韓國 軍事運營分析 學會誌
第 8 卷 第 2 號, 1982, 12

雙行列게임의 平衡點

(Equilibrium Points of Bimatrix Games: A State-of-the-Art)

金 汝 根*

ABSTRACT

Bimatrix games are the two-person non-zero-sum non-cooperative games. These games were studied by Mills, Lemke, Howson, Millham, Winkels, and others. This paper is a systematic and synthetic survey relevant to bimatrix games. Among the many aspects of researches on bimatrix games, emphasis in this paper is placed on the relation of the equilibrium set to Nash subsets.

Topics discussed are as follows: Properties of equilibrium point; The structure of equilibrium set; Relation of Nash subsets to equilibrium set; Algorithm for finding the equilibrium points; Concepts of solutions on bimatrix games.

1. 序 論

雙行列 게임(bimatrix game)은 참가자가 二人으로 行列게임에서 처럼 참가자 1의 損失이 곧 참가자 2의 利得이 되지 않는 경우를 다루는 게임으로 二人 非零合非協助게임(two-person non-zero-sum non-cooperative game)이다.

雙行列게임의 대표적인 例로서 性의 對決(battle of sexes)과 범법자의 고민(prisoner's dilemma)이 있다. 性의 對決은 일요일에 가까운 남녀가 남자는 권투시합을 여자는 발레를 보러가기를 원한다. 그러나 두 사람이 각기 떨어져서 구경가는 것 보다는 서로 같이 구경가는 것이 더 좋다고 보는 경우 아래와 같이 利得行列을 만들 수 있다.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{女子} \\ & & \begin{array}{cc} \text{권투} & \text{발레} \end{array} \\ \text{男子} & \begin{array}{c} \text{권투} \\ \text{발레} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,\ 1) & (-1,\ -1) \\ (-1,\ -1) & (1,\ 2) \end{pmatrix} \end{array}$$

性의 對決

범법자의 고민은 두 공범자가 체포되어 각 범법자가 범죄사실에 대하여 감추느냐 실토하느냐에 따라 아래와 같은 형을 받게 된다

(*) 全南大學校 工科大學

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{범법자 2}} \\
 & & \text{감 춤} & \text{실 토} \\
\hline
\text{범법자 1} & \text{감춤} & \text{각 1년} & \text{1은 10년, 2는 3월} \\
 & \text{실토} & \text{1은 3월, 2년 10년} & \text{각 8년}
\end{array}$$

이를 實數利得을 갖는 行列로 만들면 아래와 같이 만들 수 있다.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{범법자 2} \\
 & & \begin{array}{cc}\text{감 춤} & \text{실 토}\end{array} \\
\text{범법자 1} & \begin{array}{c}\text{감춤}\\ \text{실토}\end{array} & \begin{pmatrix} (0.9, 0.9) & (0, 1) \\ (1, 0) & (0.1, 0.1) \end{pmatrix}
\end{array}$$

범법자의 고민

이렇게 雙行列게임은 참가자 1과 2의 利得의 合이 零이 되지 않으면서 非協助的인 경우이다.

그러면 雙行列게임의 구조와 平衡點에 대하여 알아보자. 참가자 1과 2의 各各의 單純戰略의 集合을 S, T라 하고

$S = \{ s_1, s_2, \cdots, s_m \}$

$T = \{ t_1, t_2, \cdots, t_n \}$로 표현하자.

그리고 참가자 1과 2의 各各의 利得行列은 참가자 1과 참가자 2가 各各 s_i, t_j의 單純戰略을 사용했을 때 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$인 行列로 표현할 수 있다. 따라서 雙行列게임은 (S, T, A, B)로 표현할 수 있는데 略하여 (A, B)로 흔히 표현한다.

참가자 1과 2의 各各의 混合戰略의 集合을

$$M(S) = \{ x \in R^m \ ; \ x \cdot e_m' = 1 \ ; \ x \geqq 0 \}$$

$$M(T) = \{ y \in R^n \ ; \ e_n \cdot y' = 1 \ ; \ y \geqq 0 \} \qquad \cdots\cdots (1)$$

로 표현하고 e_q는 $(1, \cdots, 1) \in R^q$ 로서 이루어진 行(row)벡터이고 x와 y 또한 行벡터이며 轉置(transposition)는 ′로 표현하기로 하자.

雙$(\bar{x}, \bar{y})$가 平衡點(equilibrium point)이기 위한 必要充分條件은

$$\begin{aligned} \bar{x} A \bar{y}' &\geqq x A \bar{y}' \quad x \in M(S) \\ \bar{x} B \bar{y}' &\geqq \bar{x} B y' \quad y \in M(T) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots (2)$$

이다. 위의 條件을 만족하는 $\bar{x}$, $\bar{y}$는 참가자 1과 2의 各 平衡戰略(equilibrium strategy)이라고 한다. 또한 E는 모든 平衡點의 集合이고 E_1과 E_2는 참가자 1과 2의 모든 平衡戰略의 集合을 나타내기로 한다. 式 (2) 條件을 만족하는 雙行列게임의 平衡點에 관한 연구가 많이 이루어졌다.

本 論文은 지금까지 연구된 雙行列게임의 平衡點과 관련된 여러 性質의 체계적인 정리에 主目的이 있다. 따라서 雙行列게임의 平衡點의 性質과 平衡點들의 集合과 Nash 可解(Nash solvable)의 部分集合과의 관계를 考察한다. 그리고 平衡點을 구하는 여러 技法과 Nash 可解의 最大部分集合(maximal Nash subsets)을 구함으로써 모든 平衡點을 구할 수 있는 解法을 보여준다. 또한 雙行列게임의 解의 여러 개념에 관하여 考察하고자 한다.

2. 平衡點의 性質

平衡點의 性質에 관하여 알아보자. 이에 관한 연구[1, 9-13, 15-17, 20, 22, 23, 25, 27, 28, 39, 41]가 활발히 행하여 졌다. 특히 Nash[27]에 의하여 雙行列게임에서 적어도 하나의 平衡點이 존재함을 보여 주었으며 Lemke와 Howson[17]은 代數學的으로 이를 증명하였다. 따라서 E_1, E_2, E는 空集合은 아니다.

平衡點의 定義에 대해 좀더 알아보자. 式 2)의 平衡點의 定義를 아래와 같이 표현할 수 있다.

$\bar{x} \in M(S)$, $\bar{y} \in M(T)$ 이라면 $(\bar{x}, \bar{y})$ 가 平衡點이기 위한 必要充分條件은

i) $\bar{x} A \bar{y}' = \max \{ x A \bar{y}' : x \in M(S) \}$

$\bar{x} B \bar{y}' = \max \{ \bar{x} B y' : y \in M(T) \}$ .... (2.a)

ii) $(\bar{x} A \bar{y}') \cdot e'_m \geqq A \bar{y}'$ .... (2.b)

$(\bar{x} B \bar{y}') \cdot e_n \geqq \bar{x} B$

i) 또는 ii) 로도 표현된다.

그리고 解集合은

$$P(B) = [(x, \beta) \in R^{m+1} : x \cdot e'_m = 1, \quad x \geqq 0, \ xB \leqq \beta \cdot e_n]$$

$$P(A) = [(y, \alpha) \in R^{n+1} : e_n \cdot y' = 1, \quad y \geqq 0, \ Ay' \leqq \alpha \cdot e'_m]$$

인 볼록多面體集合(convex polyhedral sets)으로 표현한다. 平衡點을 구하기 위하여 위의 條件을 만족하는 數理的인 形態로의 변환은 Mills [25]와 Mangasarian[20]에 의해 定理1과 같이 구하였다.

定理 1. $\bar{x} \in M(S)$, $\bar{y} \in M(T)$일 때 아래 1), 2), 3), 4)는 같은 의미이다.

1) $(\bar{x}, \bar{y})$가 平衡點이다.

2) 아래 二次計劃法(quadratic programming)의 最適解는 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 라고 할 때, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$가 존재한다.

$\text{Max. } x(A+B)y' - \alpha - \beta$

$(x, \beta) \in P(B)$; $(y, \alpha) \in P(A)$

3) 아래 조건을 만족하는 $\alpha, \beta \in R$이 존재한다.

$\bar{x}(A+B)\bar{y}' - \bar{\alpha} - \bar{\beta} = 0$

$(\bar{x}, \bar{\beta}) \in P(B)$

$(\bar{y}, \bar{\alpha}) \in P(A)$

4) 아래 條件을 만족하는 $\alpha, \beta \in R$이 존재한다.

$(\bar{x}B - \bar{\beta} \cdot e_n)\bar{y}' = 0$;$(\bar{x}, \bar{\beta}) \in P(B)$

$\bar{x}(A\bar{y}' - \bar{\alpha} \cdot e'_n) = 0$;$(\bar{y}, \bar{\alpha}) \in P(A)$

위의 2), 3), 4)의 證明은 참고문헌을 참고로 하고 생략한다. 위 定理1의 2), 3), 4)는 $(\bar{x}, \bar{y})$가 平衡點이기 위한 必要充分條件이다. 위의 조건 하나가 만족되면 $\bar{x} A \bar{y}' = \bar{\alpha}$, $\bar{x} B \bar{y}' = \bar{\beta}$가 된다.

각 참가자의 利得과 平衡戰略의 各 要素와의 관계에 대하여 알아보자. $A_i.$는 A의 i번째 行이고, $A \cdot j$는 A의 j번째 列을 나타낸다. B의 경우도 마찬가지로 하자

$M_1(x) = \{ i \mid x_i > 0 \}$,

$N_1(y) = \{ j \mid y_j > 0 \}$,

$M_2(y) = \{ i \mid A_i . y' = \max_k A_K . y' \}$

$N_2(x) = \{ j \mid xB_{\cdot j} = \max_k XB_{\cdot K} \}$라 정의하자. Millham[22]은 $M_1(x)$과 $N_1(y)$의 요소들을 essential이라 하였다. i가 $M_1(x)$에 속할 必要充分條件은 $A_i . y' = \alpha$이고, j가 $N_1(y)$에 속할 必要充分條件은 $xB_{\cdot j} = \beta$임을 보여 주었다. 즉, essential인 行과 列만 남기고 나머지 行과 列을 버리고 만든 行列을 各各 A_0, B_0라고 하고 x_0, y_0는 x, y에서 零을 갖는 要素를 전부 제거한 벡터라고 하면

$x_0 B_0 = (\beta, \cdots, \beta)$이고 $A_0 y'_0 = (\alpha, \cdots, \alpha)'$이다. 따라서 A의 모든 行에 대하여 $A_i . y' \leqq \alpha$이고 B의 모든 列에 대하여도 $xB_{\cdot j} \leqq \beta$이다.

二人게임의 특수한 경우로 二人常數合게임(two-person constant sum game)과 二人行常數合게임(two-person row-constant sum game)이 있는데 이들 平衡點은 行列게임으로 구해진다[12, 42].

二人常數合게임은 常數 C에 대해 $a_{ij} + b_{ij} = C \ \forall_{i,j}$인 게임을 말하며 二人行常數合게임은 $m \times n$인 雙行列 (A, B)에서 각 $i = 1, 2, \cdots, m$에 대해 $a_{ij} + b_{ij} = k_i$, $j = 1, 2, \cdots, n$을 만족하는 게임이다.

二人常數合게임의 경우는 $a^1_{ij} = a_{ij} - \frac{C}{2}$, $b^1_{ij} = b_{ij} - \frac{C}{2}, \forall_{i,j}$라고 두면 $a^1_{ij} + b^1_{ij} = 0$이 되어 行列게임과 같게 된다. 따라서 이

게임의 평형점은 行列게임과 같게 되고 단지 게임의 값은 A^1, B^1보다 $\frac{C}{2}$만큼 더 얻게 된다.

Isaacson과 Millham[12]에 의해 二人行常數合게임의 平衡點이 行列게임으로 풀 수 있음을 보여줬다.

定理 2. $(\bar{x}, \bar{y})$가 $\phi(x, y) = xAy$의 鞍點(saddle point)이면 $(\bar{x}, \bar{y})$는 二人行常數合게임 (A, B)의 平衡點이다.

證明. $(\bar{x}, \bar{y})$가 (A, B)의 平衡點이면, $\bar{x}A\bar{y}' \geqq xA\bar{y}'$ $x \in M(S)$이다. $K_{(m \times n)}$ 行列을

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 & \cdots\cdots & k_1 \\ k_2 & k_2 & \cdots\cdots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ k_m & k_m & \cdots\cdots & k_m \end{pmatrix} : a_{ij} + b_{ij} = k_i$$

$\bar{x}B\bar{y}' \geqq \bar{x}By'$ $\forall y \in M(T)$이므로 $\bar{x}(K-A)\bar{y}' \geqq \bar{x}(K-A)y'$이다. $\bar{x}K\bar{y}' = \bar{x}Ky'$ $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i k_i$ 이므로 $\bar{x}Ay' \geqq \bar{x}A\bar{y}'$이다. 따라서 充分條件은 만족·必要條件으로 $(\bar{x}, \bar{y})$가 xAy의 鞍點이면, $\bar{x}Ay' \geqq \bar{x}A\bar{y}'$로 부터 $\bar{x}A\cdot_j > \min_K \bar{x}A\cdot_K$이면 $y_j = 0$, $y_j > 0$이려면 $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i k_i - \bar{x}A\cdot_j \geqq \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i k_i - \bar{x}A\cdot_K$, $\forall k$ 즉 $\bar{x}B\cdot_j \geqq \bar{x}B\cdot_K$, $\forall k$ 이여서 $\bar{x}B\bar{y} \geqq \bar{x}By$가 된다. 또한 $\bar{x}A\bar{y}' \geqq xA\bar{y}'$로 부터 必要條件이 만족된다. □

二人零合게임에 의해 얻은 A의 平衡點은 二人行常數合게임의 平衡點이 됨을 보았다. 참가자 1의 利得을 α 얻었다면 참가자 2의 利得은 $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i k_i - \alpha$이다.

그러면 平衡點을 그대로 유지하기 위하여 (A, B) 雙行列의 값의 범위는 어떻게 되는가? 行列게임은 민감도 분석(sensitivity analysis)등을 통하여 平衡點의 安定性(stability)에 대하여 分析할 수 있다. 雙行列게임에서는 行列게임과 같이 쉽게 해결 되지 않는다.

定理 3. $(\bar{x}, \bar{y})$를 雙行列게임의 平衡點이라 하고 각 利得을 α, β라 하자. 그러면 A를 아래와 같이 A^1로 변환시켰을 때 $(\bar{x}, \bar{y})$가 또한 (A^1, B)의 平衡點이다. $\forall i \in M_1(\bar{x})$에 대해 $a_i \in R^n$은 $a_i\bar{y}' = C$를 만족하고 $i \notin M_1(\bar{x})$에 대해 $b_i \in R^n$은 $(A_i. + b_i)\bar{y}' \leqq \alpha + C$를 만족한다. 이때
$A^1_i. = A_i. + a_i$, $i \in M_1(\bar{x})$
$A^1_i. = A_i. + b_i$, $i \notin M_1(\bar{x})$ 이다.

證明. 平衡點의 정의인 $\bar{x}B\bar{y}' \geqq \bar{x}By'$는 만족, $\bar{x}A\bar{y}' \geqq xA\bar{y}'$를 $\bar{x}A^1\bar{y}' \geqq xA'\bar{y}'$가 만족함을 보이면 된다. $\bar{x}A^1\bar{y} = \alpha + C$이고 $A^1\bar{y}' \leqq \alpha + C$를 만족하므로 위 조건 만족.

B行列에 대하여도 같은 方法으로 B^1을 구할 수 있다. □

3. 平衡點의 集合構造와 Nash 可解

이 節에서는 式2)를 만족하는 모든 평형점의 集合을 구하여 보고 Nash의 의미에 있어서의 可解(solvable in the sense of Nash)와 Nash 部分集合(Nash subset)과 그 性質에 관해 다룬다.

우선 $\sigma(\bar{x})$, $J(\bar{y})$를 아래와 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{x}) &= \max\{\bar{x}By' ;\ y \in M(T),\ \bar{x} \in M(S)\} \\ &= \max\{\bar{x}Bt_j ;\ \bar{x} \in M(S),\ j = 1, \cdots, n\} \\ J(\bar{y}) &= \max\{xA\bar{y}' ;\ x \in G(S),\ \bar{y} \in M(T)\} \\ &= \max\{s_i A y' ;\ \bar{y} \in M(T),\ i = 1, \cdots, m\} \end{aligned}$$

定義 1. $(\bar{x}, \sigma(\bar{x}))$가 P(B)의 頂點(extreme point)이고 $(\bar{y}, J(\bar{y}))$가 P(A)의 頂點이면 $(\bar{x}, \bar{y})$를 頂點平衡點(extreme equilibrium point)이라 한다.

$\bar{x}$는 참가자 1의 頂點平衡戰略이라 하고, $\bar{y}$는 참가자 2의 頂點平衡戰略이라 한다. 또한 참가자 1과 2의 이러한 戰略의 集合을 E_1^e, E_2^e라 하자. 그러면 E_1^e과 E_2^e는 어떻게 구할 수 있는가? Mangasarian〔20〕은 Balinski〔2〕의 技法을 使用하여 P(A)와 P(B)의 모든 꼭지점(vertex)을 찾아 이들중 定理 1.4)에 의해 $x(Ay'-\boldsymbol{\alpha}\cdot e_m')=0$와 $(xB-\boldsymbol{\beta}\cdot e_n)y'=0$을 만족하는 集合 E　　集合 E_2^e를 찾을 수 있음을 보여 주었다. 集合 E_1^e과 E_2^e를 利用하여 모든 平衡點을 찾기 위하여 먼저 定理 4를 보자.

定理 4. $(\bar{x},\bar{y})$는 平衡點이고 $(\bar{x},\sigma(\bar{x}))=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x^i,\beta_i)$. $\lambda_i>0\ \forall i$; $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i=1$ 인 $(x^i,\beta_i)\in P(B)$, $i=1,\cdots,r$이면 $(x^i,\bar{y})$는 平衡點이고 $\beta_i=\sigma(x^i)$, $i=1,\cdots,r$이다〔41〕.

證明. 定理 1.4)를 이용하자. $\bar{\beta}=\sigma(\bar{x})$일 때

$$
\begin{aligned}
O &= (\bar{x}B-\bar{\beta}\cdot e_n)\cdot\bar{y}'=\Big[\Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x^i\Big)B \\
&\quad -\Big(\sum_{i=1}^{r}\beta_i\Big)\cdot e_n\Big]\cdot\bar{y}'=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i[x^iB- \\
&\quad \beta_i\cdot e_n]\cdot\bar{y}'
\end{aligned}
$$

$\lambda_i[x^iB-\beta_i\cdot e_n]\cdot y'\leqq 0$이고 $\lambda_i>0$ $i=1,\cdots,r$이므로

$$(x^iB-\beta_i\cdot e_n')\cdot\bar{y}'=0,\quad i=1,\cdots,r \qquad\cdots\cdots(3)$$

이다.

같은 方法으로 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\mathcal{J}(\bar{y})$일 때

$$x^i(A\bar{y}'-\bar{\boldsymbol{\alpha}}\cdot e_n')=0,\quad i=1,\cdots,r \qquad\cdots\cdots(4)$$

(3)과 (4)로 부터 定理 1.4)에 의하여 (x^i,y)는 平衡點이고 $\beta_i=\sigma(x^i)$, $i=1,\cdots,r$이다. 비슷한 方法으로 (x,y^i)와 $\boldsymbol{\alpha}_i=\mathcal{J}(y^i)$에 대하여도 成立한다.□

Mangasarian〔20〕과 Vorob'ev〔39〕는 雙行列게임의 모든 平衡點은 어떤 頂點平衡點들의 볼록組合(convex combination)으로 표현될 수 있음을 보여 주었다.

定理 5. 각 $\bar{x}\in E_1$에 대하여

$$(\bar{x},\sigma(\bar{x}))=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(x^i,\sigma(x^i))\ ;\ \lambda_i>0,$$

$\forall i$; $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i=1$을 만족하는 $x^i\in E_1^e$, $i=1,\cdots,r$가 존재한다. 따라서 $E_1\subseteqq\langle E_1^e\rangle$이다. $\bar{y}\in E_2$에 대하여도 비슷한 결과이다. 여기서 〈 〉는 볼록組合을 나타낸다.

證明. $(\bar{x},\bar{y})$가 平衡點인 $\bar{y}\in E_2$가 존재한다. 定理 1.2)에 의하여 $(\bar{x},\sigma(\bar{x}))$는 $\max.\ f(x,\boldsymbol{\beta})=x(A+B)\bar{y}'-\boldsymbol{\beta}-\mathcal{J}(\bar{y})$, $(x,\boldsymbol{\beta})\in P(B)$의 최적해이다. P(B)의 모든 頂點의 集合을 $P^e(B)$라 하면 위의 최적해는 $(x^i,\boldsymbol{\beta}_i)\in P^e(B)$, $i=1,\cdots,r$의 볼록組合으로 표현가능하다. 定理 1에 의하여 $(x^i,\bar{y})\in E$, $i=1,\cdots,r$이다. 같은 방법으로 $(\bar{y},\mathcal{J}(\bar{y}))$가 $P^e(A)$의 모든 頂點의 볼록組合으로 표현된 $(y^j,\boldsymbol{\alpha}_j)\in P^e(A)$, $j=1,\cdots,s$을 얻을 수 있다. 따라서 定理 4에 의하여 $(x^i,y^j)\in E$ $i=1,\cdots,r$. $j=1,\cdots,s$을 얻는다. 그러므로 $x^i\in E_1^e$ $i=1,\cdots,r$이다.□

E_1과 E_2의 부분집합 X와 Y에 대하여

$$K(X)=\{y\in E_2 : (x,y)\in E\ ;\ \forall x\in X\}$$
$$L(Y)=\{x\in E_1 : (x,y)\in E\ ;\ \forall y\in Y\}$$

라 定義하자. 그리고 k(X)와 l(Y)를

$$k(X)=\{y\in E_2^e\ ;(x,y)\in E,\ \forall x\in X\}$$

$$l(Y)=\{x\in E_1^e\ ;(x,y)\in E,\ \forall y\in Y\}$$

라 하자. 그러면 定理 4와 定理 5에 의하여

$$K(X)=\langle k(X)\rangle \qquad\cdots\cdots(5)$$

이고 k(X)는 K(X)의 모든 頂點의 集合이다. 따라서 모든 平衡點의 集合 E는 아래와 같이

$\langle X\rangle\times\langle k(X)\rangle$; $\phi\neq X\subseteqq E_1^e$의 合集合(union)으로 표현될 수 있다.

定理 6. $E=\cup\{\langle X\rangle\times\langle k(X)\rangle : \phi\neq X\subseteqq E_1^e\}$

$$E = \cup \{ \langle l(Y) \rangle \times \langle Y \rangle ; \phi \neq Y \subseteqq E_2^e \} \quad \cdots\cdots (5)$$

證明. 첫번째 式만을 증명하자.

$\phi \neq X \subseteqq E_1^e$ 이고 $K(X) = \phi$라 하자. $X \subseteqq L(K(X))$이고 $\langle X \rangle \subseteqq L(K(X))$이므로 $\langle X \rangle \times \langle K(X) \rangle \subseteqq E$이다. 또한 $(x, y) \in E$이면 定理 4와 5에 의하여 $x \in \langle x^1, \cdots, x^r \rangle$과 $y \in K(x^1, \cdots, x^r) = \langle k(x^1, \cdots, x^r) \rangle$을 만족하는 $x^i \in E_1^e$, $i = 1, \cdots, r$이 존재한다. □

Nash 可解(Nash solvable)에 대한 硏究는 Millham〔24〕, Isaacson과 Millham〔12〕, Jansen〔13〕, Winkels〔41〕등에 의하여 이루어졌다.

(x^1, y^1)과 (x^2, y^2)가 平衡點일 때 (x^1, y^2)와 (x^2, y^1)도 平衡點이면 可換(interchangeable)이라 한다. Nash의미의 可解(solvable in the sense of Nash)는 모든 平衡點들이 可換일 때이다. 可換이면서 전략을 교환했을 때도 각 참가자의 利得이 같으면 同等(equivalent)이라 한다. 또한 可換인 平衡點들이 존재하는 雙行列게임을 Nash 可解 雙行列게임이라 하며, 可換인 平衡點들의 집합을 Nash 部分集合(Nash subset)이라 한다.

行列게임에서는 모든 平衡點이 Nash 可解이고 同等하다. 그러면 二人行常數合게임에서의 Nash 可解는 어떻게 되는가?

定理 7. (x^1, y^1)과 (x^2, y^2)가 二人行常數合게임 (A, B)의 平衡點이면, (x^1, y^1)과 (x^2, y^2)는 可換이며 참가자 1은 同等(equivalent)하며 참가자 2는 $\sum_{i=1}^{m} x_i^1 k_i = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 k_i$이면 同等이다.

이는 쉽게 證明된다〔12〕.

行列게임에서는 모든 平衡點이 可換인데 雙行列게임에서는 어떠한 條件下에서 可換인가. 아래 定理 8을 보자.

定理 8. 雙行列게임 (A, B)에서 $(x^1, y^1, \alpha_1, \beta_1)$과 $(x^2, y^2, \alpha_2, \beta_2)$이 두 平衡點이고 각 利得일 때 두 平衡點이 可換일 必要充分條件은 $M_1(x^1) \subset M_2(y^2)$, $M_1(x^2) \subset M_2(y^1)$, $N_1(y^1) \subset N_2(x^2)$, $N_1(y^2) \subset N_2(x^1)$이다.

證明. (x^1, y^2)와 (x^2, y^1)이 平衡點이라 하자. $x_i^1 > 0$은 $A_i y^{2\prime} = \max_K A_K y^{2\prime} = \alpha_2$ 또는 $M_1(x^1) \subset M_2(y^2)$을 의미한다. 비슷하게 $x_i^2 > 0$은 $A_i y^{1\prime} = \max_K A_K y^{1\prime} = \alpha_1$ 또는 $M_1(x^2) \subset M_2(y^1)$을 의미한다. $y_j^1 > 0$과 $y_j^2 > 0$인 경우도 같은 方法으로 증명된다.

또한 주어진 조건이 만족된다 하자. 그러면 $M_1(x^1) \subset M_2(y^2)$은 $A_{i\cdot} y^{2\prime} < \alpha_2$이면 $x_i^1 = 0$을 의미하며 $N_1(y^2) \subset N_1(x^1)$은 $x_i^1 B_{\cdot j} < \beta_1$이면 $y_j^2 = 0$을 의미한다. 따라서 (x^1, y^2)은 2절의 平衡點의 性質에 의해 平衡點이고 利得은 각 참가자에게 α_2, β_1이다. (x^2, y^1)에 대하여도 같은 方法으로 증명된다. □

다음은 Nash 可解들의 集合과 모든 平衡點들의 集合과는 어떤 관계에 있는가? Nash 可解의 部分集合을 Nash 部分集合이라 한다. W를 Nash 部分集合이라 할 때 Z인 어떤 Nash 部分集合이 $W \subsetneqq Z \subseteqq E$일 때 W를 最大 Nash 部分集合(maximal Nash subset)이라 한다. Jansen〔13〕은 모든 平衡點의 集合은 有限個의 最大 Nash 部分集合의 合集合임을 보여 주었다. 또한 Winkels〔41〕은 最大 Nash 部分集合이란 用語대신 Nash 要素(Nash component)라 하였다. 最大 Nash 部分集合을 구하기 위하여 Winkels〔41〕이 제시한 方法을 利用하자.

定義 2. $X_0 \subseteqq E_1^e$, $Y_0 \subseteqq E_2^e$라 할 때 만약 $k(X_0) = Y_0$이고 $l(Y_0) = X_0$이면 (X_0, Y_0)를 Nash 雙(pair)이라 하고 $\langle X_0 \rangle \times \langle Y_0 \rangle$를 Nash 要素라 한다.

Winkels의 定義 2에 의한 $\langle X \rangle \times \langle Y \rangle$가 Nash 要素이면 $\langle X \rangle \times \langle Y \rangle \subseteqq \langle X^1 \rangle \times \langle Y^1 \rangle \subseteqq E$인 $\langle X^1 \rangle \times \langle Y^1 \rangle$는 존재하지 않는다〔41〕. 따라서 Nash 要素는 Jansen

[13]이 定義한 最大 Nash 部分集合이다. $X \subseteq E_1^e$가 주어졌다면 이 戰略集合의 Nash要素는 어떻게 구할 수 있는가? $X \subseteq E_1^e$이고 $K(X) \neq 0$이면 $Y_0 = k(X)$와 $X_0 = l(Y_0)$에 의하여 구한다. 즉 (X_0, Y_0)는 Nash 雙이며 $\langle X_0 \rangle \times \langle Y_0 \rangle$는 X에 의하여 유도는 Nash 要素이며 $\langle X \rangle \times \langle k(X) \rangle \subseteq \langle X_0 \rangle \times \langle Y_0 \rangle$이다. 같은 方法으로 주어진 $Y \subseteq E_2^e$, $L(Y) \neq 0$도 Nash 雙 $(l(Y), k[l(Y)])$을 유도할 수 있다.

이를 좀더 구체적으로 설명하여 보자. x^1, $x^2 \subseteq E_1^e$이고 $k(x^1) = k(x^2)$이면 可換이며 $x^1 \sim x^2$라 표현하자. $y^1, y^2 \subseteq E_2^e$ 도 $l(y^1) = l(y^2)$이면 可換이며 $y^1 \sim y^2$로 표현하자. 그리고 可換인 頂點集合을 $E_1^{\sim} = \{x^1, \cdots, x^r\}$, $E_2^{\sim} = \{y^1, \cdots, y^s\}$로 표현하고 $X^i = \{x \in E_1^e : x \sim x^i\}$, $i = 1, \cdots, r$이고 $Y^j = \{y \in E_2^e ; y \sim y^j\}$, $j = 1, \cdots, s$로 나타내자. 또한 $X \subseteq E_1^{\sim}$, $Y \subseteq E_2^{\sim}$에 대해

$$\bar{k}(X) = \{y \in E_2^{\sim} ; (x, y) \in E \quad \forall x \in X\}$$

$$\bar{l}(Y) = \{x \in E_1^{\sim} ; (x, y) \in E \quad \forall y \in Y\}$$

로 나타내자. 그러면 Nash 部分集合 $X \subseteq E_1^{\sim}$에 의하여 유도되는 Nash 雙 (X_0, Y_0)는

$$Y_0 = \cup \{Y^j ; y^j \in \bar{k}(X)\}$$

$$X_0 = \cup \{X^i ; x^i \in \bar{l}(\bar{k}(X))\}$$

이다. $E_2^{\sim}$의 部分集合 Y에 대해서도 비슷한 方法으로 Nash 雙을 구한다.

이와같은 방법으로 구한 Nash 雙들과 $\langle X \rangle \times \langle k(X) \rangle \subseteq \langle X_0 \rangle \times \langle Y_0 \rangle$을 利用하여 定理 6을 달리 표현하면 모든 平衡點들의 集合 E는 最大 Nash 部分集合의 合集合으로 표현할 수 있다. 즉

$$E = \cup \{\langle X_0 \rangle \times \langle Y_0 \rangle ; (X_0, Y_0)\text{는 Nash 雙}\} \cdots\cdots (6)$$

이다. 行列게임에서는 모든 最適戰略이 可換이므로 하나의 最大 Nash 部分集合을 갖는다. 3人이상의 게임에서는 모든 平衡點이 有限個의 最大 Nash 部分集合의 合集合으로 표현되지 않는다.

最大 Nash 部分集合의 次元(dimension)에 대해서는 Millham[24]의 定理 1과 Jansen[13]의 定理 5에서 다루었다.

주어진 平衡點에 의하여 雙行列게임을 構成하는 문제에 대해 Millham[23]에 의하여 제시되었다. Millham[23]의 定理 1에서 주어진 平衡點과 각 利得을 만족하는 雙行列게임이 존재함을 증명하였다. 또한 그는 주어진 平衡點이 유일한 平衡點이 되는 雙行列게임의 構成에 관해, 모든 전략이 active한 경우(completely mixed strategy)에 대하여 다루었다. Kreps[14]는 이를 일반화하여 주어진 平衡點이 雙行列게임에서 유일한 平衡點이기 위한 필요충분조건이 각 참가자의 active한 戰略의 數가 같을 때임을 밝혔다. 또한 Heuer[10]는 주어진 平衡點이 雙行列게임에 平衡點으로서의 여러 條件을 구분하여 이의 조건에 맞는 雙行列게임의 構成을 다루었다. 그는 주어진 平衡點이 단지 平衡點인 雙行列게임, 주어진 平衡點과 똑같이 active한 平衡點을 갖지 않는 雙行列게임, 주어진 平衡點의 active한 戰略을 포함한 다른 平衡點이 존재하지 않는 雙行列게임, 주어진 平衡點이 유일한 平衡點인 雙行列게임의 構成을 다루었다.

4. 平衡點을 찾는 解法

雙行列게임의 平衡點을 찾는 연구가 1960年代부터 활발히 이루어져 오고 있다.

Mills[25]은 平衡點의 조건을 만족하는 二次計劃問題로 변환시켰다. 이것이 곧 定理 1의 2)와 3)이다. Lemke와 Howson[17]에 의하여 非退化(nondegeneracy)의 경우 定理 1의 2)와 3)의 式을

$$\begin{pmatrix} O & B' \\ A & O' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_m' \\ e_n' \end{pmatrix}$$

$(y, x) \geqq 0$, $(w, u) \geqq 0$, $(y, x)(w, u)' = 0$

w, u 는 Slack 변수

와 같이 Linear complementarity problem (LCP)의 形態로 바꾸었다. Lemke〔16〕은 非退化의 경우에 이를 푸는 LCP의 解法을 제시하였다. LCP의 技法을 이용하여 退化의 경우까지 고려된, 모든 頂點平衡點을 구하는 硏究〔1, 3, 18, 35, 37〕가 최근까지 계속되었다. 그러나 현재까지 이 技法을 이용하여 모든 頂點平衡點이 구하여 지는지는 확실치 않다.

한편 Mangasarian〔20〕은 Balinski〔2〕의 技法을 사용하여 모든 꼭지점(vertex)을 구하여 이들중에서 平衡點의 性質〔定理 1의 3)〕을 만족시키는 모든 頂點들을 찾음으로써 모든 頂點平衡點을 구하였다. 따라서 Mangasarian〔20〕이 제시한 方法에 의하여 모든 頂點平衡點을 구하며 이로부터 最大Nash 部分集合을 구하여 모든 平衡點의 集合 E를 찾는 方法이 Winkels〔41〕에 의하여 제시되었다.

그 절차는 아래와 같다.

단계 1. E_1^e 과 E_2^e 를 구한다.

P(A)와 P(B)의 모든 頂點을 Balinski〔2〕技法을 이용하여 구한다. 구한 頂點들이 定理 1. 4)를 만족하는 頂點平衡點을 아래와 같은 方法으로 찾는다.

그림 1에서 (x, β)에는 P(B)의 모든 頂點을 기록하고, w에는 $xB - \beta e_n$의 값을 기록한다. 그림 1에서 (y, α)에는 P(A)의 모든 頂點을 기록하고 z에는 $Ay' - \alpha e_m'$의 값을 기록한다. $w \cdot y = 0$이고 $x \cdot z = 0$이면 $k_{xy} = 1$, 그렇지 않으면 $k_{xy} = 0$을 적어 넣는다. $k_{xy} = 1$이면 $(x, y) \in E$이다.

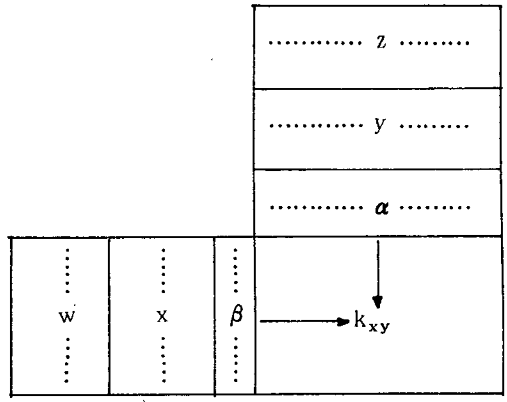

그림 1.

단계 2. 모든 Nash 要素를 구한다.

모든 Nash 要素(最大 Nash 部分集合)의 合集合이 E이다. 단계 2는 Nash 要素를 전부 구하여 E를 구하고자 한다. x^1과 x^2의 k_{xy}의 行이 같다면 可換이다. 그림 1에서 $k_{xy} = 1$을 갖는 頂點平衡點을 그림 2와 같이 나타낸다. 여기서 $\widetilde{E_1} = \{x^1, \cdots, x^r\}$ $\widetilde{E_2} = \{y^1, \cdots, y^s\}$로 나타내고, $(x^i, y^j) \in E$이면 $\bar{k}_{ij} = 1$이고, 平衡點이 아니면 $\bar{k}_{ij} = 0$이다.

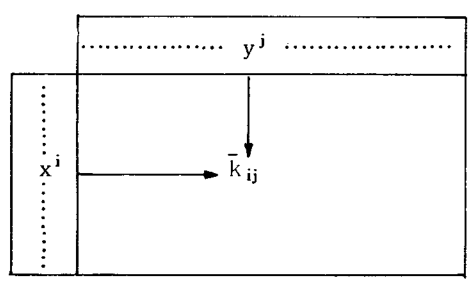

그림 2.

앞에서 定義한 $\bar{k}(X)$와 $\bar{l}(Y)$는

$$\bar{k}(X) = \{ y^j \; ; \; \bar{k}_{ij} = 1 \quad \forall x^i \in X \} \quad \forall X \subseteqq \widetilde{E_1}$$

$$\bar{l}(Y) = \{ x^i \; ; \; \bar{k}_{ij} = 1 \quad \forall y^j \in Y \} \quad \forall Y \subseteqq \widetilde{E_2}$$

로 표현된다. Nash 要素는 그림 2로 부터

아래와 같은 절차를 밟아 구할 수 있다.

먼저 $\tilde{E_1}$과 $\tilde{E_2}$중 요소의 數가 적은 것을 擇한다. 이것이 $\tilde{E_1}$이라 하자.

i) $\tilde{E_1}$의 모든 部分集合을 D라 하자.

ii) D에서 "$\sqsubseteq$"이 되는 가장 작은 集合 X를 취한다.

iii) X로 부터 Nash雙을 유도한다.(이것이 X로 부터 유도된 Nash要素이다)

iv) D에서 $X^1 \sqsubseteq X_0$인 모든 部分集合 X^1을 제거한다.

v) $D \neq 0$이면 ii)로 가서 반복, 그렇지 않으면 모든 Nash要素를 다 구한 것이다.

5. 雙行列게임에서 解의 槪念

앞에서 雙行列게임의 平衡點에 관하여 다루었다. 行列게임에서는 平衡點이 그대로 最適解가 되었다. 그러면 雙行列게임에서도 그러한가?

범법자의 고민은 〔(0, 1), (0, 1)〕만이 平衡點이다. 利得에서 보면 戰略 〔(1, 0), (1, 0)〕이 두 참가자에게 戰略 〔(0, 1), (0, 1)〕보다 더 좋다. 그러나 〔(1, 0), (1, 0)〕은 平衡點이 아니다. 行列게임에서는 모든 전략들이 可換이므로 戰略의 性質에 따른 側面에서 雙行列게임의 解를 정의하여 보고자 했다. 즉 모든 平衡點이 可換이 성립하면 Nash 의미에서의 可解라고 한다. 性의 對決은 〔(1, 0), (1,0)〕과 〔(0,1),(0, 1)〕이 平衡點이다. 그러나 〔(0, 1), (1, 0)〕은 平衡點이 아니다. 즉 性의 對決은 Nash 의미에서의 可解가 아니다. 범법자의 고민은 可換이나 利得의 관점에서 볼 때 平衡點이 解로써 바람직하지 못하다.

범법자의 고민과 性의 對決에서 보다 시피 平衡點은 雙行列게임의 解의 要素로써 無意味한가? 이에 관해 Luce와 Raiffa〔19〕는 雙行列게임에서 平衡點이 解로써 의미가 무시된다고 하여도, 그 槪念은 行動에 대한 설명에 있어서 적절하다고 말하고 있다. 또한 Vorob'ev〔40〕은 각 참가자의 平衡點에 따른 行動은 참가자 자신에 대한 利得의 最大化를 추구하기 보다는 適의 利得을 最小化할려는 것이다라고 하였다.

Luce와 Raiffa〔19〕는 雙行列게임에서 가장 타당성있는 解의 條件을 제시하였다.

(x^1, y^1), (x^2, y^2)의 두 戰略에 대하여 각 利得이 $\phi_1(x^1, y^1) > \phi_1(x^2, y^2)$ 이고 $\phi_2(x^1, y^1) > \phi_2(x^2, y^2)$이면 (x^1, y^1)은 (x^2, y^2)를 jointly dominate한다고 한다. 전략 (x, y)은 다른 전략에 의하여 jointly dominate당하지 않으면 전략 (x, y)를 jointly admissible이라 한다.

强한 의미에 있어서 解(solution in the strict sense)는 아래 두 條件을 만족시키는 것이다.

i) jointly admissible 戰略雙중에서 平衡點이 존재한다.

ii) 모든 jointly admissible 平衡點이 可換이며 同等하다.

例로써

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (2, 2) \end{pmatrix}$$

을 보자. 平衡點은 〔(1,0), (1,0)〕과 〔(0, 1), (0, 1)〕이다. 〔(0, 1), (0, 1)〕이 〔(1, 0), (1, 0)〕을 jointly admissible 하나 可換이 아니다. 또한 범법자의 고민은 jointly admissible한 平衡點을 갖지 못하나 可換이다. 例에서 보다 시피 强한 의미에서의 解는 解로써는 바람직하나 解의 存在與否가 문제이다. 즉 항상 解가 존재하지 않는다.

解가 존재하면서 利得을 고려한 좀더 바람직한 解를 얻으려는 노력이 최근 계속되고 있다.

Selten〔34〕은 完全平衡點을 도입하였다. 完全平衡點은 근본 着想은 주어진 게임에서 어떤 전략도 그것을 選擇할 가능성이 있다는 점이다. 즉 어떤 전략이 다른 전략에 완전

히 dominate 될지라도 참가자의 合理性이 破壞되어 그 전략을 選擇할 確率이 존재한다는 것이다. 이리하여 가장 좋은 反應에 약간의 確率을 더 줌으로써 보다 나은 전략을 擇할 수 있음을 보여주었다.

Myerson[26]은 proper 平衡點으로 Selten의 完全平衡點을 개선코저 했다. 그는 完全平衡點의 概念을 그대로 도입하면서 모든 참가자들이 그의 나쁜 反應에 보다는 좋은 反應에 좀 더 큰 確率을 준다고 본 것이다. 그는 좋은 反應이든, 가장 좋은 反應이든 상관없이 더 좋은 反應에 더 큰 確率가 중치를 준다. 그는 例로써

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (-9,-9) \\ (0,0) & (0,0) & (-7,-7) \\ (-9,9) & (-7,-7) & (-7,-7) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

을 들었다. 頂點平衡點은 (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3)이다. 그리고 完全平衡點은 (α_1, β_1), (α_2, β_2)이고 proper 平衡點은 (α_1, β_1)임을 보여주고 있다.

이 외에도 Rubinstein[32]은 强한 完全平衡點(strong perfect equilibrium)을 정의하여 解를 구하였다.

6. 結 論

雙行列게임의 平衡點의 性質에 관하여 알아 보았다. 最大 Nash 部分集合을 구하는 方法과 모든 平衡點의 集合은 有限個의 最大 Nash 部分集合의 合集合으로 됨을 보았으며 이를 구하는 技法 또한 다루었다. 그리고 雙行列게임의 解의 槪念에 대해서도 考察했다.

平衡點을 解로서 擇하기에 부적당한 경우가 있다. 또한 平衡點이 둘 이상 존재하면서 利得이 다른 경우가 흔히 있다. 따라서 雙行列게임의 바람직한 解를 찾는 硏究가 앞으로 요청된다.

參 考 文 獻

1. Aggarwal, V., "On the Generation of All Equilibrium Points for Bimatrix Games Through the Lemke-Howson-Algorithm", Mathematical Programming, 4, 233-234, 1973.
2. Balinski, M.L., "An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets", SIAM Journal on Applied Mathematics, 9, 72-88, 1961.
3. Bastian, M., "Another Note on Bimatrix Games", Mathematical Programming, 11, 299-300, 1976.
4. Bohnenblust, H.F., S. Karlin, and L.S. Shapley, "Solutions of Discrete, Two-Person Games", Contributions to the Theory of Games, Annals of Mathematics, Studies 24, Princeton University Press, 1950.
5. Coenen, D., "Quasi-Nullsummenspiele und dominierte Gleichgewichtspunkte in Bimatrix-Spielen, Westdentscher Verlag, Koln, 1967.
6. Gale, D. and S. Sherman, "Solutions of Finite Two-Person Games", Contributions to the Theory of Games, Annals of Mathematics, Studies 24, Princeton University Press, 1950.
7. Goldman, A.K., "Resolution and Separation Theorems for Polyhedral Convex Sets", 41-71, 1956. In: Kuhn, H.W.; and A.W. Tucker; (Eds.) "Linear Inequalities and Related Systems", Princeton University Press, New Jersey, 1956.
8. Griesmer, J.H., A.J. Hoffman, and A. Robinson, "On Symmetric Bimatrix Games", IBM Research Rept., June 1963.
9. Heuer, G.A., "On Completely Mixed Strategies in Bimatrix Games", The Journal

of the London Mathematical Society, 2, 17-20, 1975.
10. Heuer, G.A., "Uniqueness of Equilibrium Points in Bimatrix Games", International Journal of Game Theory, 8, 13-25, 1979.
11. Heuer, G.A., and C.B. Millham, "On Nash Subsets and Mobility Chains in Bimatrix Games", Naval Research Logistics Quarterly, 23, 311-319, 1976.
12. Isaacson K. and C.B. Millham, "On a Class of Nash-Solvable Bimatrix Games and Some Related Nash Subsets", NRLQ, 28, 1980.
13. Jansen, M.J.H., "Maximal Nash Subsets for Bimatrix Games", Naval Research Logistics Quarterly, 28(1), 147-152, 1981.
14. Kreps, V.L., "Bimatrix Games with Unique Equilibrium Points", Int. J. of Game Theory, 3(2), 115-118, 1974.
15. Kuhn, H.W., "An Algorithm for Equilibrium Points in Bimatrix Games", Proceedings of the National Academy of Sciences, 47, 1656-1662, 1961.
16. Lemke, C.E., "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", Management Science, 11(7), 1965.
17. Lemke, C.E. and J.T. Howson, Jr., "Equilibrium Points of Bimatrix Games", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 12, 413-423, 1964.
18. Lemke, C.E.; and S.J. Grotzinger, "On Generalizing Shapley's Index Theory to Labelled Pseudomanifolds", Mathematical Programming, 10(2), 245-262, 1976.
19. Luce, R.D., and H. Raiffa, Games and Decisions, John Wiley and Sons, New York, 1957.
20. Mangasarian, O.L., "Equilibrium Points of Bimatrix Games", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 12(4), 778-780, 1964.
21. Mangasarian, O.L. and H. Stone, "Two-Person Nonzero-Sum Games and Quadratic Programming", J. Math. Analysis, 9, 348-355, 1964.
22. Millham, C.B., "On the Structure of Equilibrium Points in Bimatrix Games", SIAM Review, 10(4), 447-449, 1968.
23. Millham, C.B., "Constructing Bimatrix Games with Special Properties", Naval Research Logistics Quarterly, 19(4), 709-714, 1972.
24. Millham, C.B., "On Nash Subsets of Bimatrix Games", Naval Research Logistics Quarterly, 21(2), 307-317, 1974.
25. Mills, H., "Equilibrium Points in Finite Games", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 8(2), 397-402, 1960.
26. Myerson, R.B., "Refinements of the Nash Equilibrium Concepts", International Journal of Game Theory, 8, 73-88, 1979.
27. Nash, J.F. Jr., "Two-Person Cooperative Games", Econometrics, 21, 128-140, 1953.
28. Owen, G., "Optimal Threat Strategies in Bimatrix Games", International Journal of Game Theory, 1, 3-9, 1971.
29. Parthasarathy, T.; and T.E.S. Raghavan, "Some Topics in Two-Person Games", Elsevier, New York, 1971.
30. Pugh, G.E. and J.P. Mayberry, "Theory of Measure of Effectiveness for General-Purpose Military Forces, Part I: A Zero-Sum Payoff Appropriate for Evaluating Combat Strategies", Operations Research, 21, 867-885, 1973.
31. Raghavan, T.E.S., "Completely Mixed Strategies in Bimatrix Games", The Journal of the London Mathematical Society, 2(2), 709-712, 1970.
32. Rubinstein, A., "Strong Perfect Equilibrium in Supergames", International Journal

of Game Theory, 9, 1-12, 1980.
33. Schonfeld, P., "Some Duality Theorems for the Non-Linear Vector Maximum Problem", Unternehemsforschung Band 14, Heft 1, 1970.
34. Selten, R., "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", International Journal of Game Theory, 4, 25-55, 1975.
35. Shapley, L.S., "A Note on the Lemke-Howson Algorithm", Mathematical Programming Study 1, 175-189, 1974.
36. Todd, M.J., "Comments on A Note by Addendum", Mathematical Programming, 10, 130-133, 1976.
37. Todd, M.J., "Bimatrix-Games-an Addendum", Mathematical Programming, 14, 112-115, 1978.
38. Von Neumann, J. and O. Morganstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 3rd Ed., 1953.
39. Vorob'ev, N.N., "Equilibrium Points in Bimatrix Games", Theory of Probability and Its Applications, 3, 297-309, 1958.
40. Vorob'ev, N.N., Game Theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
41. Winkels, H.M., "An Algorithm to Determine All Equilibrium Points of a Bimatrix Game", Game Theory and Related Topics, North-Holland Publishing Company, 137-148, 1979.
42. 박순달, 게임理論, 대영사, 125-146, 1982.