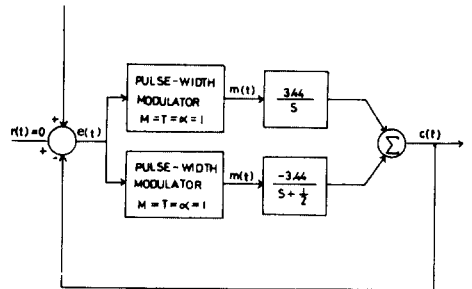


그림 18. 開 루우프 PWM 시스템의 병렬형

Fig. 18. Closed-loop pulse-width modulated system in parallel form.

GAUSSIAN RANDOM DISTURBANCE WITH VARIANCE ϕ .

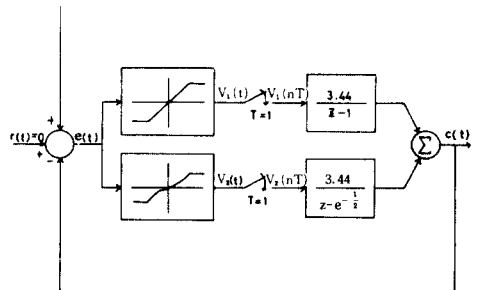


그림 19. PWM 시스템의 非線形 샘플 데이터 시스템

Fig. 19. Nonlinear sampled-data representation of pulse-width modulated system.

式(98)의 나이퀴스트 곡선은 等價 Adm.의 5개 부분 직선으로 E_m 과 f 에 대해 작성된다.

量子化된 시스템에서는 이 다이어그램은 자기 지속 發振의 존재를 나타낸다.

그림 20, 21, 22의 周波數 域 그래프는 컴퓨터에 의한 $G'(j\omega, E_m)$ 의 실수와 허수부에 대한 값들이다. 이때의 파라미터는

$$M = T = \alpha = 1$$

$$N = 2$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$K_1 = 3.44, \quad K_2 = -3.44$$

이다.

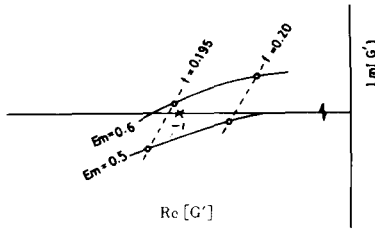


그림20. 그림17의 시스템의 나이퀴스트 곡선
Fig. 20. Nyquist curve for system of Fig. 17 with $\phi_0 = 0.1 - I$.

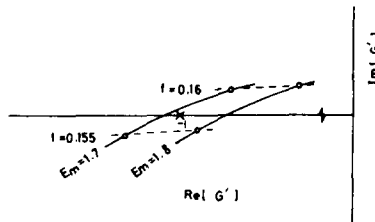


그림21. 그림17 시스템의 나이퀴스트 곡선
Fig. 21. Nyquist-curve for system of Fig. 17 with $\phi_0 = 0.1 - II$.

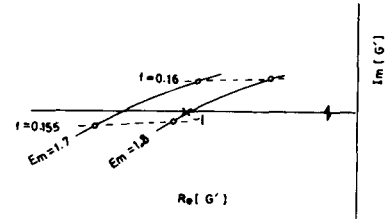


그림22. 그림17 시스템의 나이퀴스트 곡선
Fig. 22. Nyquist curve for system of Fig. 17 with $\phi_0 = 0.2$.

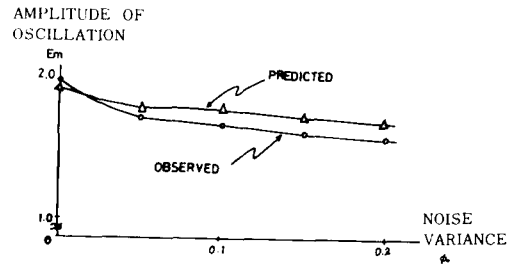


그림23. 그림17 시스템의 安定한 자기 發振의 예시치와 결과치
Fig. 23. Predicted and observed stable self-oscillations in the system of Fig. 17.

표 2. 그림17 시스템의 자기 발진 비교

Table 2. Predicted and observed self-oscillations in the system of Fig. 17.

| 잡음 분산 ϕ_0 | 등가 Adm. 방법 | | | | 컴퓨터 시뮬레이션 | | | |
|-------------------|--------------------|------------|-------------------|------------|--------------------|------------|-------------------|------------|
| | 비안정 Limit Cycle | | 안정 Limit cycle | | 비안정 Limit Cycle | | 안정 Limit Cycle | |
| | 크기 E_m | 주파수 f | 크기 E_m | 주파수 f | 크기 E_m | 주파수 f | 크기 E_m | 주파수 f |
| 0.0 | 0.7* | 0.2* | 1.8* | 0.16* | 0.72 | 0.20 | 1.97 | 0.15 |
| 0.05 | 0.67 | 0.20 | 1.80* | 0.16 | — | — | 1.75 | 0.16 |
| 0.1 | 0.57 | 0.20 | 1.79 | 0.16 | — | — | 1.69 | 0.16 |
| 0.15 | 0.40 | 0.30 | 1.76 | 0.16 | — | — | 1.65 | 0.16 |
| 0.2 | — | — | 1.72 | 0.16 | — | — | 1.62 | 0.16 |

그림20과 21은 $\phi_0 = 0.1$ 일때 $E_m = 1.79$, $f = 0.11$ 에서 安定한 리미트 사이클이 존재함을 알 수 있다. 그림 22에서는 $\phi_0 = 0.2$ 일때 安定한 리미트 사이클은 $E_m =$

1.72, $f = 0.16$ 에서 존재함을 나타낸다. 표 2와 그림23은 雜音 분산에 대한 결과이다. 等價 Adm. 방법으로 얻어진 결과를 증명하기 위해서 그림17의 시스

템은 상태 공간법으로 시뮬레이션 하였다. 이 결과는 역시 표 2와 그림 23에서 주어진다. 표 2는 예시치와 결과치가 최대 誤差 9%로 거의 같음을 알려준다.

많은 雜音때문에 無雜音의 경우의에는 不安定 리미트 사이클은 고찰되지 않는다.

V. 結 論

本 論文에서는 가우스 雜音의 출현시 PWM 시스템의 자기 발진 문제를 해석하고 等價 Adm. 方法을 利用하여 시스템의 非線形 素子の 傳達 特性을 구했다.

이 方法으로 기의 精確한 式이 유도 되었지만 매우 복잡하여 계산이 어렵기 때문에 PWM의 非線形을 부분 積線화로 대치했다. 이때 等價 Adm.는 一般的인 部分 線形 素子の 경우에 대해 구해졌고 이것을 PWM 非線形 시스템의 等價 Adm.를 근사적으로 나타내는데 使用되었다.

그 결과 간단하고 계산이 편리하여 컴퓨터 使用이 용이해졌다. PWM 시스템에서 얻어진 결과는 근사적인 해석으로 만족할만한 결과를 가져왔다.

컴퓨터 시뮬레이션 결과는 발진시 크기의 9% 정도의 오차로 매우 잘 일치하였다.

한편 지금까지는 랜덤 혼신을 평균이 0인 가우스 雜音으로 고찰했으나 앞으로는 평균이 0이 아닌 가우스 雜音이나 랜덤 雜音을 고려해서 分析해 볼 만하다 하겠다.

參 考 文 獻

[1] Delfeld, F.R. and Murphy, G.J., "Analysis of pulse-width-modulated control systems," *IRE Trans. on A.C.*, vol. AC-6, no. 3, pp. 283-292, Sept. 1961.
 [2] Murphy, G.J. and Wu, S.H., "A stability criterion for pulse-width-modulated Feedback control systems," *IEEE Trans. on A.C.*, vol. AC-9, no. 4, pp. 434-441, Oct. 1964.
 [3] Gupta, S.C. and Jury, E.I., "Statistical

study of pulse-width-modulated control system," *Jl. of The Franklin Institute*, vol. 273, no. 4, pp. 292-321, Apr. 1962.
 [4] Booton, R.C., "Nonlinear control systems with random inputs," *IRE Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-1, pp. 9-18, March 1954.
 [5] Nikifuruk, P.N. and West, J.C., "The describing-function analysis of a nonlinear servo mechanism subjected to stochastic signals and noise," *Proc. I.E.E.*, vol. 104, part C, pp. 193-203, 1957.
 [6] Chuang, K. and Kazda, L.F., "A study of nonlinear systems with random inputs," *Trans. AIEE*, vol. 78, Part II, pp. 100-105, 1959.
 [7] Sridhar, R. and Oldenburger, R., "Stability of a nonlinear feedback system in the presence of gaussian noise," *Trans. of the A.S. M.E., Jl. of Basic Engr.*, vol. 84, Ser. D, no. 1, pp. 61-70, Mar. 1962.
 [8] Magnus, W. and Oberhettinger, F., *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics*. Trans by J. Wermer. New York: Chelsea Publishing Co., 1954.
 [9] Lee, Y.W., *Statistical Theory of Communications*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
 [10] Tou, J.T. *Modern Control Theory*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1964.
 [11] Gibson, J.E. and McVey, E.S., "Stability analysis of dual-mode servomechanisms," *Trans. AIEE*, vol. 79, Part II, pp. 173-179, 1960.
 [12] Rice, S.O. "Mathematical analysis of random noise," *Bell System Technical Journal*, vol. 23, pp. 282-332, 1944 and vol. 24, pp. 46-156, 1945.
 [13] Oldenburger, R. and Sridhar, R., "Signal stabilization of a control system with random inputs," *Trans. AIEE*, vol. 80, Part II, pp. 260-268, 1961.