

심장 횡단면의 전위분포 컴퓨터 시뮬레이션

고 용 훈 · 박 상 희

=Abstract=

Computer Simulation of the Electric Potential Distribution of Human Cross Section

Yong-Hoon Kowh, Sang-Hui Park

This paper presents a new method of solving the electric potential distribution using the finite element method.

The thoracic region surrounded by the body surface and the heart is discretized into finite elements and the Continuous Laplace-equation is transformed into one of the finite degrees of freedom. The current source density, the conductivity, and the excitable range is obtained by the references.

From the result of simulation, it was revealed that the potential pattern of in homogeneity was much different from that of homogeneity.

1. 서 론

심장은 다수의 심근세포로 구성되며 각 심근세포는 전위변화인 활동전위를 발생한다.

심장의 S-A node(pace maker)에서 발생한 활동전위는 점차적으로 인접된 심근세포로 전파된다. 이와같은 전기적 현상은 그 전파되는 과정이 대단히 복잡하므로 그 발생 및 전파 과정을 규명하기가 매우 힘들다. 따라서 최근 여러 학자들에 의해 보다 거시적인 측면에서 연구되고 있다.

1969년 Plonsey는 인체의 전장을 지배하는 Laplace 방정식에 Green의 적분공식을 적용하여 흉곽내의 전위분포를 연구하였고 Martin은 이 연구를 더욱 확장하여 흉곽내의 폐 등에 불균질한 도전성을 가진 장기가 존재하는 경우의 전위분포를 고찰하였으며 Barr 등은 입체작법에 의해 전위분포를 결정하는 방법을 제시하였다.

그러나 입체작법을 이용하더라도 흉곽내에 도전율이 다른 장기가 존재할 경우 방정식의 수가 증가하기 때문에 방정식의 해를 쉽게 구할 수 없다.

따라서 본 논문에서는 최근 구조 해석 분야에 널리

이용되고 있는 근사적 수치 해법인 유한 요소법을 이용하여 입체 각법에서의 문제점을 보완 개선하여 동체의 전위분포 해석에 응용하여 보고자 한다.

2. 유한 요소법의 적용

유한 요소법을 적용하기 위하여 전류원과 전위의 관계식을 유도하고, 유도된 식에 유한 요소법을 적용할 수 있게 변환시킨다.

2-1. 전류원과 전위의 관계식

전류밀도와 전계의 관계식은 다음과 같다.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{1}$$

여기서

$$\vec{J} : \text{전류밀도 } [A/m^2]$$

$$\vec{E} : \text{전계 } [V/m]$$

$$\sigma : \text{도전율 } [U/m]$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \tag{2}$$

식(2)를 식(1)에 대입하면

$$\vec{J} = -\sigma \text{grad } \phi \tag{3}$$

이고, 연속방정식 $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 에서 $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 이다.

식(3)에 divergence를 취하면

$$\text{div } \vec{J} = -\text{div}(\sigma \text{grad } \phi) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4}$$

<1982. 11. 20 접수>

연세대학교 전기공학과

Dept. of Electrical Engineering, Yonsei University

로 되고, 식(4)에서 $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 를 I 로 표기하면 $-\text{div}(\sigma$

$\text{grad } \phi) = I$ 로 된다.

여기서

ρ : 전하밀도 [coul/m³]

I : 전하밀도의 시간 변화율 [coul/m³.sec]

$$\text{grad } \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$\sigma = \sigma(x, y, z)$

$$\text{div} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

그러므로

$$\sigma \text{ grad } \phi = i \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \text{div}(\sigma \text{ grad } \phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -I \text{ 이고,} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$+ I = 0$

(5)

로 된다.

식(5)는 전류원과 전위를 나타내는 Poisson 편미분 방정식이다.

심장의 전류원은 심장 내부에 존재하므로 심외막과 동체 사이의 전류원의 시간 변화율은 $I=0$ 이며, 또 체 표면에서 전류의 출입이 없으므로 경계 조건은 다음과 같다.

$$\sigma_n \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

2-2. 유한 요소 방정식

식(6)에서 식(5)를 유한 요소법에 적용하는 식으로 바꾸려면 다음과 같은 에너지 범함수를 최소로 하는 ϕ 값을 구한다.

$$\begin{aligned} F = \iiint_s \left[\frac{1}{2} \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - I \phi \right\} dx dy dz \right] \quad (7) \end{aligned}$$

단편을 유한개의 삼각 요소로 분할하여 임의 요소 e 내에서 성립하는 범함수를 생각하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F^{(e)} = \iint_s \left[\frac{1}{2} \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - I \phi \right] dx dy \quad (8) \end{aligned}$$

각 절점의 절점 번호는 반시계 방향으로 정하고 절점의 전위를 ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k 라 한다.

세 절점의 좌표를 각각 $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$ 라 하고,

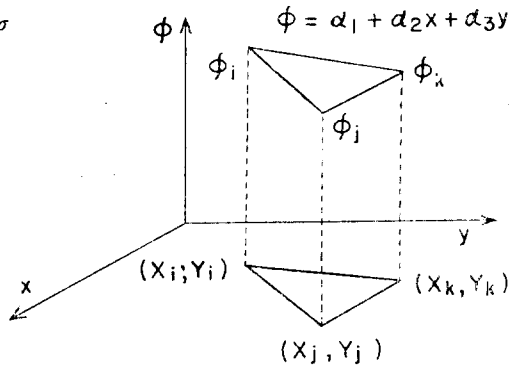


그림 1. 삼각요소

Fig. 1. The triangular element.

보간 다항식

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (9)$$

이면 $\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k \quad (10)$$

로 된다. 여기서 각각의 계수를 구하면

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \phi_j \\ + (X_i Y_j - X_j Y_i) \phi_k] \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k) \phi_i + (Y_k - Y_i) \phi_j + (Y_i - Y_j) \phi_k]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(X_k - X_j) \phi_i + (X_i - X_k) \phi_j + (X_j - X_i) \phi_k] \quad (11)$$

여기서

$$2A = \begin{vmatrix} 1, & X_i, & Y_i \\ 1, & X_j, & Y_j \\ 1, & X_k, & Y_k \end{vmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 를 식(10)에 대입하면

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (12)$$

여기서 N_i, N_j, N_k 는 각각 다음과 같다.

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y)$$

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (13)$$

여기서

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad a_j = X_k Y_i - X_i Y_k$$

$$b_i = Y_j - Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i$$

$$c_i = X_k - X_j, \quad c_j = X_i - X_k$$

$$a_k = X_i Y_j - Y_j X_i$$

$$b_k = Y_i - Y_j$$

$$c_k = X_j - X_i$$

$$[g]^T = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$$

식 (12)에서

$$\phi^{(e)} = [N_i, N_j, N_k] \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{pmatrix} \quad (14)$$

$g^{(e)} = [B^{(e)}][\phi]$ 라 하면

$$[g^{(e)}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_j \\ \phi_j \\ \phi_k \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$[B^{(e)}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (16)$$

식 (16)에 식 (13)을 대입하면

$$[B^{(e)}] = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$[b] = \begin{pmatrix} \sigma x & 0 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \text{라 하면}$$

식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} F^{(e)} &= \iint_s \frac{1}{2} [\{g\}^T [D] [g] - 2\phi I] ds \\ &= \iint_s \frac{1}{2} [\phi]^T [B]^T [D] [B] [\phi] ds \\ &\quad - \iint_s I [N] [\phi] ds \end{aligned} \quad (18)$$

이것을 ϕ 에 관해 미분하면

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \phi} = [\iint_s [B]^T [D] [B] ds] [\phi] - [\iint_s I [N]^T ds] \quad (19)$$

여기서 $[K^{(e)}] = [\iint_s [B]^T [D] [B] ds]$

$$[f^{(e)}] = [\iint_s I [N]^T ds]$$

식 (19)를 전 요소에 대하여 더하면

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \sum_{e=1}^E ([K^{(e)}][\phi] - [f^{(e)}]) = 0$$

여기서 $[K][\phi] = [F]$

$[K] : n \times n$ 상수 행렬

$[\phi] : n \times 1$ 절점의 값

$[F] : n \times 1$ 상수 행렬

인체의 횡단면을 삼각요소로 분할하여 유한 요소법을 적용하여 얻은 결합 행렬 방정식에 컴퓨터를 이용하여 값을 구할 수 있다.

3. 컴퓨터 시뮬레이션 및 결과 고찰

본 논문에서는 심장의 이온 전류에 의한 동체 표면의 등전위 분포를 구하기 위하여 우선 제 5조간 횡단면도를 대상으로 하였으며 지방층 및 세밀한 구조를 단순화하여 동체, 허파 및 심장의 세 부분으로 개략도를 그리고 삼각요소로 분할하였다. 분할된 삼각 요소

는 189개, 절점은 117개이다. 이들 요소를 분할하여 적용할 때 계산의 단순화를 위하여 다음과 같이 가정하였다.

1) 인체 내의 모든 곡선은 직선으로 처리하고 그 오차는 무시한다.

2) x 축 도전율과 y 축 도전율은 같다.

3) 같은 장기 내에서 도전율은 같다.

4) 전류원의 부호를 바꾸어 줄으므로 요소 행렬의 음부호를 없이 하였다.

5) 전류원은 임펄스가 전파되는 과정을 7단계로 분할하여 제 1단계에 균일한 전류원이 있다고 가정하였다.

6) 전류원 밀도의 시간 변화율은 제 1단계에 균일하게 $9.5 \text{ coul/m}^3 \cdot \text{sec}$ 로 하였다.

동체 내 전위 분포를 지배하는 식을 2차원의 식으로 하면

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + I = 0 \quad (20)$$

이 식의 범함수는

$$F = \iint_s \left[\frac{\sigma}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - I\phi \right] ds \quad (21)$$

이 범함수에 자유도 3인 보간식을 넣어 정리하면 식 (12)가 되며 극소차 조건을 적용시키면 하나의 요소를 나타내는 식은

$$\begin{pmatrix} (b_1 b_1 + c_1 c_1) & (b_1 b^2 + c_1 c_2) & (b_1 b_3 + c_1 c_3) \\ (b_2 b_1 + c_2 c_1) & (b_2 b^2 + c_2 c_2) & (b_2 b_3 + c_2 c_3) \\ (b_3 b_1 + c_3 c_1) & (b_3 b_2 + c_3 c_2) & (b_3 b_3 + c_3 c_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{IA}{3} \quad (22)$$

i, j, k 에 각 요소의 절점을 대입하여 전체 요소를 결합하면 다음과 같은 행렬식이 나온다.

$$[TM][T] = [FQQ]$$

$[TM] : 전체계를 나타내는 $n \times n$ 행렬$

$[T] : 각 절점에서 전위를 나타내는 $n \times 1$ 행렬$

$[FQQ] : 전류원에 의한 $n \times 1$ 행렬$

이 식에 의해 각 절점에서 전위를 구하는 computer flow chart는 그림 3-1과 같다.

정상인의 각 장기에서의 전류원 및 도전율의 값은 다음과 같다.

1) 전류원 밀도 $\pm 9.5 \text{ coul/m}^3 \cdot \text{sec}$

2) 폐장의 도전율 $0.04 \text{ } \Omega/\text{m}$

3) 심근의 도전율 $0.1 \text{ } \Omega/\text{m}$

4) 흉부의 도전율 $0.21 \text{ } \Omega/\text{m}$

위의 값을 사용하여 컴퓨터로 각 절점의 값을 구하고 이것을 이용하여 등전위선도를 그린 결과 그림 3-2:

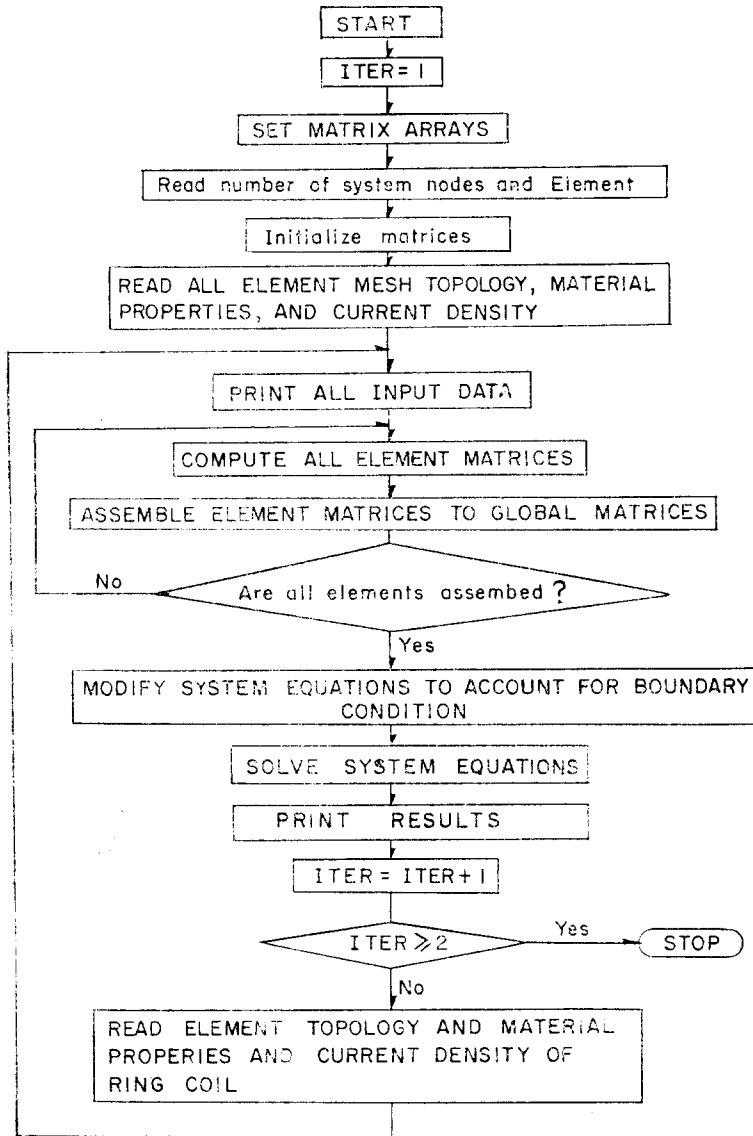


그림 3-1. 프로그램의 흐름도
Fig. 3-1. Flow chart of the program.

와 같다.

인체 횡단면 모델에 유한 요소법을 이용한 본 해석은 심실 탈분주 초기 단계에서 QRST 파형의 최대치의 전류밀도를 전류원으로 하여 $[TM][T]=[FQQ]$ 의 식을 유도 가우스 소거법에 의해 각 절점의 전위 $[T]$ 를 구했다.

여기서 $[T]$ 값은 도전율을 균질하게 $0.1 \text{ } \Omega/\text{m}$ 로 주었을 때와 외부값을 비교해 보면 예상한 대로 전위값의 차이가 크며 이는 Wilson이 인체를 무한 균질성

도체로 가정한 것이 오차가 큼을 보여주며 입체각법으로 체표면 전위도를 설명할 때 도전율을 고려하지 못했던 점을 유한 요소법을 사용하면 쉽게 해결됨을 보여 준다. 5배수의 외부 절점의 값을 예시하면 아래 표 3-1과 같다.

4. 결 론

본 연구는 유한 요소법의 입체요소를 사용하여 체표

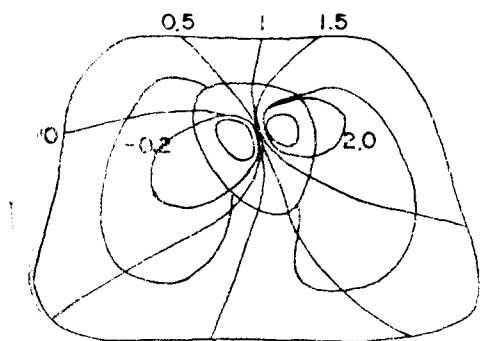


그림 3-2. 등전위선도
Fig. 3-2. Equipotential map.

표 3-1. 도전율이 균질한 경우와 불균질한 경우의 전위값 비교

Table 3-1. Comparison of the electric potential between homogeneous conductivity and inhomogeneous conductivity.

절점번호	동체표면의 전위값	
	도전율이 불균일한 경우	도전율이 균일한 경우
1	0.020167	0.063122
5	0.0003	0.01483
10	0.001920	0.006837
15	0.002935	0.002713
20	-0.049792	-0.032411
25	0.005062	0.006966
30	0.014388	0.022571

면 전위 분포도를 구하기에 앞서 행한 기초적 연구로서 QRST 파형의 최대치를 주었을 때 제 5 조건 횡단면에 나타나는 등전위선도를 그렸으며 도전율이 불균질할 때와 균질할 때를 비교하였다. 결과를 요약하면

- (1) Wilson의 무한 균질 도체 가정은 오차가 크다.
- (2) 모든 등전위선은 서로 연결되며 교차되지 않는다.
- (3) 입체각법에서 문제 시 되던 도전율의 불균질성을 고려할 수 있었다.

계산기 용량이 허용하는 한 많은 절점을 잡으면 생

리적 특성에 더욱 접근하는 전위 분포도를 구할 수 있으며 앞으로 호흡할 때 크기, 인체 내부의 지방층의 영향, 각 경계면의 영향 등을 고려하여 전위도를 그리고 구해진 전위도를 분석하여 심질환 환자의 진단에 이용할 수 있는 방안을 연구해야 할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- 1) R. Pronsey & D.G. Fleming: *Bioelectric Phenomena*, McGraw Hill, New York (1969).
- 2) R.O. Martin & T.C. Pilkington; "Unconstrained inverse electrocardiography", *Epicardial Potentials*, *IEEE Trans., BME-19*, pp. 276, 1285 (1972).
- 3) R.C. Barr, T.C. Pilkington et al; "Determining surface potential from current dipoles with application to electrocardiography", *IEEE Trans., BME-13*, pp. 88-92 (1966).
- 4) Barbara. L. Carter James Morehead: *Cross section anatomy*
- 5) S. Rush, J.A. Abildskov & R. McFee, "Resistivity of body tissues at low frequencies", *Circulation Res*, 12, pp.40-50 (1969).
- 6) 박상희 : 생체전기현상, 한신문화사 1977.
- 7) S. Rush; "Inhomogeneities as a cause of multiple peaks of heart potential on the body surface", *IEEE Trans., BME-18*, pp.115-124 (1971).
- 8) S. Mashima, "On the determination and expressions of equivalent quadrupole of the cardiac generator", *IEEE Trans, BME-16* pp.69-75 (1969).
- 9) F.N. Wilson, A.G. Macleod & P.S. Barker, "The distribution of action currents produced by heart muscle and other excitable tissues immersed in extensive conducting media", *J. gen. Physiol.*, 16, pp.423-456 (1933).