

## 일반적인 IMA 과정에 대한 指數平滑 최적성의 擴張 (An Extension of the Optimality of Exponential Smoothing to Integrated Moving Average Process)

박 해 철\*  
 박 성 주\*\*

### Abstract

This paper is concerned with the optimality of exponential smoothing applied to the general IMA process with different moving average and differencing orders.

Numerical experiments were performed for IMA(m,n) process with various combinations of m and n, and the corresponding forecast errors were compared.

Results show that the higher differencing order is more critical to the optimality of exponential smoothing, i.e., the IMA process with the higher moving average order, forecasted by exponential smoothing, has comparatively smaller forecast error. If the difference between the differencing order and the moving average order becomes larger, the accuracy of forecast by exponential smoothing declines gradually.

### 1. 서 론

지수 평활법 (Exponential Smoothing)은 계산의 간편성과 적응성 (Adaptiveness)으로 인해 종류가 많은 자료에 대한 예측, 예를 들면, 다품종 제품 (부품, 완제품)의 재고 관리 및 수요 예측 등에 널리 사용되어 왔다. [ 2, 3 ] 그러나 보다 정확을 요하는 예측을 위해서는 지수 평활법에 적합한 시계열의 제약 조건들이 존재하며 이러한 조건들을 만족시킬때 최적의 예측이 가능해진다. [ 6, 8 ]

일반적으로 정확한 예측을 위해서는 최근에

개발된 Box-Jenkins 분석기법을 쓸 수 있다. 이 Box-Jenkin 기법은 변화가 심한 단기 예측의 경우에 가장 정확한 예측이 가능하나 적응성의 결여와 이로 인한 비용이 많이 드는 큰 단점이 있다.

즉, 지수 평활법과 Box-Jenkins 시계열 분석법은 편이성과 정확성의 각각 다른 두 측면을 가지고 있다고 하겠다.

본 논문에서는 지수 평활법과 Box-Jenkins ARIMA(Autoregressive Integrated Moving Average) 과정의 특수한 형태인 IMA (Integrated Moving Average) 모형과를 비

\* 國防管理研究所

\*\* 韓國科學 技術院

교하여 이미 밝혀져 있는 제약 조건이 일부 완화되었을 경우 지수 평활법의 최적성이 어떻게 변화 하는가를 보이고자 하였다.

2. 지수 평활법의 기본 정리와 확장

본 연구에서는 주어진 시계열이 시간의 (n-1) 차 다항식으로 표시 가능한 경우를 대상으로 한다. 즉,

$$X_t = \xi_t + \epsilon_t$$

$$\xi_t = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2} t^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} \dots\dots\dots (2.1)$$

여기에서

- $X_t$  : 시계열의 관찰치
- $\xi_t$  : 시계열의 평균
- $\epsilon_t$  :  $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ 의 분포를 하는 오차이다.

이때 (t-j) 시점의 관찰치의 기대치는 다음과 같이 표시된다.

$$E[X(t-j)] = \sum_{k=0}^{n-1} (-j)^k \cdot A_t^{(k)} / K! \dots\dots\dots (2.2)$$

여기에서

$A_t^{(k)}$  : 가정된 다항식에서 추정되어야 할 k 차항의 계수를 말한다.

위의 시계열에 대해서 다음과 같이 평활 자료치 (Smoothed data value) 를 정의할 수 있다.

$$S_t^{(1)} = (1 - \beta) \cdot X(t) + \beta \cdot S_{t-1}^{(1)}$$

$$= \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j \cdot X(t-j) + (1-\alpha)^t \cdot S_0 \dots\dots\dots (2.3)$$

$$S_t^{(k)} = S \{ S_t^{(k-1)} \}$$

$$= (1 - \beta) \cdot S_t^{(k-1)} + \beta \cdot S_{t-1}^{(k)}$$

$$= (1 - \beta)^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \cdot \binom{k+j-1}{k-1} \cdot X(t-j) \dots\dots\dots (2.4)$$

(2 ≤ k ≤ n)

여기에서

$\beta = 1 - \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\alpha$  : 평활상수,  
 $X_0$  : 초기관찰치,  $S_t^{(k)}$  : k 차의 평활자료치를 말한다.

위의 식으로부터 평활 자료치는 과거의 관찰치에 대해서, 시점이 현재로부터 과거로 거슬러 올라감에 따라 지수적으로 감소하는 가중치가 주어지는 일종의 가중 이동 평균임을 알 수 있다.

Brown 과 Meyer[4]는 (n-1) 차다항식으로 표시 되는 시계열에 대해서 지수 평활법을 사용하여 예측을 할 경우 식 (2.1)의 n개의 계수를 추정하기 위해서 다음의 정리를 제시하였다.

[ 정리 1 ] 지수 평활법의 기본 정리 (Fundamental Theorem of Exponential Smoothing)

주어진 시계열의 (t-j) 시점의 관찰치의 기대치가

$$E[X(t-j)] = \sum_{k=0}^{N-1} (-j)^k \cdot A_t^{(k)} / k!$$

로 주어지면, 그때의 계수  $A_t^{(k)}$ 는 관찰치 X에 적용된 N차의 평활 자료치의 선형 결합으로 추정 되어질 수 있다.

즉, 식 ( 2.2 ) 와 식 ( 2.4 ) 에 의해서

$$E [ S_t^{(p)} ] = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} (1-\beta)^p \cdot (-j)^k \cdot \beta^j \cdot \binom{p+j-1}{p-1} \cdot A_t^{(k)} / k!$$

로 표시될 수 있으며, 따라서 다음의 식이 성립한다.

$$E [ \mathbf{S}_t ] = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}_t \dots\dots\dots(2.5)$$

여기에서

$\mathbf{M}$ : 지수 평활 계수 행렬 (Exponential Smoothing Coefficient Matrix) 이며 이 행렬의 각 요소는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{M}_{p,k+1} = (1-\beta)^p \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-j)^k \cdot \beta^j \cdot \binom{p+j-1}{p-1} / k!$$

$$(1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq k \leq n-1)$$

또한

$$\mathbf{A}_t = [ A_t^{(0)}, A_t^{(1)}, \dots, A_t^{(n-1)} ]'$$

$$\mathbf{S}_t = [ S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, \dots, S_t^{(n)} ]'$$
 이다.

그러므로 식 ( 2.5 ) 로 부터 지수 평활계수의 행렬을 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}_t \dots\dots\dots(2.6)$$

식 ( 2.2 ) 에 의해서

$$E [ X(t+\tau) ] = \sum_{k=0}^{n-1} \tau^k \cdot A_t^{(k)} / k! = \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{A}_t \dots\dots\dots(2.7)$$

여기에서

$$\boldsymbol{\tau}' = [ 1, \tau, \dots, \tau^{n-1} / (n-1)! ]$$

이다.

따라서 식 ( 2.6 ) 으로부터 ( t + \tau )

시점의 예측치는 n개의 평활 자료치들의 선형 결합으로 표시 되어질 수 있다.

즉 \tau 시점 후의 예측치는 다음과 같다.

$$\hat{X}_t(\tau) = \hat{X}(t+\tau) = \boldsymbol{\tau}' \cdot \hat{\mathbf{A}}_t = \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S}_t \dots\dots\dots(2.8)$$

위의 지수 평활법의 기본 정리는 관찰치의 수가 무한할 경우 성립할 수 있으나 Cogger [5]는 관찰치의 수가 유한할 경우에도 성립할 수 있는 기본정리의 확장을 유도하였다.

즉, 평활 자료치를 다시 정의하고 지수 평활 계수의 행렬을 수정함으로써 관찰치가 N개로 제한된 경우에도 가정된 다항식의 계수를 추정할 수 있음을 밝혔다.

[ 정리 2 ]

관찰치의 수가 N이고 이때의 지수 평활 계수의 행렬을  $\mathbf{M}(N)$  이라고 하면  $\mathbf{M}(N)$ 의 요소들은 다음의 순환 관계를 (recursive relationship) 만족한다.

$$\mathbf{M}_{p,k+1}(N) = 1 - \beta^N, \quad p=1, k=0$$

$$= \mathbf{M}_{p-1,1}(N) - \alpha^{p-1} \cdot \beta^N \binom{p-2+N}{N-1}, \quad p \geq 2, k=0$$

$$= (P/k) [ \mathbf{M}_{p,k}(N) - \mathbf{M}_{p+1,k}(N) / \alpha ] \quad p \geq 1, k \geq 1$$

$$\forall N \geq 1$$

이때 평활 자료치는 다음과 같이 새로이 정의 된다.

$$S_N = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} [\beta c]^j \cdot b \cdot X(N-j)$$

$$+ [\beta c]^N \cdot S_0$$

$$t = 1, 2, \dots, N.$$

여기에서

$$b' = [1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}]$$

$$C_{ij} = \begin{cases} \alpha^{i-j} & i \geq j \\ 0 & \text{그외의 경우} \end{cases}$$

### 3. 1차 지수 평활법의 최적성

지수 평활법의 최적화는 그 예측 오차를 최소화 함으로써 달성될 수 있다. 1차 지수 평활법의 경우에 Muth[8]는 지수 평활법이 최소의 예측 오차를 낳을 수 있는 시계열의 조건을 유도하였다.

어떤 시계열이 다음과 같이 서로 독립적인 오차들의 선형 결합으로 표시된다고 하자. 즉

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} W_i \cdot \varepsilon_{t-i} \quad (3.1)$$

여기에서

$y_t$  : 관찰치

$\varepsilon_t$  :  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 의 분포를 하는 오차

$W_i$  : 가중치  $i \geq 1$

이 시계열에 대해 지수 평활법을 적용할 경우 그 예측 오차가 최소가 되려면 가중치  $W_i$ 는 다음과 같아야 한다.

$$W_i = \alpha$$

$$W_i = \alpha (1 - \alpha)^{i-1} + \alpha \sum_{j=1}^{i-1} (1 - \alpha)^{j-1} \cdot W_{i-j},$$

$$i = 2, 3, 4, \dots$$

따라서

$$W_i = \alpha \quad \forall i \geq 1 \text{이다.}$$

식 (3.1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \dots \dots \dots (3.2)$$

Muth가 유도한 식 (3.2)는 Box - Jenkins의 ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) 과정의 한 특수한 형태인 IMA (Integrated Moving Average) 과정임을 다음과 같이 보일 수 있다.

식 (3.1)로 부터 (t-1) 시점의 관찰치  $y_{t-1}$ 은

$$y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \alpha \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \dots \dots \dots (3.3)$$

식 (3.2)로 부터 식 (3.3)을 빼면 다음과 같은 형태가 된다.

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t - (1 - \alpha) \varepsilon_{t-1}$$

또는

$$\nabla y_t = (1 - \beta B) \varepsilon_t$$

여기에서

$\nabla$  : 후진 차이 연산 척도 (backward difference operator) 즉

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$$

$B$  : 후진 연산 척도 (backward operator) 즉

$$B^m \cdot y_t = y_{t-m} \quad (m \text{은 정수})$$

위의 식에서 보는 바와 같이 식 (3.4)는  $\theta_1 = \beta$ 인 IMA (1, 1) 과정의 한 특수한 경우이다.

### 4. 일반 차수의 지수 평활법의 최적성

Cogger[6]는 일반 차수의 지수 평활법이 예측 오차를 최소화시킬수 있는 시계열의 조건을 밝히기 위하여 다음의 정리를 제시하였다.

[ 정리 3 ]

n 차의 지수 평활법에 의한 예측이 최소의 예측 오차를 낳게 하는 시계열  $\{X(t), t \in T\}$  은 n 차의 후진 차이 계산의 결과 2 차의 안정성에 이르는 시계열이며 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$Y(t) = \nabla^n X(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (-\beta)^i \cdot \varepsilon(t-i) \quad \forall i \in n \dots\dots (4.1)$$

위의 정리에서 제시된 시계열은 IMA (n, n) 과정의 한 특수한 경우이다. 즉, 일반적인 IMA (n, n) 과정은

$$Y(t) = \nabla^n X(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i \cdot \varepsilon(t-i) \quad \forall i \in n$$

이므로 위에서 제시된 시계열은 IMA (n, n) 과정으로서 이동 평균항의 계수  $\theta_i$  가  $\theta_i = \binom{n}{i} \cdot (-\beta)^i$  를 만족하는 형태이다.

따라서 [ 정리 3 ]의 시계열은 일반 차수의 지수 평활법을 사용함으로써 Box-Jenkins 의 방법과 동일한 최소의 예측 오차를 낳을 수 있다.

또, 식 (3.4)에서 보는 바와 같이 Muth가 제시한 1 차 지수 평활법의 경우에 있어서의 최적성을 달성하기 위한 제약 조건은 결국 Cogger에 의해 유도된 제약 조건의 한 특수한 경우라고 볼 수 있다. 즉 n = 1인 경우에 식 (3.4)는 식 (4.1)과 일치하게 된다.

5. 최적성 조건의 완화

5.1 분석 방법

실제로 일반적인 IMA 과정이 식 (4.1)의 제약 조건을 만족하리라고 기대하기는 어렵다. 따라서, 지수 평활법이 최소의 예측 오차를 낳

는 시계열의 영역은 매우 한정되게 된다.

본 연구에서는 최적성의 조건중 이동평균의 계수의 제약 조건은 그대로 만족하면서, 차이 계산의 차수와 이동 평균의 차수가 서로 다른 경우의 시계열에 대해서 지수 평활법에 의한 예측을 행할 경우, 그 예측 오차가 이론적인 최소의 예측 오차와 어떻게 다른가를 고찰하기로 한다.

즉, 분석하고자 하는 시계열은 다음과 같다.

$$Y(t) = \nabla^m X(t) = (1 - \beta B)^n \cdot \varepsilon_t, \quad (m \neq n) \dots\dots\dots (5.1)$$

위의 시계열에 대한 예측 오차의 분석을 위해, 먼저 시계열의 순수 오차 (White noise) 로서  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 의 분포를 하는 확률 변수를 구하고 이 확률 변수를 사용하여 아래의 식에 해당하는 시계열을 발생시켰다.

- IMA(1.2);  $\nabla X_t = (1 - \beta B)^2 \cdot \varepsilon_t$  (5.2)
- IMA(1.3);  $\nabla X_t = (1 - \beta B)^3 \cdot \varepsilon_t$  (5.3)
- IMA(1.4);  $\nabla X_t = (1 - \beta B)^4 \cdot \varepsilon_t$  (5.4)
- IMA(2.1);  $\nabla^2 X_t = (1 - \beta B) \cdot \varepsilon_t$  (5.5)
- IMA(2.2);  $\nabla^2 X_t = (1 - \beta B)^2 \cdot \varepsilon_t$  (5.6)
- IMA(2.3);  $\nabla^2 X_t = (1 - \beta B)^3 \cdot \varepsilon_t$  (5.7)
- IMA(2.4);  $\nabla^2 X_t = (1 - \beta B)^4 \cdot \varepsilon_t$  (5.8)
- IMA(3.1);  $\nabla^3 X_t = (1 - \beta B) \cdot \varepsilon_t$  (5.9)
- IMA(3.2);  $\nabla^3 X_t = (1 - \beta B)^2 \cdot \varepsilon_t$  (5.10)
- IMA(3.4);  $\nabla^3 X_t = (1 - \beta B)^4 \cdot \varepsilon_t$  (5.11)

위의 식에서 보는 바와 같이 각 시계열은 차이 계산의 계수가 3인 경우까지를 고려하였는데 그 이유는 현실에서의 대부분 IMA과정의 차이 계산이 3이내에서 표시가 가능하기 때문이다. 또 평활 상수의 값도 0.10으로 고정하였는데 왜냐하면 일반적으로 0.10의 값이 광범위하게 사용되며 실제로 평활 상수의 값의 변화는 본 연구에서 기대되는 결과에 별 영향을 미치지 못하기 때문이다.

각 시계열에 대해서는 순수오차의 분산이 1부터 10까지의 경우를 고려하였으며, 각 경

우에 192개의 관찰치를 발생시켰고 한 기간 미래의 예측치와 관찰치를 비교함으로써 예측 오차를 구하였다.

예측치의 비교를 위해 지수 평활법에 의한 예측치와 이론적으로 최소의 예측 오차를 갖는 예측치의 두가지를 구하였고, bias 를 피하기 위하여 한 가지의 시계열에 관해 같은 시점에 대해서 각각 다른 관찰치를 사용하여 30회의 예측을 행하였다.

그리고 두가지의 예측치에 의한 예측오차를 비교하기 위해 아래의 척도 (Measure)를 정의하기로 한다.

$$Me = \frac{\sum_{i=1}^n SE_i}{\sum_{i=1}^n BE_i}$$

여기에서

$SE_i = i$  번째 예측에 있어서의 지수 평활법에 의한 예측 오차

$BE_i = i$  번째 예측에 있어서의 이론적인 최소의 예측 오차

$n$  : 예측의 시행 횟수 ( = 30 ) 이다.

이 척도의 개념은 지수 평활법에 의한 예측 오차가 이론적인 최소의 예측오차에 얼마나 근사한 예측 오차를 생성하는가 하는 것을 표시하는 것이다. 구체적으로  $Me = 1$  이면 지수 평활법에 의한 예측 오차가 이론적인 최소의 예측 오차와 일치함을 뜻하며,  $Me > 1$  이면 지수 평활법에 의한 예측 오차가 이론적인 최소의 예측 오차보다 크다는 것을 나타내고 그 차이가 클수록 우리가 정의한 척도의 값도 상대적으로 커지게 된다.

## 5.2. 분석의 결과

식 ( 5.2 ) 에서 ( 5.11 ) 까지의 시계열에 대해서 일반 차수의 지수 평활법에 의한 예측 오차와 이론적인 최소의 예측 오차를 앞에서 정의한 척도로서 비교한 결과가 표(1)에 정리되어 있다.

먼저  $m = n$  인  $IMA(1,1)$  ,  $IMA(2.2)$  ,

$IMA(3.3)$  의 경우를 보면 차이 계산의 차수와 이동 평균의 차수가 서로 일치하며 계수의 제약 조건이 만족 될 때에는  $Me = 1$  이므로 지수 평활법에 의한 예측 오차가 최소의 예측 오차임을 알 수 있다.

둘째로,  $m < n$  인 경우를 보자. 즉, 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 낮은 경우인데, 이때  $m$ 과  $n$ 의 차가 1인 때에는 모든 경우에 비해 가장 예측 오차가 작으며  $IMA(1,2)$  ,  $IMA(2,3)$  의 경우가 이에 해당한다. 또  $m$ 과  $n$ 의 차가 커질수록 예측 오차도 증가 함을 알 수 있다.

세째로,  $m > n$  인 경우는 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 높은 경우인데 이때에는  $m$ 과  $n$ 의 차가 1인때에도 그 예측 오차는 반대의 경우 보다 훨씬 크다. 더구나 두 차수의 차이가 증가하면 예측 오차는 반대의 경우보다 급격히 커짐을 볼 수 있다. 따라서 두 차수가 서로 다른 경우, 차이계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 낮은 경우가 그 반대의 경우보다 지수 평활법에 의해 보다 정확한 예측을 할 수 있음을 알 수 있다. 이상과 같은 비교가 도표(1)에 도해되어 있다.

네째로 도표(1)을 보면  $IMA(1,2)$  와  $IMA(2,3)$  의 경우 공통적으로 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 1만큼 낮은 경우인데 이때는 순수 오차의 분산이 변함에 따라 정의된 척도의 변화가 거의 일치하고 있다.  $IMA(3.4)$  의 경우도 마찬가지인데, 앞의 경우와 비교해 보면, 척도의 절대량에 있어서 약간 차이가 나며 그 변화의 양상은 매우 비슷하다. 또  $IMA(2.1)$  과  $IMA(3.2)$  의 경우도 그 척도의 변화의 양상이 거의 일치함을 볼 수 있다.

따라서  $m \neq n$  인 경우에 있어서의 예측 오차는 차이 계산의 차수와 이동 평균의 차수가 서로 어떻게 다른가에 크게 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

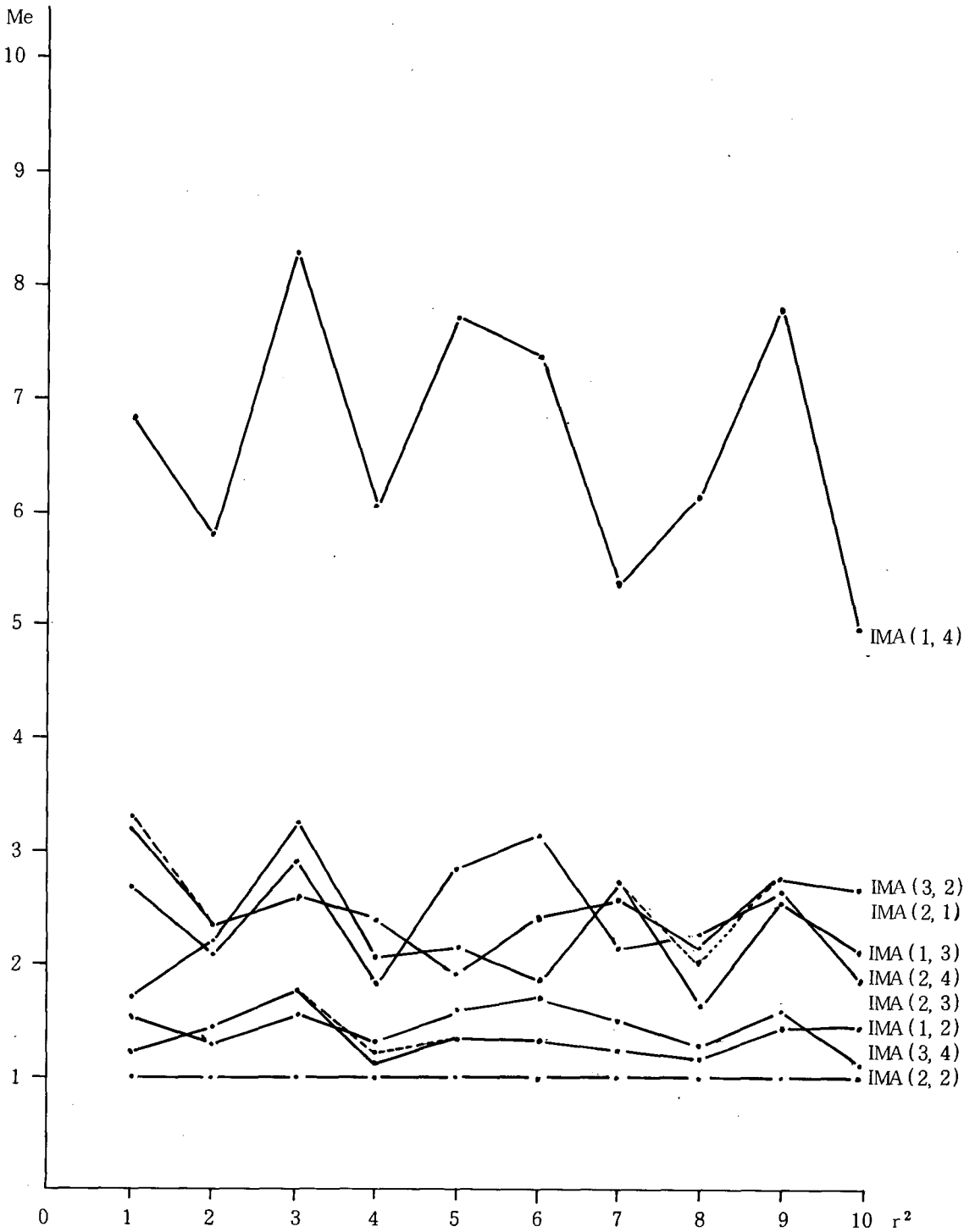


도표 1. 상대적 예측 오차의 변화

$\sigma_e^2$	IMA (1, 2)	IMA (1, 3)	IMA (1, 4)	IMA (2, 1)	IMA (2, 2)
1	1.20	1.75	6.78	3.16	1.00
2	1.38	2.18	5.71	2.23	1.00
3	1.85	3.13	8.35	2.53	1.00
4	1.14	2.06	5.99	2.36	1.00
5	1.33	2.14	7.66	1.93	1.00
6	1.43	1.96	7.45	2.40	1.00
7	1.29	2.63	5.47	2.57	1.00
8	1.10	1.65	6.15	2.01	1.00
9	1.39	2.49	7.86	2.64	1.00
10	1.43	2.14	5.04	2.55	1.00
$\sigma_e^2$	IMA (2, 3)	IMA (2, 4)	IMA (3, 1)	IMA (3, 2)	IMA (3, 4)
1	1.20	2.68	18.40	3.17	1.59
2	1.38	2.16	14.52	2.23	1.35
3	1.85	2.89	18.21	2.53	1.60
4	1.15	1.88	16.71	2.36	1.22
5	1.33	2.78	13.83	1.93	1.56
6	1.43	3.03	15.74	2.40	1.87
7	1.29	2.17	19.45	2.57	1.50
8	1.10	2.18	12.68	2.00	1.26
9	1.39	2.62	16.15	2.64	1.60
10	1.43	1.83	23.15	2.55	1.20

< 표 1 > 상대적 예측 오차의 변화

6. 결 론

본 논문에서는 일반 차수의 지수 평활법이 최소의 예측 오차를 생성하는 시계열의 조건과 그 조건들이 일부 완화되었을 때의 예측 오차의 변화를 조사해 보았다. 그리고 최적성의 조건 중 차이 계산의 차수와 이동 평균의 차수가 서로 다를 때에 지수 평활법에 의한 예측 오차의 증가 정도를 실제로 조사 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 즉 IMA 과정으로 표시되는 시계열에 대해 지수 평활법을 사용하여 예측을 행할 때 ;

(1) 주어진 시계열이  $IMA(n, n)$  과정이면서 이동 평균의 계수  $\theta_i$  가

$$\theta_i = \binom{n}{i} (-\beta)^i \quad \forall i \in n$$

의 조건을 만족하면 일반 차수의 지수 평활법에 의한 예측은 이론적으로 가능한 최소의 예측 오차를 낳으며, 이 중에서 차이 계산의 차수와 이동 평균의 차수가 서로 다를 경우, 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 낮은 경우가 그 반대의 경우보다 훨씬 예측 오차가 작게 된다. 또 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 낮은 경우라도 두 차수의 차가 작



을수록 예측의 정확성은 높아지게 된다. 이것은 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 높은 경우도 마찬가지이다.

(2) IMA(2, 3) 과정이나 IMA(1, 2) 과정과 같이 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 1만큼 낮은 경우, 순수 오차의 분산의 크기가 변함에 따라 정확도의 변화는 거의 동일한 양상을 보인다. 이것은 IMA(2, 1) 과정이나 IMA(3, 1) 과정과 같이 차이 계산의 차수가 이동 평균의 차수보다 1만큼 높은 경우도 마찬가지이다. 따라서 지수 평활법의 상대적 효율성은 차이 계산의 차수와 이동 평균의 차수의 차이의 양상에 매우 크게 영향을 받음을 알 수 있다.

본 연구에서는 최적성의 조건 중 차이 계산과 이동 평균의 계수가 서로 다른 경우에 대해서만 고려하였으나 또 하나의 제약 조건인 이동 평균 계수의 제약 조건이 완화되었을 때의 분석과 이론적인 확장이 앞으로의 연구 과제이다.

### 참 고 문 헌

[1] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., Time Series Analysis, Forecasting and Control, San Francisco; Holden-Day, 1970.

[2] Brown, R.G., Statistical Forecasting for Inventory Control, New York; McGraw-Hill, 1959.

[3] \_\_\_\_\_, Smoothing, Forecasting and Prediction, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.

[4] \_\_\_\_\_ and Meyer, R.F., "The Fundamental Theorem of Exponential Smoothing", Operations Research, vol. 9, No. 5, pp. 673-685, 1961.

[5] Cogger, K.O., "Extensions of the Fundamental Theorem of Exponential Smoothing", Management Science, Vol. 19, pp. 547-554, 1973.

[6] \_\_\_\_\_, "The Optimality of General Order Exponential Smoothing", Operations Research, Vol. 22, No. 4, pp. 858-867, 1974.

[7] D'Esopo, D.A., "A Note of Forecasting by the Exponential Smoothing Operator", Operations Research, Vol. 9, No. 5, pp. 667-686, 1961.

[8] Muth, J.F., "Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts", Journal of the American Statistical Association, Vol. 55, pp. 299-306, 1960.