◀ 論 文 ▶

表面의 熱束이 一定한 球로 부터의 定常層流 自然對流 熱傳達

孫 炳 鎭* 李 寬 洙* 崔 炯 哲** 李 完 益*

Steady Laminar Free Convection Heat Transfer from a Sphere with Uniform Surface Heat Flux.

Byung Jin Son, Kwan Soo Lee, Hyung Chul Choi
Wan Ik Lee

ABSTRACT

In this paper, a study is made of the steady laminar free convection boundary - layer equations on a sphere with uniform surface heat flux.

To solve the boundary - layer equations, well-known Pohlhausen's simiarity solution for vertical plates is adopted just the same for spherical bodies by introducing twonondimensional parametric functions, so called azimuth functions.

To determine the values of the azimuth functions which are expressed in series at the two points (the upper stagnation point and the equator), trial and error method is required.

It is concluded that the heat transfer results are in good agreement with obtained from perturbation method and Von Karman - Pohlhausen method within the steady laminar free convection region for Pr = 0.70.

漢陽大學校 機械工學科
* 漢陽大學校 大學院

記 號 說 明

C_p : 정압비열
F : 식(7)에서 정의된 무차원 유량함수
Gr^* : $g\beta q_w \cdot R^4 / k\nu^2$
k : 열전도 계수
p : P를 표준화하여 얻어진 함수
P_0 : $X=0$에서의 P의 값
Pr : Prandtl 수
q : Q를 표준화하여 얻어진 함수
q_w : 표면 열유속
R : 구의 반지름
r : $R\sin\frac{X}{R}$
u : x성분 속도
v : y성분 속도
x, y : 좌표
$X = x/R$
$Y = y/R$
α : 열확산 계수
β : 열팽창 계수
η : 식(6)에서 정의된 상사변수
θ : 식(8)에서 정의된 무차원 온도
μ : 점성 계수
ν : 동점성 계수
Ψ : 유량함수
〈상첨자〉
$(')$,$(\bar{-})$: 미분
〈하첨자〉
w = 벽
∞ : 주위

Ⅰ. 緖 論

相似變換法은 1921년 Pohlhausen이 垂直平板에서의 自然對流 熱傳達 解析에서 처음으로 使用하였다.

水平圓筒 및 球周圍의 自然對流 熱傳達 解析에서 座標系를 이들 物體의 表面에 적절히 선정하면, 이들 物體周圍 流體의 流動을 支配하는方程式(質量, 運動量, 에너지)이 垂直平板에서의 支配方程式과 유사해진다. 이때, 方位函數라는 개념을 도입한 相似變換法을 使用하면, 垂直平板에 대한 旣存의 熱傳達 결과를 그대로 利用할 수 있다는 잇점을 갖고 있다. 그러나 方位函數는 停滯點에서 特異點을 갖기때문에 唯一하게 決定되지 못하고, 2個의 方位函數가 얻어진다. 表面溫度가 一定한 경우에 水平圓筒이나 球의 自然對流 熱傳達 및 凝縮熱傳達 解析에서는 2個의 方位函數중 計算이 용이한 한개만을 使用하여 熱傳達을 計算하였다.[1,2,3] 이러한 方位函數의 약점때문에 Son[4]은 球의 表面溫度가 一定한 경우에 凝縮熱傳達 解析과정에서 方位函數와 境界層方程式에 대한 再考를 하였다.

本 論文에서는 再考된 方位函數의 개념을 도입하여, 球의 表面의 熱束이 一定한 경우의 自然對流 熱傳達 現象을 相似變換法으로 解析하였다. 그리고 本 論文의 結果를 攝動法에 의한 結果 및 Von Karman의 積分解와 서로 比較하였다.

Ⅱ. 理論解析

Ⅱ-1. 問題의 內容

表面의 熱束이 一定한 球의 上部停滯點을 座標의 原點으로 하고, 原點으로부터 子午線을 따라 측정한 孤의 길이를 x座標, 球面으로부터의 의 垂直거리를 y座標로 하는 曲面座標系가 Fig.1과 같고 周圍流體에 대하여 다음과 같이 假定한다.

① 熱擴散係數, 熱傳導係數, 動粘性係數는 溫度의 函數가 아니다.

② 境界層의 垂直한 方向으로는 壓力變化가 없다.

③ 境界層의 두께는 球의 曲率半徑에 비하여 상당히 작다.

위와 같은 假定下에서 支配方程式과 境界條件은 다음과 같다.[6]

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru)+\frac{\partial}{\partial y}(rv)=0 \quad (1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T\infty)\sin\frac{x}{R} \quad (2)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

境界條件 :

$$y=0\ ;\ u=v=0\ ,\ -k\frac{\partial T}{\partial y}=q_w \quad (4a)$$

$$y\to\infty\ ;\ u\to 0\ ,\ T\to T\infty \quad (4b)$$

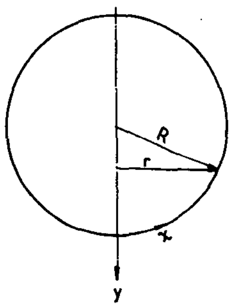

Fig. 1 Coordinate system

Ⅱ－2 . 境界層方程式의 相似變換

質量保存法則을 만족시키는 流量函數 Ψ 를 도입하고, 아울러 方位函數 P(x), Q(x)를 포함하는 相似變換 η , $F(\eta)$ 및 $\theta(\eta)$를 다음과 같이 정의한다.

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r\Psi),\quad v=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(r\Psi) \quad (5)$$

$$\eta=(Gr^*)^{1/5}\,YP(X) \quad (6)$$

$$F(\eta)=\frac{\Psi(x,y)}{\nu(Gr^*)^{1/5}Q(X)} \quad (7)$$

$$\theta(\eta)=\frac{P(X)(T\infty-T)(Gr^*)^{1/5}}{R\,q_w/k} \quad (8)$$

위에서 정의한 相似變數를 使用하면 支配方程式과 境界條件은 다음과 같다.

$$\frac{P^4Q}{\sin X}F''-\frac{P^2Q}{\sin X}(P\bar{Q}+Q\bar{P})(F')^2+\frac{P^3Q}{\sin X}(\bar{Q}+Q\cot X)FF''-\theta=0 \quad (9)$$

$$\theta''+Pr\left\{\frac{1}{P}(\bar{Q}+Q\cot X)\theta'F+\frac{\bar{P}Q}{P^2}\theta F'\right\}=0 \quad (10)$$

$$\eta=0\ ;\ F=F'=0\ ,\ \theta'=1 \quad (11a)$$

$$\eta=\infty\ ;\ F'\to 0\ ,\ \theta\to 0 \quad (11b)$$

여기서 η에 대한 微分은 "1"로, X에 대한 微分은 "·′"로 表示하였다.

Ⅱ－3 . 方位函數 P(X), Q(X)의 計算

表面의 熱束이 一定한 垂直平板에 대하여 별개의 相似變數를 使用함으로써, 變換된 支配方程式 및 境界條件은 다음과 같다.[7]

$$F''-3(F')^2+4FF''-\theta=0 \quad (12)$$

$$\theta''+Pr\{4\theta'F-\theta F'\}=0 \quad (13)$$

$$\eta=0\ ;\ F=F'=0,\ \theta'=1 \quad (14a)$$

$$\eta\to\infty\ ;\ F'\to 0,\ \theta\to 0 \quad (14b)$$

그러므로, 式(9)～(11)과 式(12)～(14)는 다음과 같은 조건하에서 서로 일치한다.

$$\frac{P^4Q}{\sin X}=1 \quad (15a)$$

$$\frac{P^2Q}{\sin X}(P\bar{Q}+Q\bar{P})=3 \quad (15b)$$

$$\frac{P^3Q}{\sin X}(\bar{Q}+Q\cot X)=4 \quad (15c)$$

$$\frac{1}{P}(\bar{Q}+Q\cot X)=4 \quad (15d)$$

$$\frac{\bar{P}Q}{P^2}=-1 \quad (15e)$$

따라서 式(15a)～(15e)를 만족시키는 P.Q를 求하면, 球에 대한 熱傳達問題는 旣存의 垂直平板에 대한 結果를 利用할 수 있다. 그러나 未知函數의 數보다 方程式의 갯수가 많으므로, 全體를 代表할 수 있는 方程式을 선정하여 解를 구하면, 다른 方程式의 解는 이 解에 從屬이 되어야 한다.

本 論文에서는 表面의 溫度가 一定한 경우에 대한 앞에서의 論文[2-4]에서와 같이 (15a), (15c),(15d)를 택하였다.

이 式들을 풀기위한 境界條件은 球의 上部停

滯點에 대한 物理的 고려로부터 다음과 같이 얻어진다.

a) 停滯點에서 球面에 垂直인 方向의 溫度勾配는 0이 아니다.

$$T-T_\infty \Big| X=Y=0 = \frac{-\frac{q_wR}{k}\theta(\eta)}{(Gr^*)^{1/5}P(X)}\Big|_{X=\eta=0} \neq 0$$

또는,

$$P(X=0)=P_0 \tag{16}$$

b) 流動은 對稱性을 갖고있다.

$$u=\frac{\nu}{R}(Gr^*)^{2/5}P(X)Q(X)F\eta \,|_{X=0}=0$$

또는,

$$Q(X=0)=0 \tag{17}$$

이 條件들을 고려하면

式(15a)은

$$\lim_{X\to 0}\frac{P^4Q}{\sin X}=\lim_{X\to 0}\frac{(4P^3Q\bar{P}+P^4\bar{Q})}{\cos X}=\bar{P}_0^4\bar{Q}$$

$(X=0)=1$

또는.

$$\bar{Q}(X=0)=\frac{1}{P_0^4} \tag{12}$$

그리고, 式(15d)는

$$\lim_{X\to 0}\frac{1}{P}(\bar{Q}+Q\cot X)=\frac{1}{P_0^5}+\lim_{X\to 0}\frac{Q}{P\tan X}=$$

$$\frac{1}{P_0^5}+\lim_{X\to 0}\frac{\bar{Q}}{(\bar{P}\tan X+P\sec^2X)}=\frac{2}{P_0^5}=4$$

또는.

$$P_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/5} \tag{19}$$

問題를 간편하게 취급하기 위하여 方位函數를 다음과 같이 標準化한다.

$$P(X)=\frac{p(X)}{P_0} \tag{20}$$

$$q(X)=\frac{Q(X)}{4P_0} \tag{21}$$

그러면 式(15a), (15c), (15d) 및式(16)~(19)는 다음과 같다.

$$\frac{p^4q}{\sin X}=\frac{1}{2} \tag{22a}$$

$$\frac{p^3q}{\sin X}(\bar{q}+q\cot X)=\frac{1}{2} \tag{22b}$$

$$\frac{1}{p}(\bar{q}+p\cot X)=1 \tag{22c}$$

$$p(0)=1,\quad q(0)=0,\quad \bar{q}(0)=\frac{1}{2} \tag{23}$$

式(22a)와(22c)에서 p를 소거하면,

$$\frac{q}{\sin X}(\bar{q}+q\cot X)^4=\frac{1}{2} \tag{24}$$

이다.

式(24)를 計算하기 위하여 球面을 上部停滯點부근과 赤道부근으로 나누었다.

그리고 上部停滯點에서 급수전개를 통해 $0\le X\le 45°$에 대한 方位函數의 값을 決定하였다

또한 $X\ge 45°$에 대한 값을 決定하기 위하여 적도에서도 이와 유사한 급수전개를 하고, 이에 의한 $X=45°$에서의 方位函數의 값이 먼저 定해진 그 값과 같아 지도록 하기 위하여 시행오차법을 행하였다.

그 결과는 Table. 1에 나타나 있다.

Table 1. Azimuth function P(x) and Q(x)

X (degree)	q	p	Q	P
0	0	1.0000	0	0.8706
10	0.0874	0.9983	0.3044	0.8691
20	0.1757	0.9932	0.6119	0.8646
30	0.2659	0.9847	0.9260	0.8572
40	0.3591	0.9727	1.2504	0.8468
50	0.4566	0.9570	1.5898	0.8332
60	0.5601	0.9377	1.9503	0.8163
70	0.6719	0.9145	2.3396	0.7961
80	0.7952	0.8871	2.7689	0.7723
90	0.9344	0.8553	3.2538	0.7446
100	1.0965	0.8186	3.8182	0.7126
110	1.2922	0.7765	4.4995	0.6760
120	1.5395	0.7283	5.3608	0.6340
130	1.8712	0.6726	6.5159	0.5856
140	2.3531	0.6079	8.1941	0.5292
150	3.1376	0.3535	10.9258	0.3077

II－4. 熱傳達

$\eta=0$ ($y=0$)일때 式(8)은 다음과 같이다.

$$(Gr^*)^{1/5}\frac{k}{q_wR}(T_w-T_\infty)=\frac{-\theta(0)}{P(X)} \tag{25}$$

여기서, $-\theta(0)$는 表面의 熱束이 일정한 垂平板에서의 값으로서, 이에 대한 常微分方程式 (12)~(14)를 풀면 얻어지나, 垂直平板에 대한

고論文(7,8)에 의하면

$$-\theta(0)=\left(\frac{5(Pr)^2}{4+9(Pr)^{1/2}+10Pr}\right)^{-1/5} \quad (26)$$

이다. 윗 式에 Pr = 0.70을 代入하면 $-\theta(0)=$ 1.4988이 되므로 Pr = 0.70에 대해서 式(25)는 다음과 같다.

$$(Gr^*)^{1/5}\frac{k}{qwR}(Tw-T\infty)=\frac{1.4988}{P(X)} \quad (27)$$

이에 대한 熱傳達結果를 攝動法 및 積分解에 의한 熱傳達結果[5]와 서로 비교하였다. 그 結果는 Fig. 2에 나타나 있다.

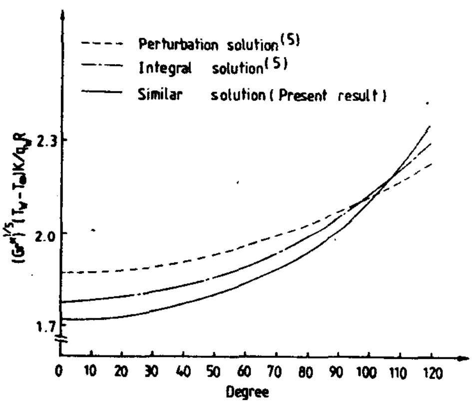

Fig. 2 Comparison of Various solutions

대부분 X = 120°부근에서는 流動이 層流에서 亂流로 遷移하며, 아울러 剝離현상이 일어난다는 사실이 알려져 있으므로 熱傳達 結果는 $0 \le X \le 120°$로 국한하였다.

Ⅲ. 結　論

方位函數를 도입한 相似變換法을 使用하여, 表面의 熱束이 일정한 球로부터의 定常 層流 自然對流 熱傳達 현상을 고찰하였다. 그 結果 얻은 結論은 다음과 같다.

(1) Pr = 0.70인 경우, 本 論文의 解와 旣存의 攝動法에 의한 解 및 積分解는, 球의 上部停滯點에서 최고 오차를 가지며, 그 값은 각각 8% 및 3%로 나타났다.

따라서 相似解는 旣存의 解들과 함께 工學的으로 유용하게 使用될 수 있다.

(2) 表面의 熱束이 일정한 垂直平板의 경우, Prandtl 수와 $\theta(0)$값 사이의 관계는 아주 간단한 數式으로 나타낼 수 있다. (式(26)참조)

따라서, 이를 그대로 使用하면, 表面의 熱束이 일정한 球에서의 熱傳達 관계식은, Pr = 0.70을 포함한 모든 Prandtl 수에 대하여 손쉽게 구할 수 있다.(式(25)참조).

參 考 文 獻

1. Hermann, R, Heat Transfer by Free Convection from Horizontal Cylinder in Diatomic Gases, NACA TM 1366, 1958
2. K.S.Whang and T.S. Lee, Steady Laminar Free Convection from a sphere, KSME, Vol.10, No.2, pp 71～77, 1970.
3. E.M.Sparrow, and J.L.Gregg. Laminar condensation Heat Transfer on a Horizontal Cylinder, Trans.ASME, Series C, Vol.81, No.4, pp 291～296, 1959
4. B.J.Son, Laminar Condensation Heat Transfer on a Sphere, KSME, Vol.13, No.3, pp 239-249, 1973.
5. T.Chiang, A.Ossin, C.L.Tien, Laminar Free convection From a Sphere, Trans. ASME, Vol.86, pp.539-542, 1964.
6. H.Schlichting, Boundary Layer Theory, 4th edition, McGraw-Hill Book-Company, Inc., New York, 1960.
7. E.M.Sparrow and J.L.Gregg, Laminar Free Convection From a Vertical Plate with Uniform Surface Heat Flux, Trans. ASME, Vol,48, pp.435-440, 1956.
8. Tetsu Fujii and Motoo Fujii, The Dependence of Local Nusselt Number on Prandtl Number in the case of Free Convection Along a Vertical Surface with Uniform Heat Flux, Int, J.Heat Mass Transfer, Vol.19, pp.121-122, 1966.