

<論 文>

스토캐스틱 모델(Stochastic Model)에 의한 고체입자상의  
산란작용에 대한 연구(I)

孟 柱 星\*

(1982年 6月 4日 接受)

A Study for Dispersive Action on the Solid Particle  
by Stochastic Model(I)

Joo Sung Maeng

Abstract

An experimental study has been made for the dispersion phenomena by a stochastic model in a turbulent pipe flow.

Local instantaneous passage of suspended solid particles were recorded in two dimensions, employing a periscopic system coupled vidicon camera.

Probability density of passage was calculated.

Second moment shows qualitatively that dispersive action is dependent on particle's geometric characteristics in vertical pipe flow.

In case that density of the solid particles is larger than that of liquid, particles have a tendency to approach from the center of pipe to the wall, and in the contrary case they approach the center of pipe.

It seems that there exists a field of radial accelerations, centrifugal or centripetal according to the sign of density difference between two phases.

기 호 설 명

$X_n$  : 랜덤변수(입자위치)  
 $\vec{x}$  : 반경방향 벡터  
 $Z_n$  : 랜덤변수  
 $P$  : 입자통로행렬  
 $p^{(n)}$  : 순간확률분포(row vector)  
 $p^{(0)}$  : 초기확률분포  
 $\Delta p_{ij}$  :  $\Delta s_{ij}$ 의 통로확률

$A(p, r)$  : 반경  $r$ 에서의 잉여확률밀도  
 $P_i^j$  : 행렬  $P$ 의 성분  
 $p_i^{(n)}$  :  $p^{(n)}$ 의 성분  
 $\pi$  : 확률분포 벡터  
 $q_n$  : 혼합매질량  
 $q_s$  : 고체입자량  
 $Q_s$  : 원관내의 고체입자 전유량  
 $W_s$  : 고체입자 체적  
 $\Omega$  : 혼합매질 체적  
 $V_L(x)$  : 반경방향 유속

\* 正會員, 漢陽大學校 工科大學

- $V_i(x)$  : 반경방향 고체속도
- $\Gamma$  : 난류동의 수송스칼라량
- $f(x)$  : 확률밀도함수
- $f_{nr}(r)$  : 잉여밀도함수
- $F_{nr}(r)$  : 잉여분배함수
- $C, C_b$  : 농도
- $d$  : 입자직경
- $D$  : 원판직경

### 1. 서 론

고체-유체 유동에 관한 연구는 相間에 열교환이나 화학작용등을 무시할 수 있는 경우로 강이나 연안의 형태학(예 : 물에 떠있는 고체입자의 운동특성에 따른 형태변형...)과 관을 통한 고체소재 수송등에 응용되고 있다.<sup>1)</sup> 이 문제는 고체입자들의 모양이 다양함을 고려하면 단일 매질에 대한 문제보다 훨씬 많은 매개변수가 필요하다. 따라서 실험실 연구에서는 고체입자의 모양과 크기를 변화 시켜가며 유동의 국소적 순간적 서술을 해야할 필요가 있다. 이에 대한 많은 연구가 수행되었으나<sup>2)3)4)5)</sup> 결과들은 지극히 제한된 것이다. 이는 난류동의 복잡성과 모델 선정의 어려움 때문인 것으로 생각된다. 본 연구는 매개변수의 국소적 순간적인 값들에 관련하여 모델을 설정하고 그 다음에 통계적 평균값을 취하는 방법을 택하여 스토캐스틱 모델(stochastic model)보다 더 자연현상에 가깝게 문제를 다루었으며 실험을 통하여 얻은 결과는 이론적 연구를 수행하는데 많은 도움을 줄 것이다.

### 2. 사용모델

랜덤변수  $X$ 가 순간  $t_0, t_1, \dots, t_n$ 에서 연속적으로  $X_0, X_1, \dots, X_n$  값을 갖는다면

$$X_{n+1} = X_n + Z_n \tag{1}$$

또는  $X_n = X_0 + (Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n)$

이고, 랜덤변수  $Z_n$ 이 스토캐스틱적으로 독립일 때 이 프로세스(process)는 Markovien이다. Chapman-Kolmogorov 방정식으로부터

$$P_r \{X_{n+1} = x_{n+1} / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = P_r \{X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n\} \tag{2}$$

를 얻을 수 있고, Markov process의 경우 확률밀도를 정의할 수 있다.

$$p_{X_n}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_r \{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} \tag{3}$$

### 2.1. Markov Chain<sup>7)</sup>

$x_i$ 가 랜덤변수  $X$ 의  $m$  값일 경우  $m \rightarrow \infty$ 로 하여 Markov chain을 정의한다. 순간  $t_n$ 에서 확률분포벡터를  $p^{(n)}$ 라 하면  $t_n$ 와  $t_{n+1}$  사이의 통로행렬  $P$ 는 ;

$$p^{(n+1)} = P \cdot p^{(n)} \tag{4}$$

순환법칙에 의하여

$$p^{(n)} = P \cdot p^{(0)} \tag{5}$$

이 되며 이 식은 균일한(homogeneous) Markov chain이다.

$P$ 의 성분들은

$$P_{ij}^k = P_r \{X = x_j, t = t_{n+1} / X = x_i, t = t_n\} \tag{6}$$

$p_i^{(n)}$ 를  $\vec{p}^{(n)}$ 의 성분,  $P_{ij}^k(n)$ 를  $P^{(n)}$ 의 성분이라면

$$\vec{p}^{(n)} = P_{ij}^k(n) \cdot \vec{p}_k^{(0)} \quad (P_{ij}^k(n) \neq 0 \quad \forall i, k) \tag{7}$$

로 표시된다. 물리적으로  $p^{(0)}$ 는 입자의 초기상태를 의미하고 식(7)은  $n \rightarrow \infty$ 일 경우 입자가  $x_i$ 의 어떠한 위치에도 도달할 수 있음을 말하는 것이다.

### 2.2. 균형분포(Equilibrium Distribution)

하나의 체인이 분할불가능(irreducible)하고 비주기적(aperiodic)일 때 에르고딕(ergodic) 확률분포 행벡터(row vector)  $\pi$ 가 존재하고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix} = i \cdot \pi \quad (i : \text{행벡터}) \tag{8}$$

어떠한 초기 확률분포  $p^{(0)}$ 에 대하여도 식(5), (7)으로부터

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(0)} \cdot P^{(n)} = p^{(0)} i \pi = \pi \quad (p^{(0)} \cdot i = 1) \tag{9}$$

을 얻을 수 있다. 따라서 모든  $n$ 에 대하여  $p^{(n)}$ 은  $\pi$ 가 되어  $\pi$ 는 정지분포(stationary distribution)를 나타낸다.

$$\pi \cdot p = \pi$$

물리적으로 위치를 결정해 주는 랜덤변수  $X$ 의 확률분포는  $t \rightarrow \infty$ 일 경우 순간  $t_0$ 에서  $X$ 의 상태와 독립인 것을 의미한다.

### 2.3. 산란작용에의 적용

원판내 난류동에 하나의 고체입자를 띄우면 입자는 유체의 평균속도와 요동속도로 인하여 랜덤운동을 하게되고<sup>8)9)10)</sup> 입자는 우발적인 행로를 갖는다. 즉 두개의 같은 입자를 같은 조건에서 띄워도 그들은 같은 행로를 갖지 않는다. 만일 입자의 행로를 설명할 수 있다면 이것은 유체가 고체에 미치는 특성이 될 것이다.

(가) Markov process의 同一化

하나의 입자重心이 단면  $S_1$ 에서  $(\Delta S_1)_i$ 를 통과한 후 Fig. 1의  $S_1$ 으로부터  $\Delta z$ 만큼 떨어진 단면  $S_2$ 에서  $(\Delta S_2)_i$ 를 지나가는 확율을  $p_{ij}$ 로 하면 이로부터 정의되는 행렬  $P$ 는 단면  $S_1$ 으로부터  $S_2$ 에 이르는 통로에 대한 행렬이 된다. 만일 성분  $p_{ij}$ 가 각각  $(\Delta S_1)_i$ 와  $(\Delta S_2)_j$ 의 위치로만 결정되고 단면  $S_1$ 을 통과하기 이전의 사건에 독립이라면 이 가정은 (1), (2)식을 만족시키게 되어  $P$ 는 markov process가 된다. 이 가정은  $S_1$ 이전과  $S_1, S_2$  사이에 동시에 같은 와류구조가 존재하지 않도록  $\Delta z$ 를 충분히 크게 함으로써 성립시킬 수 있다. 따라서  $\Delta z$ 의 최소크기는 거시적인(macroscopic) 차원이 되어야 한다.

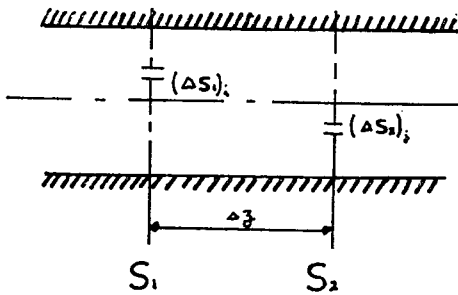


Fig. 1

(나) Process의 특성화

$P$ 의 성분들은 Fig. 1의 단면  $S_1$ 과  $S_2$  사이에서 유체가 고체입자에 미치는 특성이며 성분  $p_{ij} \rightarrow 0$ 이면 미소단면  $(\Delta S_1)_i$ 를 통과한 입자가  $(\Delta S_2)_j$ 를 통과하는 것이 불가능하지 않다. 즉 입자와 입자간의 상호작용을 피하기 위하여 하나의 입자만을 고려하면 ( $p_{ij} \rightarrow 0$ ) 이 입자는  $(\Delta S_1)_i$ 를 통과한 후 단면  $S_2$ 에서 어느 위치에든 도달할 수가 있다. 이와같이 정의되는 markov process는 균일하고 분리불가능하여 균형분포  $\pi$ 가 존재한다. 따라서 고체입자를 入射시킬 때 미치는 영향은 문제시될 수가 없다.

2.4. 통로확율과 농도

(가) 농도의 정의

비압축성 유체에서 난류동의 확산이론에 의한 지배방정식은<sup>11)</sup>

$$-\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \bar{U}_i \partial_i \bar{\Gamma} = \partial_i [-w_i \bar{\Gamma}] \quad (11)$$

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \gamma \quad (12)$$

이며 고체-유체 유동에서는 式(12)에 정의된 스칼라량  $\Gamma$  대신 고체상의 국소체적농도(local volumetric

concentration)를

$$C = \frac{\sum W_i}{\Omega} \quad (13)$$

로 정의하고 다음과 같은 가정하에 지배방정식을 유도하고 있다.<sup>12), 13)</sup>

—고체상은 완전하게 유체상을 따른다.

—Boussinesq 가정을 농도에 확장할 수 있다.

원관유동에서 미소단면  $ds$ 를 통과하는 혼합매질량을  $dq_m$ , 이 때 고체유량을  $dq_c$ 라 하면 체적농도는

$$C_0 = \frac{dq_c}{dq_m} \quad (14)$$

이며

$$dq_c = C \cdot V_i(\vec{x}) ds \quad (15)$$

$$dq_m = [C \cdot V_i(\vec{x}) + (1-C) V_L(\vec{x})] ds \quad (16)$$

로부터

$$C_0 = \frac{C \cdot V_i(\vec{x})}{C \cdot V_i(\vec{x}) + (1-C) V_L(\vec{x})} \quad (17)$$

를 얻는다. 式(17)에서  $V_L(\vec{x}) = V_i(\vec{x})$ 일 경우에만  $C_0 = C$ 가 됨을 알수 있고 이것은 위의 첫번째 가정을 만족시킨다. 여기서  $V_L(\vec{x})$ 와  $V_i(\vec{x})$ 는 각각 반경방향 유체속도와 고체속도이다.

(나) 통로확율과 농도의 관계

원관내 고체의 전유량을  $Q_c$ , 한점  $M$ 주위의 미소단면  $ds$ 내의 고체유량을  $dQ_c$ 라 하면 통로확율밀도는 다음과 같이 정의된다<sup>14)</sup>.

$$f(\vec{x}) = \frac{dQ_c/ds}{Q_c} \quad (18)$$

식(15), (16), (18)으로부터

$$f(\vec{x}) = \frac{C \cdot V_i(\vec{x})}{\iint C \cdot V_i(\vec{x}) ds} \quad (19)$$

를 얻는다.

3. 실험 연구

난류동을 하고 있는 원관내의 한 단면에서 고체입자의 균형분포에 해당하는 통로확율밀도場을 결정하기 위하여 단면  $S_0$ 에서 입자를 입사시키고  $S_0$ 에서 멀리 떨어진 곳  $S$ 에서 입자重心의 좌표  $\vec{X}$ 를 측정한다.  $\vec{X}$ 는 랜덤벡터이며 이로부터 분포함수를 정의한다. 같은 실험을  $n$ 회 반복하여 얻은  $\vec{X}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 로부터  $f(\vec{x})$ 를 계산하고 모우멘트를 계산하여 랜덤변수의 변위(variance) 즉 산란(dispersion) 현상에 대한 고찰을 한다. 만일 매회의 실험이 서로 영향을 미치지 않게 하기 위하여 충분한 시간 간격으로 수행된다면  $\vec{X}_i$ 는 스토카스틱적으로 독립변수라 생각할 수 있으며 이런 조건에서 계

산된 평균값들은 엄밀하게 통계적 평균값에 해당한다.

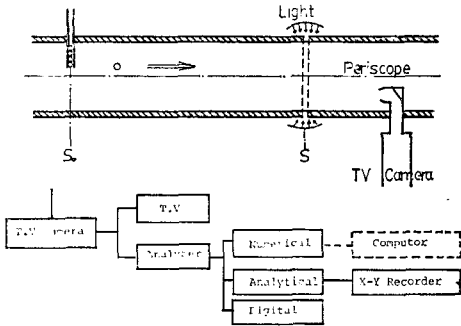
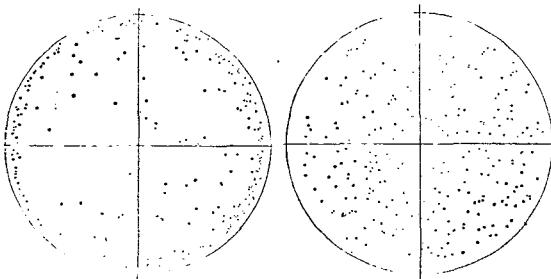


Fig. 2 Measuring system.

2.3.의 (가)와 (나)의 기술을 만족시키기 위하여 원관내 유체유동의 속도분포를 측정 한 후 측정단면 S를 고체입사단면 S<sub>0</sub>에서 충분히 떨어진 곳(본 연구에서는 3m)에 설정하였으며 입사된 하나의 입자가 S를 통과한 후에 다른 하나를 입사시켰다. 같은 실험을 500회 반복하였다. 측정단면 S를 통과할 때 입자는 2000 W의 빛을 받아 점의 형태로 나타나는 영상이 S로부터 충분히 멀리 떨어진 곳(본 연구에서는 50 cm)에 설치된 잠망경에 투사된다. 잠망경에 연결된 TV 카메라는 영상을 TV와 분석기로 전달한다. 수치적, 해석적 디지털 출력의 기능을 가지고 있는 분석기는 Fig. 2와 같이 X-Y기록계와 연결되어 있어 입자의 위치를 기록하게 된다. Fig. 3은 기록예를 보여주고 있다. 원관은 직경 800 mm, 길이 4.5 m의 plexiglass를 사용하였으며 측정단면 S를 제외한 나머지 부분은 검정막으로 빛의 투과를 차단하였다.

고체입자는 Table 1과 같이 직경과 밀도를 변화시켰으며 각각의 입자에 대하여 자유낙하 속도가 같은 것을 골라내어 스크린을 통과 시키는 방법을 사용하여 입자의 모양에 균일을 기하고자 하였다.

유체는 물을 사용하였으며 레이놀드수를 Table 2와 같이 변화시켜 각각에 대하여 실험하였다.



3φ(ρ<sub>s</sub>=1347 SI) Q=1.5l/s    3φ(ρ<sub>s</sub>=804 SI) Q=4.4l/s  
Fig. 3 Examples of records.

Table 1 Solid phase.

Solid particle	Hostaform C				Hostalen P P
	2φ	3φ	4φ	5φ	3φ
Diameter	2φ	3φ	4φ	5φ	3φ
Density(kg/m <sup>3</sup> )	1593	1437	1313	1375	804
Falling velocity V <sub>ch</sub> (cm/sec)	11.15	15.13	18.33	20.66	-10.86
Re = $\frac{V_{ch} \times d}{\nu}$	223	454	733	1033	326

Table 2 Liquid phase.

Q(l/s)	Mean velocity (m/sec)	Re = $\frac{Vm \times D}{\nu}$
7.1	1.44	1.14 × 10 <sup>5</sup>
5.7	1.16	9.19 × 10 <sup>4</sup>
4.6	0.938	7.41 × 10 <sup>4</sup>
3.1	0.632	5.0 × 10 <sup>4</sup>
2.7	0.551	4.35 × 10 <sup>4</sup>
2.0	0.408	3.22 × 10 <sup>4</sup>
1.5	0.306	2.42 × 10 <sup>4</sup>

### 3.2. 실험해석

#### (가) 잉여확률밀도

단면 S를 유한성분 ΔS로 나누고 ΔS 내의 통로요소 (passage elements)들의 확률 Δp를 측정한다. 원관좌표계에서 ΔS는

—반경 R<sub>i</sub>와 R<sub>i+1</sub>인 동심원과

—동각으로 나누었을 때 두 직선 θ<sub>i</sub>와 θ<sub>i+1</sub>가 이루는 면으로 결정하고 각각의 요소를 ΔS<sub>ij</sub>로 표시하고, 그의 통로확율은 Δp<sub>ij</sub>로 표시한다.

본 해석에서는 i=8, j=12로 하여 96개의 요소로 구분하였다.

수직원관유동의 경우 임의반경 r에서 잉여확률밀도는

$$A(p_r)_i = \sum_{j=1}^{12} \Delta p_{ij} \quad (20)$$

이다.

#### (나) 잉여법칙

반경 r에서 잉여밀도 법칙은

$$f_n(r) = \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r \cdot d\theta \quad (21)$$

이며 만일  $\vec{R}$ 이 랜덤변수  $\vec{X}$ 의 변경방향성분이라면

$$f_n(r) = \frac{P_r\{r < \vec{R} < r + \Delta r\}}{\Delta r} \quad (22)$$

로 정의된다. 잉여분배함수

$$F_{nr}(r) = P_r(\overline{R} \geq r) \quad (23)$$

는 각각의  $r=R_i$  값에 대하여 계산되며 식(22)

$$f_{nr}(r) = -\frac{dF_{nr}(r)}{dr} \quad (24)$$

가 되어  $F_{nr}(r)$ 을 대수적으로 표현할 수만 있다면 확률밀도함수를 계산할 수 있다.  $\Delta S_{i,j}$ 에 기록된 점 의수를  $n_{ij}$ 라 하면  $r=R_k$ 에서  $F_{nr}(r)$ 은

$$F_{nr}(R_k) = \frac{1}{\sum_j \sum_i n_{ij}} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{12} n_{ij} \quad (25)$$

이다. 본 해석에서는  $R_i$ 를 다음과 같이 선정하고

$$R_0=40 \text{ mm } R_3=25 \text{ mm } R_6=10 \text{ mm}$$

$$R_1=35 \text{ mm } R_4=20 \text{ mm } R_7=5 \text{ mm}$$

$$R_2=30 \text{ mm } R_5=15 \text{ mm } R_8=0 \text{ mm}$$

측정된 각각의 값에 대하여  $[F(R_i)]$ , 신뢰구간 99%와 95%를 계산하고 무차원 좌표  $r'$ 를 도입하여 잉여확률밀도의 분배함수를 계산하였다(Figs. 4, 5, 6, 7, 8). 모우멘트는 다음과 같은 방법으로 계산하여 평균값과 변위(variance)를 도출하였다(Figs. 9, 10).

$$\begin{aligned} \text{1 차모우멘트 : } m_{10} &= \iint r \cdot f(r, \theta) ds \\ &= \int_0^R r \cdot f_{nr}(r) dr = - \int_0^R r \cdot dF_{nr}(r) \end{aligned}$$

$$r' = \frac{2r}{D-d} \text{ 을 사용하면}$$

$$m'_{10} = - \int_0^1 r' dF_{nr}(r') = r'_c \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{2 차모우멘트 : } m_{20} &= \iint (r - m_{10})^2 \cdot f(r, \theta) ds \\ &= - \int_0^R (r - m_{10})^2 dF_{nr}(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'_{20} &= - \int_0^1 (r' - r'_c)^2 \cdot dF_{nr}(r') \\ &= - \int_0^1 r'^2 \cdot dF_{nr}(r') - r'_c \end{aligned} \quad (27)$$

### 3. 3. 실험결과 및 고찰

Figs. 4, 5, 6, 7, 8은 유량의 변화에 따른 잉여확률밀도의 변화과정을 각각의 고체입자에 대하여 보여주고 있으며 Figs. 9, 10으로부터 다음과 같은 몇가지 정성적인 결론을 얻을 수 있다.

a) Fig. 9에서 입자 3#, 4#, 5#에 대하여 유량이 감소하면  $m'_{20}$ 도 감소함을 알 수 있다. 이것은 유동의 산란작용이 약해짐을 의미한다. 그러나 같은 유량에 대하여 입자의 직경이 커질수록  $m'_{20}$ 는 감소한다. 이것은 분명히 수직원관 유동에서 산란작용이 입자의 기하학적인 특성에 함수인 것을 나타

내며 중력이 이 현상을 설명하는데 직접 관여되지 않으므로 난류의 유동속도의 영향이 입자의 크기와 난류의 정도로 설명되어야 할 것이다.

b) 2#, 3#( $\rho_s=804 \text{ SI}$ )는 定則的인 변위를 갖지 않으며 3#( $\rho_s > \rho_L$ ), 4#, 5#는 일관성 있는 경향을 보인다. 定則的인 변위를 갖지않는 경우는 본 실험만으로 과정을 특성화 하기에는 충분치 못하며 2#보다 작은 직경을 갖는 입자에 대하여 보다 더 많은 실험이 요구된다.

(c) Fig. 10은 전혀 예기치 못한 결과이다.

이것은 밀도에 관계된 것으로 유량이 감소할 경우 즉 산란작용이 약해짐에 따라  $\rho_s > \rho_L$ 인 입자들은 원관벽면을 향하여 접근하며  $\rho_s < \rho_L$ 인 입자는 원관중심을 향해 접근한다. 이 결과로 보아 반경방향 가속도 즉 원심방향 또는 구심방향의 가속도장이 존재하는 것으로 생각되어지며 유동의 비틀림이 있는 듯하다. 이것은 측정단면상에 있는 입자의 운동상태를 TV로 관측한 결과 분명한 것이 확인되었다. 회전방향은 랜덤한 성격을 가지고 있었으며 약 60%가 같은방향, 약 40%가 다른 방

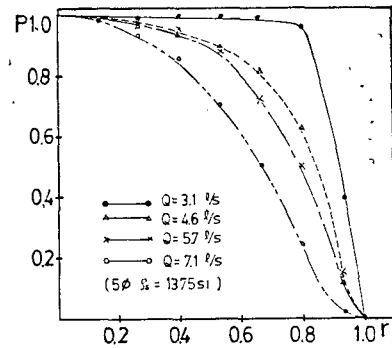


Fig. 4 Repartition function of marginal probability density ( $\rho_s=1375 \text{ SI}$ ).

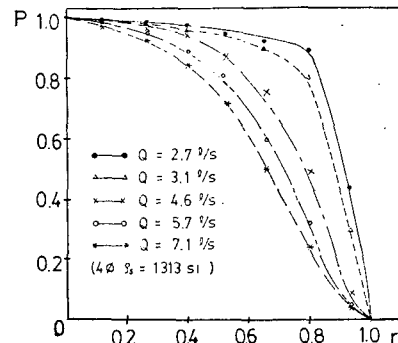


Fig. 5 Repartition function of marginal probability density ( $\rho_s=1313 \text{ SI}$ ).

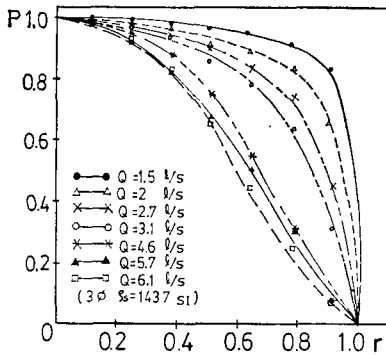


Fig. 6 Repartition function of marginal probability density ( $\rho_s=1437$  SI).

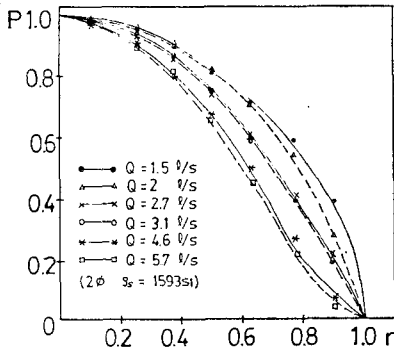


Fig. 7 Repartition function of marginal probability density ( $\rho_s=1593$  SI).

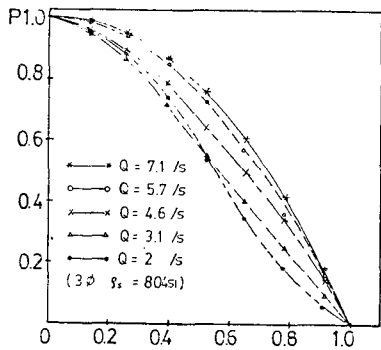


Fig. 8 Repartition function of marginal probability density ( $\rho_s=804$  SI).

향이였다.

#### 4. 결 론

본 연구에서 수행한 2차 모우멘트의 비교는 1차 모우멘트가 같을 경우에 의미를 가지므로 이 현상을

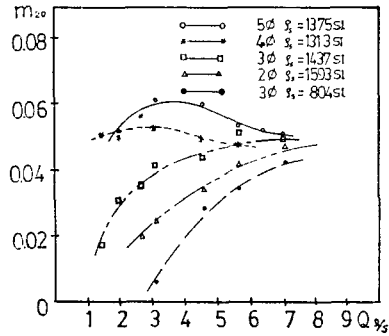


Fig. 9 Second moment of marginal law in  $r$ .

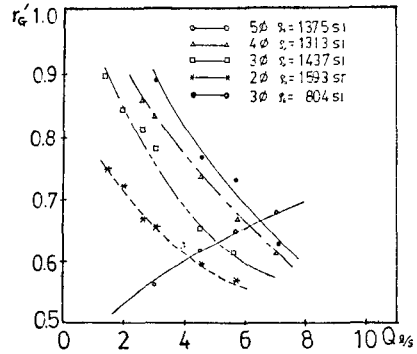


Fig. 10 First moment of marginal law in  $r$ .

깊히 서술하기에는 충분치 못하다. 특히 2<sup>φ</sup>, 3<sup>φ</sup>( $\rho_s=804$  SI)의 경우, 2차 모우멘트가 단순한 함수형태가 아니므로 더욱 그러하다. 이는보다 더 세밀한 방법으로 분배법칙을 특성화 할 수 있는 연구 즉 랜덤워크(random walk)에 대한 연구의 필요성을 제기하고 있다. 그러나 실험결과 및 고찰에서 확인된 정성적인 사항들이 장차의 연구에 확고한 기본이되며 가능성을 보여주었음을 강조하고자 한다.

#### 참 고 문 헌

- 1) M. Alquier; "Le Transport Solid dans les Canaux Découverts et les Rivière Naturelles," Cours Edité à l'ENSEEIH 1978.
- 2) Chao Lin Chiu; "Stochastic Model Study of the Movement of Solid Particles," Journal of Hydraulic Division ASCE, Sep. 1967.
- 3) G. Bugliarello and E.D. Jackson; "Random Walk Study of Convective Diffusion," Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Aug. 1964.
- 4) W.W. Sayre and D.W. Hubbel; "Sand Transport

- Study with Radioactive Tracers," Proc. ASCE, Vol. 90N° HY3, May. 1964.
- 5) P. Todorovich and H.W. Shen; "A General Stochastic Model for the Transport of Sediment Bed Material," Int. Symp. on Stochastic Hydraulics-Pittsburgh, 1971.
  - 6) J.S. Maeng; "Etude d'un Phénomène de Dispersion en Fluide Mélangée par Model Stochastique," Mémoire de D.E.A, ENSEEIHT, 1978.
  - 7) D.R. Cox and H.D. Miller; "The Theory of Stochastic Process," Ed. Methuen and Co., Ltd. 1970.
  - 8) A. Fortier; "Mécanique des Suspension," Ed. Masson. 1967.
  - 9) M. Alquier; "Etude Fondamentale de Certaines Applications des Méthode de Traçage en Hydraulique," Thèse à l'univ. Paul Sabatier, 1970.
  - 10) M. Alquier, G. Courtois, and J. Gruat; "La Notion de Bon Mélange dans l'Emploi de Traceurs," Congrès de l'AIEA Vienne, 1970.
  - 11) J. O. Hinze; "Turbulence," Ed. McGraw-Hill, 1975.
  - 12) V. Milisic; "Contribution à l'Analyse du Phénomène de Suspension," Thèse à l'univ. Paul Sabatier, 1976.
  - 13) H.A. Einstein; "Formulas for the Transportation of Bed Load," Transaction ASCE, 1942.