Wiener-Hopf 方法 (1)

李　斗　星
<建國大學校・工博>

1. 混合境界値問題

후리에 積分變換方法에 의하여 解를 求할 수 있는 重要한 問題 中에서 相當한 部分이 Wiener와 Hopf에 의해서 그 近代的인 使用이 이룩된 方法에 의하여 解決될 수 있다. 이 方法을 다음에 드는 例로서 說明하기로 한다. 均一한 速度로 流體가 半無限平板 위를 흐를 때 平板에서 流體로의 熱流動에 關聯된 다음과 같은 境界値問題를 생각하자.

D內에서 $\Delta\varphi-\varphi_x=0$ (1-1)

$x^2+y^2\to\infty$ 일때 $\varphi(x,y)\to 0$

이고 $y=0$, $x\geq 0$ 上에서는 $\varphi=e^{-ax}$ (1-2)

위에서 Δ는 라프라스 연산자이고, $a>0$이며, D는 半直線 $y=0$, $x\geq 0$의 外部領域이다. φ는 모든 點에서 有界이고 또 φ_y는 모든 點에서 積分可能하여야 한다고 생각한다. (1과 2節에서 첨자는 편미분을 의미한다.)

$y\neq 0$ 일 때, 式(1-1)의 x에 關한 후리에變換은

$$\Phi_{yy}-(\lambda^2-i\lambda)\Phi=0 \tag{1-3}$$

이다(여기서 후리에變換은, 별도표시이외에는, 그 對應하는 大文字로 表示한다).

式(1-2)의 變換은

$$\Phi(\lambda,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{a-i\lambda}+U(\lambda) \tag{1-4}$$

윗 式에서 $u(x)$는 다음과 같이 定義된 函數이다.

$$u(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ \varphi(x,0), & x<0\end{cases} \tag{1-5}$$

式(1-3)의 解는

$$\begin{aligned}\Phi&=A(\lambda)\exp(-|y|\sqrt{\lambda^2-i\lambda})\\&=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{a-i\lambda}+U(\lambda)\right]\\&\quad\exp(-|y|\sqrt{\lambda^2-i\lambda})\end{aligned} \tag{1-6}$$

式(1-6)에서 $\sqrt{\lambda^2-i\lambda}$의 分枝는 $\lambda\to\pm\infty$ 일 때 $\sqrt{\lambda^2-i\lambda}\to+\infty$ 되도록 選擇해야 한다. 따라서 逆變換의 積分路線은 $\lambda=0$와 $\lambda=i$ 사이를 通過한다.

$$\begin{aligned}F(\lambda)&\equiv\Phi_y(\lambda,0+)-\Phi_y(\lambda,0-)\\&=-2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{a-i\lambda}+U(\lambda)\right]\sqrt{\lambda^2-i\lambda}\end{aligned} \tag{1-7}$$

로 定義하면, 領域 D內에서 連續이 되어야 하는 까닭에 $x<0$인 때

$$\varphi_y(x,0+)=\varphi_y(x,0-)$$

이고, 따라서 $x<0$에 대하여 $f(x)=0$이어야 한다.

따라서 式(1-7)은 그로부터 모르는 함수 $f(x)$와 $u(x)$를 결정해야 하는 방정식이다.

β가 實數로 $x\to\infty$일 때 $f(x)e^{-\beta x}\to 0$이 된다면

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\lambda x}f(x)dx$$

는 $I_m\lambda>\beta$의 各點에서 그 값이 존재하고 正則函數가 됨을 안다. 마찬가지로 α가 實數로 $x\to-\infty$ 일 때 $u(x)e^{-\alpha x}\to 0$이면 $U(\lambda)$는 $I_m\lambda<\alpha$의 各點에서 正則이다.

지금 $f(x)e^{-\beta x}$가 어떤 β에 對하여 $x\to\infty$임에 따라서 零이 되고 $u(x)$도 어떤 $\alpha<\beta$에 對하여 $x\to-\infty$일 때 零이 된다고 생각하자. $I_m\lambda>\beta$에서 正則인 函數 G를 G_+로 表示하고 $I_m\lambda<\alpha$에서 正則인 函數 H를 H_-로 表示하면 式(1-7)은

$$F_+(\lambda)=-2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{a-i\lambda}\right)_+ +U_-(\lambda)\right]\cdot\sqrt{\lambda^2-i\lambda} \qquad (1\text{-}8)$$

이 된다.

式(1-8)에 意味가 있기 爲하여는 F_+와 U_-가 定義된 逆變換路線을 包含하는 共通領域이 存在하여야 한다. 以上을 圖形으로 나타내면 그림 1과 같다. 이제 式(1-8)은 다음과 같은 形으로 써줄 수 있다.

$$\frac{-F_+(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}=\frac{\sqrt{\lambda-i}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)}+\sqrt{\lambda-i}\,U_-(\lambda) \qquad (1\text{-}9)$$

더우기 (1-9)의 둘째項은

$$\frac{\sqrt{\lambda-i}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)}=\left[\frac{\sqrt{\lambda-i}-\sqrt{-ia-i}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)}\right]_- +\left[\frac{\sqrt{-ia-i}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)}\right]_+ \qquad (1\text{-}10)$$

과 같이 쓸 수 있다.

따라서

$$\left[\frac{-F(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}-\frac{\sqrt{-ia-i}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)}\right]_+ =\left[\frac{\sqrt{\lambda-i}-\sqrt{-ia-i}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)}+\sqrt{\lambda-i}\,U(\lambda)\right]_- \qquad (1\text{-}11)$$

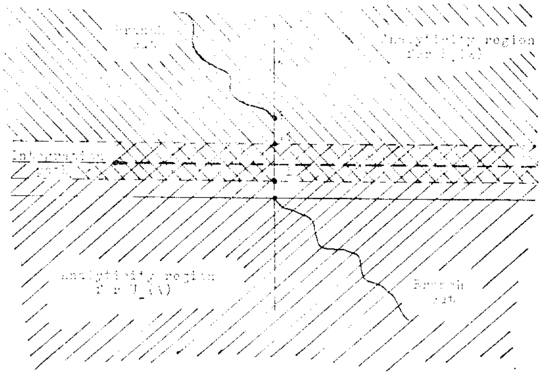

그림 1 λ-plane regions corresponding to Eq.(1-7)

式(1-11)의 왼쪽의 函數는 오른쪽 函數의 解析接續이고 양쪽은 하나의 全正則函數 $E(\lambda)$를 定義한다. $\varphi_y(x,0)$은 $x=0$에서 積分可能하므로 $I_m\lambda>\beta$에서 $|\lambda|\to\infty$임에 따라 $F_+\to 0$이 되고, 또 $\varphi(x,0)$가 $x=0$에서 有界이므로 $I_m\lambda<\alpha$에서 $|\lambda|\to\infty$임에 따라 $\lambda U_-(\lambda)$는 有界이다. 따라서 式(1-11)의 兩쪽은 $|\lambda|\to\infty$임에 따라 定義域안에서 零에 接近하고, Liouville의 定理에 依해 $E(\lambda)$은 恒等的으로 零이다.

그러면

$$F(\lambda)=\frac{-2\sqrt{\lambda}\ \sqrt{-ia-i}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)} \qquad (1\text{-}12)$$

또

$$\Phi(\lambda,y)=\frac{\sqrt{1+a}\ e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}(a-i\lambda)\sqrt{\lambda-i}}\exp(-|y|\sqrt{\lambda^2-i\lambda})$$

윗 式에서 후리에 逆變換을 取하면 $\varphi(x,y)$를 얻는다. 특히

$$\varphi_y(x,0+)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sqrt{1+a}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{\pi x}}-i\sqrt{a}\ e^{-ax}\ \mathrm{erf}(i\sqrt{ax})\right) & x>0\end{cases}$$

이다. $a=0$에 대해 $\varphi(x,y)=\mathrm{erfc}\,\eta$를 얻는다. 여기서 $\eta=I_m\sqrt{x+iy}$이고 $0\leq\arg(x+iy)<2\pi$.

以上에서 본 바와 같이 直線 $y=0$, $-\infty<x<\infty$ 上에서 混合境界條件이나 또는 半直線上에 境界條件을 가진 問題에 있어서 후리에 變換方法에 의하여 式(1-8)과 같은 functional equation을 얻는 것이 普通이다. 이 方程式으로 부터 相異한 正則領域을 갖는 두개의 正則函數를 구해야 한다. 통상적으로 이 functional equation은 다음과 같은 形으로 써 줄 수 있다.

$$F_+(\lambda)K(\lambda)=A(\lambda)+U_-(\lambda) \qquad (1\text{-}14)$$

Wiener-Hopf 方法에서는 $K(\lambda)$를 아래와 같은 몫으로 分解해 주어야 한다.

$$K(\lambda)=\frac{L+(\lambda)}{M_-(\lambda)} \qquad (1\text{-}15)$$

따라서

$$F_+(\lambda)L_+(\lambda)=A(\lambda)M_-(\lambda)+U_-(\lambda)M_-(\lambda)$$

위에서 唯一한 混合된 函數는 $A(\lambda)M_-(\lambda)$이고 이것은 다음과 같이 두 項의 合으로 써 주어야 한다.

$$A(\lambda)M_-(\lambda)=P_-(\lambda)+Q_+(\lambda) \qquad (1\text{-}16)$$

그러면 解析接續의 이유에 의해서 다음의 方

程式을 얻게된다.

$$F_+(\lambda)L_+(\lambda)-Q_+(\lambda)=P_-(\lambda)+U_-(\lambda)M_-(\lambda)$$
$$=E(\lambda) \qquad (1\text{-}17)$$

윗 式에서 $E(\lambda)$는 全正則函數이다. $E(\lambda)$를 구하는 과정은 보통 $|\lambda|\to\infty$ 임에 따라서 $E(\lambda)$의 擧動을 調査함에 있어서 $x=0$에서 $u(x)$와 $f(x)$에 對한 制約條件을 使用하는 方法이다.

또 하나의 例로서 粘性流體의 흐름에 관련된 다음과 같은 問題를 생각하자[1].

D가 다시 半直線 $y=0$, $x>0$의 外部의 平面이라 할때 D内에서

$$\Delta\Delta\phi-\Delta\phi_x=0 \qquad (1\text{-}18)$$

이고 ϕ는 y의 奇函數이고 $\phi(x,0)=0$, $\phi_y(x,0)$

$$=\begin{cases} ? & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

이며 또 직선 $y=0$, $x>0$를 除外한 區間에서 $x^2+y^2\to\infty$ 임에 따라서, $\phi\to 0$이고, ϕ 및 grad ϕ는 모든 x,y에 對하여 有界이어야 한다고 하자. 式 (1-18)의 후리에 變換은

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\lambda^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\lambda^2+i\lambda\right)\Psi=0 \qquad (1\text{-}19)$$

이 되고, 境界條件 $\Psi(x,0)=0$와

$$\Psi(\lambda,y)=-\Psi(\lambda,-y)$$

을 考慮하면

$$\Psi(\lambda,y)=\frac{|y|}{y}A(\lambda)[\exp(-|y|\sqrt{\lambda^2})$$
$$-\exp(-|y|\sqrt{\lambda^2-i\lambda})] \qquad (1\text{-}20)$$

이 됨을 알 수 있다.

函數 $\sqrt{\lambda^2}$은 多價正則函數의 分枝로

$$\sqrt{\lambda^2}=\begin{cases} \lambda & \mathrm{Re}\lambda>0 \\ -\lambda & \mathrm{Re}\lambda<0 \end{cases} \qquad (1\text{-}21)$$

이 函數를 다음과 같은 極限으로 表示할 때 가장 便利하다.

$$\sqrt{\lambda^2}=\lim_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}}\sqrt{\lambda^2-i\varepsilon\lambda} \qquad (1\text{-}22)$$

$u(x)$를 앞서의 例에서 定義된 函數라 할 때 $\phi_y(x,0)$가 滿足시키는 條件으로부터

$$\Psi_y(\lambda,0)=A(y)(\sqrt{\lambda^2-i\lambda}-\sqrt{\lambda^2})$$
$$=U_-(\lambda)+\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{i\lambda}\right)_+ \qquad (1\text{-}23)$$

를 얻고, $f(x)\equiv\phi_{yy}(x,0+)-\phi_{yy}(x,0-)$의 후리에 변환은

$$F(\lambda)=2i\lambda A(\lambda) \qquad (1\text{-}24)$$

임은 안다.

ϕ는 $y=0$, $x<0$에서 式(1-18)을 滿足시키므로 $f(x)$는 $x<0$에서 零이고 $F(\lambda)$는 $F_+(\lambda)$가 된다.

方程式 (1-23)와 (1-24)는

$$U_-(\lambda)-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{iy}\right)_+$$
$$=F_+(\lambda)\frac{\sqrt{\lambda^2-i\lambda}-\sqrt{\lambda^2}}{2i\lambda}$$
$$=\frac{-F_+(\lambda)}{2(\sqrt{\lambda^2-i\lambda}+\sqrt{\lambda^2})} \qquad (1\text{-}25)$$

를 意味한다.

윗 式에서 式(1-14)의 $K(\lambda)$에 該當되는 項은 $(\sqrt{\lambda^2-i\lambda}+\sqrt{\lambda^2})^{-1}$이다. 그러나 λ平面上에 $\sqrt{\lambda^2-i\lambda}+\sqrt{\lambda^2}$이 單價이고 正則이 되는 水平的 細片이 存在하지 않으므로 이와 같은 難點을 除去해 줄 간단한 方法을 찾아야 한다. 이것은 $\sqrt{\lambda^2}$ 代身 $\sqrt{\lambda^2-i\varepsilon\lambda}$를 代入하고 式(1-22)의 極限處理를 解析過程中 適當한 點에 올 때까지 延期하므로서 可能하다. 式(1-25)에서 $\sqrt{\lambda^2}$를 $\sqrt{\lambda^2-i\varepsilon\lambda}$로 바꾸어 주면

$$\sqrt{\lambda^2-i\lambda}+\sqrt{\lambda^2-i\varepsilon\lambda}=(\sqrt{\lambda})_+$$
$$(\sqrt{\lambda-i}+\sqrt{\lambda-i\varepsilon})_- \qquad (1\text{-}26)$$

로 써줄 수 있다. 分明히 두 因數가 共通으로 正則인 細片은 $0<I_m\lambda<\varepsilon$의 사이에 있는 區間이다.

式(1-25)은 다음과 같이 써줄 수 있다.

$$U_-(\lambda)(\sqrt{\lambda-i}+\sqrt{\lambda-i\varepsilon})_-$$
$$-\left(\frac{\sqrt{\lambda-i}+\sqrt{\lambda-i\varepsilon}-\sqrt{-i}-\sqrt{-i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}\,i\lambda}\right)_-$$
$$=\left(\frac{-F(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}+\frac{\sqrt{-i}+\sqrt{-i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}\,i\lambda}\right)_+=E(\lambda)$$
$$(1\text{-}27)$$

Ψ 및 grad ϕ가 有界이므로 $E(\lambda)\equiv 0$을 얻게 되고, $\varepsilon\to 0$임에 따라 그 極限은

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i3/4\pi}\quad\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

따라서 解는 式(1-24)과 (1-20) 및 후리에 逆變換에 의하여 얻는다.

普通 Wiener-Hopf 方法을 使用함에 있어서 성가신 作業은 式(1-15)의 $L_+(\lambda)$와 $M_-(\lambda)$결정하는 일이다.

$$K(\lambda)=\frac{L_+(\lambda)}{M_-(\lambda)} \qquad (1\text{-}29)$$

의 因數 $L_+(\lambda)$와 $M_-(\lambda)$는 쉽게 觀察에 의해서 구할 수 있는 것이 아니기 때문에 L_+와 M_-을 求하는 구체적인 方法을 생각해야 한다.

$K(\lambda)$가 正則인 細片이 그 內部에 $K(\lambda)$의 根이 없는 部分細片 $\beta<I_m\lambda<\alpha$을 包含한다고 하자.

$$\ln K(\lambda)=\ln L_+(\lambda)-\ln M_-(\lambda) \qquad (1\text{-}30)$$

로 쓰면 L_+와 M_-이 正則이 되는 半平面內에서 根이 存在하지 않을 때 $\ln L_+$와 $\ln M_-$은 各各 그 對應하는 領域內에서 正則이다. 따라서 $K(\lambda)$를 商으로 分解하는 것은 $\ln K$를 和로 分解하는 것과 같다.

Γ가 λ를 包含하나 正則函數 $G(z)$의 特異點들을 包含하지 아니할 때

$$G(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{G(z)}{z-\lambda}dz \qquad (1\text{-}31)$$

임을 안다.

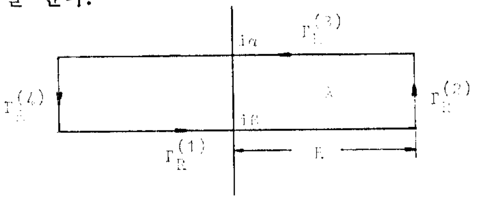

그림 2 Contour for Eq.(1—31)

Γ_R을 그림 2에 보인 積分路로 取하고 積分路의 各線分 $\Gamma_R^{(i)}$을 그림과 같다고 하자. 모든 R의 값에 대하여 Γ_R의 內部의 모든 點에서 正則이 되는 函數 $G(z)$만을 생각하고 또 $\Gamma_\infty^{(1)}$와 $\Gamma_\infty^{(3)}$ 上의 積分값이 存在하고 $\Gamma_\infty^{(2)}+\Gamma_\infty^{(4)}$위의 적분값이 零이 되는 函數 $G(z)$에 대하여 局限하여 생각한다.

$\Gamma_\infty^{(1)}$ 線上의 積分은 $\Gamma_\infty^{(1)}$보다 上部에 있는 모든 點에서 正則이 되는 函數이고 $\Gamma_\infty^{(3)}$에 따른 積分은 $\Gamma_\infty^{(3)}$보다 下部의 各點에서 正則이 되는 函數가 된다. 따라서

$$G(\lambda)=R_+(\lambda)\ -S_-(\lambda)$$

윗式에서

$$R_+(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\infty^{(1)}}\frac{G(z)}{z-\lambda}dz \qquad (1\text{-}32)$$

$$S_-(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_\infty^{(3)}}\frac{G(z)}{z-\lambda}dz \qquad (1\text{-}33)$$

이다.

따라서 윗式들에서 $G(z)$를 $\ln K(z)$로 놓으면 願하는 두 因數로의 分解는 $\ln L_+=R_+$, $\ln M_-=S_-$로 놓으므로서 얻을 수 있다.

이러한 Wiener-Hopf 形의 分解式을 要하는 많은 問題가 참고문헌[2]에 수록되어 있다.

2. 積分方程式

Wiener와 Hopf는 前述한 方法을 使用하여 다음과 같은 積分方程式의 解를 얻었다.

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty Ei(|x-t|)f(t)dt,\ x>0 \quad (2\text{-}1)$$

윗式에서 $Ei(x)$는 指數積分

$$Ei(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-s}}{s}ds \qquad (2\text{-}2)$$

이고 $f(x)$는 구해야 하는 未知函數이다.

더 一般的으로 다음과 같이 $x>0$에서 $f(x)$를 決定해야 하는 問題를 생각하자.

$$\int_0^\infty k(x-t)f(t)dt=g(x) \qquad (2\text{-}3)$$

上記式에서 $k(x)$와 $g(x)$는 주어진 函數이다. 函數 k,f,g의 擧動이 充分히 積分變換에 依한 方法이 意味있는 結果를 준다고 가정한다.

一般性을 잃음이 없이 $t<0$에 대해 $f(t)=0$라 놓으므로서 式(2-3)은 $x>0$에 對하여

$$\int_{-\infty}^\infty k(x-t)f(t)dt=g(x) \qquad (2\text{-}4)$$

이 되고, 따라서 이제 左邊의 후리에 變換은 쉽게 계산할 수 있다. 그러나 式(2-4)는 $x<0$에 對하여는 正確치 않다. 따라서 問題를 후리에 變換方法으로 解決할 수 있도록 하기 爲하여 式(2-4)를 다음과 같이 다시 써주어야 한다($-\infty<x<\infty$에 대해서도 成立하도록).

$$\int_{-\infty}^\infty k(x-t)f(t)dt=m(x)+h(x) \qquad (2\text{-}5)$$

上記式에서

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ ? & x>0\end{cases}$$

$$m(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ g(x) & x>0\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}? & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

$x>0$ 에서는 式(2-5)는 式(2-3)과 同一한데에 주목하면 式(2-5)의 解는 正確히 式(2-5)의 解가 된다 이상의 問題는 半은 알고 半은 모르는 函數를 包含하고 있고 이 函數들을 구해주어야 한다.

式(2-5)의 후리에 變換은

$$K(\lambda)F(\lambda)=M(\lambda)+H(\lambda) \qquad (2\text{-}6)$$

이고, $F(\lambda)$와 $H(\lambda)$는 各各 $F_+(\lambda)$와 $H_-(\lambda)$로써 줄 수 있고 $K(\lambda)$와 $M(\lambda)$는 未知이므로 또다시 Wiener-Hopf 形의 問題를 얻는다. 實際로 式(2-6)은 式(1-14)와 同一한 形이다.

한 例로서 $k(x)$를 다음과 같이 取하자.

$$k(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)K_0\left(\frac{1}{2}|x|\right)$$

위에서 K_0는 第二種의 Modified Bessel 函數이다. 그러면 積分變換에서 얻은 $K(\lambda)$는 $0<I_m\lambda<1$에 대하여 收斂하고 式(2-6)은 다음과 같이 된다.

$$-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda i}}F_+(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{a-i\lambda}+H_-(\lambda) \qquad (2\text{-}7)$$

式(2-7)은 1節에서 다룬 式(1-8)과 同一한 것이다. 實際로 式(2-3)은 式(1-8)을 후리에 逆變換하여 얻을 수가 있다.

Wiener-Hopf 形의 functional equation 으로 誘導되는 偏微分方程式境界値問題는 언제나 積分方程式으로 고쳐줄 수 있다(functional equation 을 逆變換하고 convolution 定理를 適用하므로서). 일단 積分方程式을 얻으면 위와 같은 過程으로 解析한다.

例로서 다음과 같은 적분방정식의 해를 구하자.

$$\int_0^\infty(1+k|x-t|)e^{-\alpha|x-t|}u(t)dt=e^{-\beta x},\ x>0, \qquad (12\text{-}8)$$

윗式을

$$\int_{-\infty}^\infty(1+k|x-t|)e^{-\alpha|x-t|}u(t)dt=m(x)+h(x)$$

로 고쳐 쓰고 후리에변환을 取하면 다음과 같이 된다.

$$2(\alpha-k)\frac{\lambda^2+\xi^2}{(\lambda^2+\alpha^2)^2}U_+(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{i}{\lambda+i\beta}+H_-(\lambda) \qquad (2\text{-}9)$$

위에서 $\xi=\alpha\sqrt{\dfrac{\alpha+k}{\alpha-k}}$ 이다.

式(2-9)는

$$2(\alpha-k)\frac{\lambda+i\xi}{(\lambda+i\alpha)^2}U_+(\lambda)$$
$$=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{(\lambda-i\alpha)^2}{(\lambda+i\beta)(\lambda-i\xi)}+H_-(\lambda)\frac{(\lambda-i\alpha)^2}{\lambda-i\xi}$$

이고 윗式의 두째 項은

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\xi+\beta)}\left[(\lambda+i\beta)-2i(\alpha+\beta)-\frac{(\lambda-i\alpha)^2}{\lambda-i\xi}\right]$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\xi+\beta)}\left[\frac{(\alpha+\beta)^2}{\lambda+i\beta}\right]_+$$

로써 쓸 수 있으므로 결국 2절에서 논한 解析接續의 논거에 의하여

$$U(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{(\alpha+\beta)^2}{2(\xi+\beta)(a-k)}\ \frac{(\lambda+i\alpha)^2}{(\lambda+i\beta)(\lambda+i\xi)}$$

이고

$$u(t)=\frac{1}{4\pi}\ \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\xi+\beta)(\alpha-k)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda+i\alpha)^2}{(\lambda+i\beta)(\lambda+i\xi)}e^{-i\lambda t}d\lambda$$

따라서

$$u(t)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{2(\xi+\beta)(\alpha-k)}\left[\delta(t)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{\xi-\beta}e^{-\beta t}+\frac{(\alpha-\xi)^2}{\beta-\xi}e^{-\xi t}\right] \qquad t>0$$

윗 式에서 $\delta(t)$는 Dirac delta function 이다.

다음에는 아래 같은 동차방정식을 생각해 보자.

$$\int_0^\infty k(x-t)f(t)dt=\sigma f(x),\ \ x>0 \qquad (2\text{-}10)$$

윗식을 구간 $(-\infty,\infty)$內의 x 값에 대하여 다음과 같이 써주자.

$$\int_{-\infty}^{\infty}k(x-t)f(t)dt=\sigma f(x)+h(x) \qquad (2\text{-}11)$$

위에서 $x<0$ 인때 $f(x)=0$ 이고 $x>0$ 인 때

$h(x)=0$ 이다. (2-11)의 變換은

$$\sqrt{2\pi}K(\lambda)F_+(\lambda)=\sigma F_+(\lambda)+H_-(\lambda)$$

이고

$$\sqrt{2\pi}K(\lambda)-\sigma=G_+(\lambda)/G_-(\lambda)$$

로 分離해 주면

$$G_+(\lambda)F_+(\lambda)=G_-(\lambda)H_-(\lambda)=E(\lambda)$$

가 되고 $E(\lambda)$는 全正則이다. 各各의 問題에 있어서 $E(\lambda)$를 밝혀야 한다 ; 보통 $E(\lambda)\equiv$const이다.

동차방정식의 한 例로서 式 (2-10)에서 $k(x)=e^{-\alpha|x|}$로 取하고 $\alpha>0$이라 하자. 또한 $\sigma<0$이라면

$$\frac{2\alpha-\sigma\alpha^2-\alpha\lambda^2}{(\lambda+i\alpha)(\lambda-i\alpha)}F_+(\lambda)=H_-(\lambda)$$

그리고

$$\left(\frac{2\alpha-\sigma\alpha^2-\sigma\lambda^2}{\lambda+i\alpha}\right)_+F_+(\lambda)=(\lambda-i\alpha)H_-(\lambda) \tag{2-12}$$

f와 h는 有界라고 가정하면 式(2-12)의 兩邊은 常數A로 놓을 수 있다. 따라서

$$F_+(\lambda)=A\frac{\lambda+i\alpha}{2\alpha+\sigma\alpha^2-\sigma\lambda^2}$$

$$H_-(\lambda)=\frac{A}{\lambda-i\alpha}$$

여기서 逆變換積分路線은 $F_+(\lambda)$의 分母의 두근보다 위로 통과해야 한다. 그 解는

$$f(x)=A_1\left(\cos x\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}-\alpha^2}+\frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha/\sigma-\alpha^2}}\sin x\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}-\alpha^2}\right)$$

이다.

또 하나의 例로서 다음과 같은 式(2-1)의 Milne 問題를 생각하자.

$$1/2\int_0^\infty Ei(|x-t|)f(t)dt=\sigma f(x),\ x>0$$

윗式에서 $\sigma>1$이고 $|\sigma-1|\ll1$이다. 후리에 變換을 取하면

$$\left(\frac{\arctan\lambda}{\lambda}-\sigma\right)F_+(\lambda)=H_-(\lambda) \tag{2-13}$$

이고 여기서 函數 $\arctan\lambda=(1/2i)[\ln(1+i\lambda)-\ln(1-i\lambda)]$는 $\lambda=\pm i$에 分枝點이 있고 分枝切斷은 原點에서 멀어지는 쪽으로 取해야 한다. 原點近處에 있는 $\arctan\lambda=\sigma\lambda$의 두근을 $\pm\lambda_0$로 表示하면, $|1-\sigma|\ll1$이므로 $\lambda_0\cong i\sqrt{3(\sigma-1)}$이다. $\lambda^{-1}\arctan\lambda-\sigma$에 分解方法을 使用해 주기 위해서는 이 函數를 修正하여 無限細片內에서 이 함수가 根을 갖지 않게 하고 또 $Re\lambda\to\pm\infty$일 때 1에 接近하도록 해주어야 한다. 그렇기 爲해서 分解를 하기 前에 $-(\lambda^2+1)/[(\lambda^2-\lambda^2)\sigma]$로 곱해주면 된다. 지금

$$\frac{-(\lambda^2+1)}{\sigma(\lambda^2-\lambda_0^2)}\left(\frac{\arctan\lambda}{\lambda}-\sigma\right)=\frac{G_+(\lambda)}{G_-(\lambda)}$$

로 써주면

$$(\lambda+i)^{-1}(\lambda^2-\lambda_0^2)G_+(\lambda)F_+(\lambda)$$
$$=-\frac{\lambda-i}{\sigma}H_-(\lambda)G_-(\lambda)$$

이 되고 이 식에서 $F_+(\lambda)=\frac{\text{const}}{G_+(\lambda)(\lambda^2-\lambda_0^2)}(\lambda+i)$를 얻는다.

逆變換을 取하면

$$f(x)=A\left[\frac{(\lambda_0+i)\exp(-i\lambda_0x)}{2\lambda_0G_+(\lambda_0)}-\frac{(-\lambda_0+i)\exp(-i\lambda_0x)}{2\lambda_0G_+(-\lambda_0)}\right]+q(x)$$

위에서 A는 常數이고 $q(x)$는 $G_+(\lambda)$의 分枝切斷에 沿한 積分값을 나타내고 따라서 $O(e^{-x})$이다. 따라서 $f(x)=A_1\sin(\lambda_0x+\nu)+O(e^{-x})$이다.

3. 靜彈性問題

Wiener-Hopf 方法은 靜彈性學에서의 균열 問題나 펀치(punch)에 의한 압흔(indentation)의 問題와 같은 混合境界値問題에 탁월하다[3, 4]. 한 例로 이 節에서는 半無限彈性空間을 끝이 평평한 원통형 펀치로 누르는 問題를 解析해 보기로 한다. 이 問題의 解는 잘 알려져 있다[5, p. 458]. 이 問題는 보통 圓筒座標系로 解析되어 있으나, Wiener-Hopf 方法을 적용키 위하여 球座標系(r,θ,φ)를 使用하면 半無限空間 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$의 境界 $\theta=\frac{\pi}{2}$에 다음과 같은 條件이 주어졌다고 할 수 있다.

$$u_0\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=-\varepsilon,\ 0<r<1; \tag{3-1}$$

$$\sigma_{\theta\theta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0,\ r>1; \tag{3-2}$$

$$\sigma_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right)=0, \quad r>0 \qquad (3\text{-}3)$$

球座標의 軸對稱問題에 있어서 變位 및 應力은 $\theta=\frac{\pi}{2}$上에서는 두개의 調和函數 $\varphi(r,\theta)$ 및 $\psi(r,\theta)$로 다음과 같이 表示된다[6].

$$u_\theta=\frac{1}{r}\varphi_\theta+(2\beta-1)\psi \qquad (3\text{-}4)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=2\mu\left[\frac{1}{r}\psi_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}+\beta\frac{\psi_\theta}{r}\right] \qquad (3\text{-}5)$$

$$\sigma_{r\theta}=2\mu\left[\frac{1}{r}\varphi_{r\theta}-\frac{1}{r^2}\varphi_\theta+(\beta-1)\psi_{-s}\right] \qquad (3\text{-}6)$$

위에서 ψ와 φ의 첨자들은 偏微分을 나타낸다.

φ와 Ψ의 Mellin 變換을

$$\Phi(s,\theta)=\int_0^\infty r^{s-2}\varphi(r,\theta)dr,$$

$$\Psi(s,\theta)=\int_0^\infty r^{s-1}\psi(r,\theta)dr$$

이라면 Φ와 Ψ는 다음을 만족시킨다.

$$\Phi''+\cot\theta\Phi'+(s-1)(s-2)\Phi=0,$$

$$\Psi''+\cot\theta\Psi'+s(s-1)\Psi=0 \qquad (3\text{-}7)$$

여기서 prime은 θ에 관한 미분을 표시한다.

윗 식의 $\theta=\frac{\pi}{2}$에서 有界인 解는

$$\Phi(s,\theta)=A(s)P_{s-2}(\cos\theta),$$

$$\Psi(s,\theta)=B(s)P_{s-1}(\cos\theta) \qquad (3\text{-}8)$$

이다. 이제 境界條件(3-1)과 (3-2)을 다음과 같이 써 주자.

$$u_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right)=\left\{\begin{array}{ll} g_+(r), & 0<r<1 \\ g_-(r), & r>1 \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}9)$$

$$\sigma_{\theta\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right)=\left\{\begin{array}{ll} 2\mu h_+(r), & 0<r<1 \\ 0, & r>1 \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}10)$$

윗식에서 $g_+(r)$은 물론 $-\varepsilon$이지만 $g_-(r)$와 $h_+(r)$은 各各 $r>1$과 $0<r<1$에서 未知의 函數이다.

다음과 같은 Mellin 變換

$$\bar{u}_\theta(s,\theta)=\int_0^\infty r^{s-1}u_\theta(r,\theta)dr,$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(s,\theta)=\int_0^\infty r^s\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)dr$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta}(s,\theta)=\int_0^\infty r^s\sigma_{r\theta}(r,\theta)dr,$$

$$G_+(s)=\int_0^1 r^{s-1}g_+(r)dr$$

$$G_-(s)=\int_1^\infty r^{s-1}g_-(r)dr$$

$$H_+(s)=\int_0^1 r^s h_+(r)dr \qquad (3\text{-}11)$$

을 使用하면 境界條件(3-9)은 다음과 같이 變換된다.

$$\bar{u}_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right)=G_+(s)+G_-(s) \qquad (3\text{-}12)$$

式(3-4)의 變換을 取하면

$$\bar{u}_\theta\left(s, \frac{\pi}{2}\right)=\Phi'+(2\beta-1)\Psi \qquad (3\text{-}13)$$

이고 式(3-8)을 윗식에 代入하면

$$A(s)P^1_{s-2}(\theta)+B(s)(2\beta-1)P_{s-1}(\theta)$$
$$=G_+(s)+G_-(s) \qquad (3\text{-}14)$$

式(3-14)의 계산과정에서

$$\frac{d}{d\theta}\left[P_\nu(\cos\theta)\right]=P^1_\nu(\cos\theta)$$

임[7]을 사용하였다. 여기서 $P^1_\nu(\cos\theta)$는 associated Legendre 函數이다. 또 境界條件(3-3)와 (3-10)은 各各 다음과 같이 된다.

$$sA(s)P^1_{s-2}+B(s)s(\beta-1)P_{s-1}=0 \quad (3\text{-}15)$$

$$A(s)(s-1)^2P_{s-2}-B(s)\beta P^1_{s-1}=-H_+(s) \qquad (3\text{-}16)$$

이 節에서 Legendre 函數의 argument가 省略되었을 때는 零임을 意味한다. 지금 式(3-15)에서

$$A(s)=-B(s)\frac{s(\beta-1)P_{s-1}}{sP^1_{s-2}} \qquad (3\text{-}17)$$

따라서 式(3-14)로 부터

$$B(s)=\frac{[sG_+(s)+G_-(s)]}{\beta sP_{s-1}} \qquad (3\text{-}18)$$

式(3-18)과 (3-17)를 式(3-16)에 代入하면

$$K(s)[G_+(s)+G_-(s)]=H_+(s) \qquad (3\text{-}19)$$

여기서

$$K(s)=\left[1-\frac{1}{\beta}\right](s-1)^2\frac{P_{s-2}}{P^1_{s-2}}+\frac{P^1_{s-1}}{P_{s-1}} \qquad (3\text{-}20)$$

이다.

式(3-20)에 다음식[8]

$$P^\mu_\nu(\theta)=\frac{2^\mu\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+1}{2}\right)} \qquad (3\text{-}21)$$

를 使用하면

$$K(s)=\frac{2}{\beta}\;\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \tag{3-22}$$

지금 $K(s)$를 각각 $\mathrm{Re}(s)>0$와 $\mathrm{Re}(s)<1$에서 근이 없고 正則인 두 因數 $K_+(s)$와 $K_-(s)$로서

$$K(s)=\frac{K_-(s)}{K_+(s)}$$

의 형으로 分解하면 式(3-22)으로부터 쉽게 관찰에 의하여

$$K_+(s)=\beta\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)},\quad K_-(s)=2\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \tag{3-23}$$

임을 알 수 있다. 윗 式에서 $K_+(s)$와 $K_-(s)$는 各各 $\mathrm{Re}(s)>0$와 $\mathrm{Re}(s)<1$에서 根이 없고 正則이며, $|s|\to\infty$임에 따라 $K_+(s)=O(s^{-1/2})$이고 $K_-(s)=O(s^{1/2})$이다. 따라서 式(3-19)는 다음과 같다.

$$K_+(s)H_+(s)-K_-(s)G_-(s)+f(s)=0 \tag{3-24}$$

윗 式에서

$$f(s)=\frac{2\varepsilon}{s}\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}$$

이며 $f(s)$를 각각 $\mathrm{Re}(s)>0$와 $\mathrm{Re}(s)<1$에서 正則인 $f_+(s)$와 $f_-(s)$의 合 $f_+(s)+f_-(s)$로 써 주어야 한다. 이것은 Cauchy의 定理에 의하여 쉽게 구할 수 있고 다음과 같다.

$$f_+(s)=2\varepsilon\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\Gamma\left(\frac{2-t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-t}{2}\right)}\frac{dt}{t-s}$$

$$f_-(s)=2\varepsilon\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{\Gamma\left(\frac{2-t}{2}\right)}{t\Gamma\left(\frac{1-t}{2}\right)}\frac{dt}{t-s}$$

위에서 γ_1과 γ_2는 各各 $\mathrm{Re}(t)=a$, $a+i\infty$에서 $a-i\infty$까지의 積分路와 $\mathrm{Re}(t)=b$, $b-i\infty$에서 $b+i\infty$까지의 積分路이고 또 $0<a<\mathrm{Re}(s)<b<1$이다. 위의 두 積分에서 Gamma 函數는 왼편의 半平面上에서 正則이므로 積分路를 왼쪽으로 닫아주어야 한다. 被積分函數의 絶對값이 $O(|t|^{-3/2})$이므로 왼쪽의 閉曲線에 따라 積分한 값은 零이 되므로 留數의 定理에 따라

$$f_+(s)=\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi s}},$$

$$f_-(s)=\frac{2\varepsilon}{s}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right] \tag{3-25}$$

$f_+(s)$가 $\mathrm{Re}(s)>0$에서 正則임은 分明하나 $f_-(s)$는 $s=0$에 極이 있는 것 같이 보인다. 그러나 쉽게 $\lim_{s\to 0}f_-(s)=-\varepsilon\ln 4/\sqrt{\pi}$임을 보일 수 있다. 따라서 Wiener-Hopf 方程式은

$$K_+(s)H_+(s)+\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi s}}=K^-(s)G_-(s)$$

$$-\frac{2\varepsilon}{s}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right] \tag{3-26}$$

이고 윗 式의 왼쪽은 $\mathrm{Re}(s)>0$에서, 오른쪽은 $\mathrm{Re}(s)<1$에서 各各 正則이다. 양쪽은 공통세편 內에서 같고 따라서 상호의 解析接續이 된다. 앞에서의 논거에 依해서

$$H_+(s)=-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}\,sK_+(s)}=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}\,\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+s}{2}\right)} \tag{3-27}$$

$$G_-(s)=\frac{2\varepsilon}{sK_-(s)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\frac{\varepsilon}{s}\left[1-\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}\right] \tag{3-28}$$

式(3-27)의 Mellin 逆變換을 取하면

$$h_+(r)=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}\,\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\left(\frac{2+s}{2}\right)}r^{-s-1}ds,\quad 0<r<1. \tag{3-29}$$

위의 積分을 計算하기 위해서는 $r<1$이므로 積分路線을 왼쪽 半平面上에서 닫아 주어야 이

閉曲線에 따라 積分한 값이 零이 된다. 被積分函數는 $s=-(2n+1), n=0,1,2,$에 極이 있고 n번째 極에서의 留數는

$$\frac{2\Gamma(n+1/2)}{\pi n!}r^{2n}$$

따라서

$$\sigma_{\theta\theta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=2\mu h_{+}(r)=-\frac{4\mu\varepsilon}{\pi\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}\ \ n!}$$

$$r^{2n}=-\frac{4\mu\varepsilon}{\pi\beta}(1-r^2)^{-1/2},\ 0<r<1$$

다음에 式(3-28)과 式(3-9)으로 부터

$$u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=g_{-}(r)=\varepsilon\frac{1}{2\pi i}$$

$$\int_\gamma\left[1-\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}\right]r^{-s}\frac{ds}{s},\ r>1, \tag{3-30}$$

윗 式에서는 $r>1$이므로 오른쪽 半平面위에서 積分路線을 닫아주어야 하고 이 領域內에서 式(3-30)의 첫 項은 正則이므로

$$u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{s\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}$$

$$r^{-s}ds. \tag{3-31}$$

式(3-31)의 被積分函數의 單純極은 $s=2n+1$, $n=0,2,1,$에 있고 n번째 極에서의 留數는

$$-\frac{2}{\pi}\ \frac{\Gamma(n+1/2)}{(2n+1)n!}r^{-2n-1}$$

이다. 積分을 時計方向으로 하였으므로 積分값은 留數들의 和의 陰값이므로

$$u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2\varepsilon}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}(2n+1)}\ \frac{r^{-2n-1}}{n!}$$

$$=-\frac{2\varepsilon}{\pi}\sin^{-1}\frac{1}{r},\ r>1.$$

따라서

$$u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}-\varepsilon \\ -\frac{2\varepsilon}{\pi}\sin^{-1}\frac{1}{r},\ \ r<1.\end{cases}$$

이다.

參 考 文 獻

1. J.A. Lewis and G.F. Carrier, Quart. Appl. Math., 7 : 228(1949)
2. B. Noble, Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, Pergamon Press, N.Y., 1958
3. R.D. Low and H.J. Weiss, Angew. Math. und Phys., 13, 232, 1962
4. M.P. Stallybrass, Quart. Journ. Mech. and Applied Math, Vol. XXIII, Pt. I,35, 1970
5. I.N. Sneddon, Fourier Transform, McGraw-Hill, N.Y., 1951
6. E. Sternberg, R.A. Eubanks, and M.A, Sadowsky, J. Appl. Phys. 22, 1951
7. E.T. Whittaker and G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, Camb. Univ. Press. 1973
8. A. Erdelyi et al., Higher Transcendental Functions, Vol. I, McGraw-Hill, N.Y., 1953

◇