

# Butterworth型 濾波器的 펄스傳送特性

鄭東根 · 金在根 / 特殊通信研究室

## I. 序 論

아나로그 濾波器的 通信特性으로서 任意信号의 通過時, 時間遲延, 補償措置 없이는 歪曲이 發生되며 그 原因이 되는 周波數別 通過(遲延) 時間을 Butterworth型 濾波器를 例로 들어 通過帶域幅과 함께 어떻게 變하는가를 指適하고, 또한 入力 信号가 펄스波 일 경우 通過 效率이 펄스 持續時間에 따라 如何한 變動을 하는가를 提示하고자 한다.

## II. 遲延時間

濾波器的 傳達函數를  $H(i\omega)$ 라 할 경우 遲延時間,  $T(\omega)$ 는 ①式과 같이 되고,

$$T(\omega) \triangleq -\frac{d}{d\omega} [\arg H(i\omega)] \text{sec} \dots \dots \dots \text{①}$$

$T(\omega)$ 가 一定한 경우 入力에 對한 出力 信号의 歪曲은 없으며, 周波數에 따라  $T(\omega)$ 가 變하게 되면 歪曲이 일어난다.

傳達函數의 一般式을 Laplace로 變換, ②式과 같이  $H(S)$ 로 表示하면,

$$H(S) = G \cdot S^k / (a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0) \dots \dots \dots \text{②}$$

여기서  $G$ : 濾波器的 利得,  $a$ : 常數

$H(S)$ 의 位相은  $S = i\omega$ 일 때 ③式과 같다.

$$\arg [H(i\omega)] = \theta - \tan^{-1} \left\{ \left\{ \sum_{j=0}^{j_2} (-1)^j \cdot a_{2j+1} (\omega)^{2j+1} \right\} / \left\{ \sum_{j=0}^{j_1} (-1)^j \cdot a_{2j} (\omega)^{2j} \right\} \right\} \dots \text{③}$$

여기서  $\theta = S^k$ 의 位相(一定角),  $j_1 = n/2$ ,  $j_2 = (n-1)/2$  遲延時間,  $T_n(\omega)$ 는 ③式을  $\omega$ 에 對해서 微分하면,

$$T_n(\omega) = \frac{\left[ \sum_{j=0}^{j_1} (-1)^j \cdot a_{2j} (\omega)^{2j} \right] \cdot \left[ \sum_{j=0}^{j_1} (-1)^j \cdot (2j+1) \cdot a_{2j+1} (\omega)^{2j} \right] - \left[ \sum_{j=1}^{j_1} (-1)^j \cdot (2j) \cdot a_{2j} (\omega)^{2j-1} \right] \cdot \left[ \sum_{j=0}^{j_2} (-1)^j \cdot a_{2j+1} (\omega)^{2j-1} \right]}{\left[ \sum_{j=0}^{j_1} (-1)^j \cdot a_{2j} (\omega)^{2j} \right]^2 + \left[ \sum_{j=0}^{j_2} (-1)^j \cdot a_{2j+1} (\omega)^{2j-1} \right]^2} \dots \dots \dots \text{④}$$

여기서 添字,  $n$ 는 normalization을 뜻하며, 任意의 角周波數,  $\omega_d$ 로 denormalization한 遲延時間,  $T(\omega)$ 와  $T_n(\omega)$ 의 關係는 ⑤式과 같다.

$$T(\omega) = \frac{1}{\omega_d} \cdot T_n(\omega) \dots \dots \dots \text{⑤}$$

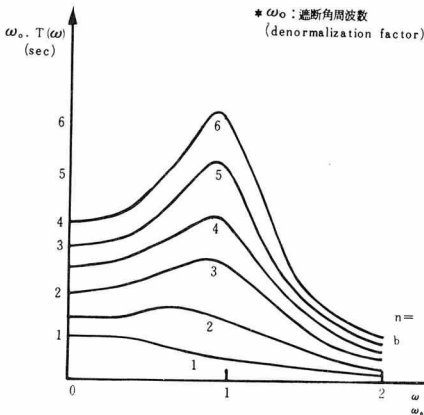
### 1. 低帶域 通過 濾波器(LPF)의 遲延時間

〈表 1〉과 같은 Butterworth型 LPF에서 周波數에 따른 遲延時間은 order數에 따라 電算하여 圖示하면 〈그림 1〉과 같으며, 周波數가 遮斷角周波數,  $\omega_0$ 에 接近할수록 最大가 되고 있다.

\* K=0

order (n)	H(S)의 係 數	H(jω)
1	a <sub>1</sub> =1, a <sub>0</sub> =1	(1+ω <sup>2</sup> ) <sup>-1/2</sup>
2	a <sub>2</sub> =2, a <sub>1</sub> =√2, a <sub>0</sub> =1	(1+ω <sup>4</sup> ) <sup>-1/2</sup>
3	a <sub>3</sub> =1, a <sub>2</sub> =2, a <sub>1</sub> =2, a <sub>0</sub> =1	(1+ω <sup>6</sup> ) <sup>-1/2</sup>
4	a <sub>4</sub> =1, a <sub>3</sub> =2.61, a <sub>2</sub> =3.42, a <sub>1</sub> =2.61, a <sub>0</sub> =1	(1+ω <sup>8</sup> ) <sup>-1/2</sup>
5	a <sub>5</sub> =1, a <sub>4</sub> =3.24, a <sub>3</sub> =5.24, a <sub>2</sub> =5.24, a <sub>1</sub> =3.24, a <sub>0</sub> =1	(1+ω <sup>10</sup> ) <sup>-1/2</sup>
6	a <sub>6</sub> =1, a <sub>5</sub> =3.86, a <sub>4</sub> =7.46, a <sub>3</sub> =9.14, a <sub>2</sub> =7.46, a <sub>1</sub> =3.86, a <sub>0</sub> =1	(1+ω <sup>12</sup> ) <sup>-1/2</sup>

〈表 1〉 Butterworth LPF의 伝達函數



〈그림 1〉 Butterworth LPF의 遅延時間

2. 帶域通過 濾波器(BPF)의 遅延時間

〈表 2〉와 같은 係數를 갖는 Butterworth 型 LPF를 利用, BPF로 變換하기 爲해서 上側 遮斷 角周波數를 ω<sub>u</sub>, 下側 遮斷 角周波數를 ω<sub>L</sub> 이라고 할 때 帶域幅, B는

$$B \triangleq \omega_u - \omega_L \dots\dots\dots \textcircled{6}-1$$

中心 周波數, ω<sub>g</sub>는

$$\omega_g \triangleq \sqrt{\omega_u \cdot \omega_L} \dots\dots\dots \textcircled{6}-2$$

Quality factor, Q는

$$Q \triangleq \omega_g / B \dots\dots\dots \textcircled{6}-3$$

Butterworth型 BPF의 H(S)는 〈表 2〉와 같다.

order	H(S)의 係數	H(iω)
1	a <sub>2</sub> =Q, a <sub>1</sub> =1, a <sub>0</sub> =Q, K=1	$\frac{\omega}{\sqrt{\{Q(1-\omega^2)\}^2 + \omega^2}}$
2	a <sub>4</sub> =Q <sup>2</sup> , a <sub>3</sub> =√2Q, a <sub>2</sub> =2Q <sup>2</sup> +1, a <sub>1</sub> =√2Q, a <sub>0</sub> =Q <sup>2</sup> , K=2	$\frac{\omega^2}{\sqrt{\{Q^2\omega^4 + Q^2 - (2Q^2+1)\omega^2 + \{ \sqrt{2}Q\omega(1-\omega^2) \}^2\}}$
3	a <sub>6</sub> =Q <sup>3</sup> , a <sub>5</sub> =2Q <sup>2</sup> a <sub>4</sub> =3Q <sup>2</sup> +2Q, a <sub>3</sub> =4Q <sup>2</sup> +1, a <sub>2</sub> =3Q <sup>2</sup> +2Q, a <sub>1</sub> =2Q <sup>2</sup> , a <sub>0</sub> =Q <sup>3</sup> , K=3	$\frac{\omega^3}{\sqrt{\{-Q^3\omega^6 + (3Q^2+2Q)\omega^4 - (3Q^2+2Q)\omega^2 + Q^3 + \{2Q^2\omega^3 - (4Q^2+1)\omega + 2Q^2\omega\}^2\}}$

〈表 2〉 Butterworth BPF의 伝達函數

T<sub>n</sub>(ω)는 ④式에 依해, 〈表 2〉의 1st order와 2nd order 경우, ⑫式과 같이 表示되며,

$$\text{1st order : } T_n(\omega) = \frac{Q(1+\omega^2)}{Q\omega^4 + (1-2Q^2)\omega^2 + Q^2} \dots\dots\dots \textcircled{7}-1$$

$$\text{2nd order : } T_n(\omega) = \frac{\sqrt{2}Q\{Q^2\omega^6 - (Q^2-1)\omega^4 - (Q^2-1)\omega^2 + Q^2\}}{Q^4\omega^8 - 4Q^4\omega^6 + (6Q^4+1)\omega^4 - 4Q^4\omega^2 + Q^4} \dots\dots\dots \textcircled{7}-2$$

帶域幅(B)에 따라서 電算하면 〈表 3〉과 같은

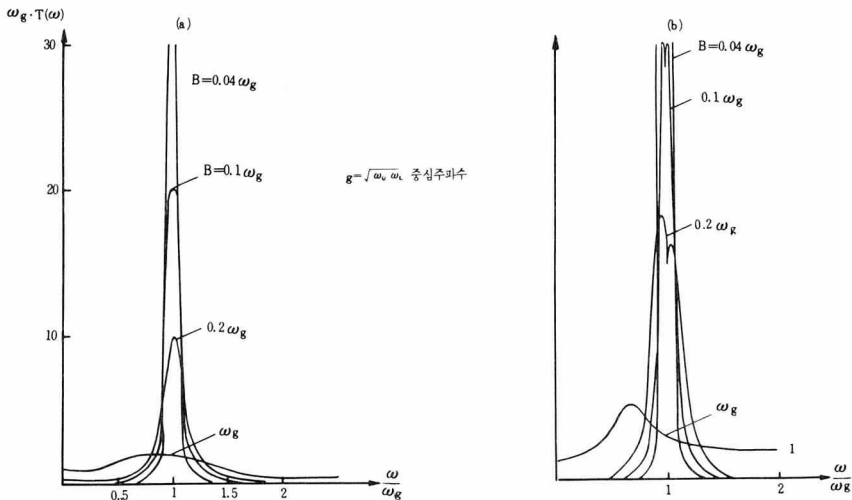
값을 얻으며, 이를 圖示하면 〈그림 2〉와 같이 遅延時間은 ω<sub>g</sub>에 接近할 수록 急激히 커지고, 또한 帶域幅이 적을수록 急激히 增加됨을 보여 주고 있다.

III. 펄스波의 通過 效率

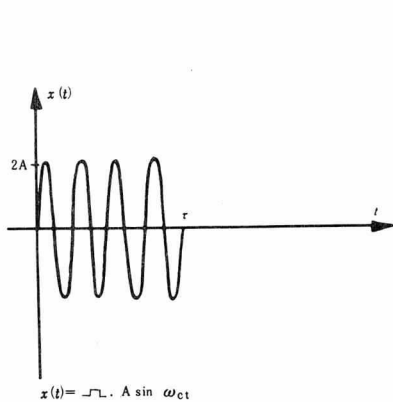
〈그림 3〉과 같은 時間函數로서 〈그림 4〉와 같은 周波數 스펙트럼을 갖는 펄스波가 濾波器를 通過할 경우의 通過 效率를 求한다.

ord	$B/\omega_g$	0	0.5	0.8	0.9	0.95	0.98	1	1.02	1.05	1.1	1.2	1.5	비	고	
1 st	1	1.0	1.5	2.1	2.1	2.1	2.	2	1.96	1.9	1.8	1.5	0.9	電算 Data는 $\omega_g \cdot T(\omega)$ 임.	"	
	0.2	0.2	4.4	2.1	5.3	8.3	9.8	10	9.4	7.7	4.8	1.9	3.9			
	0.1	0.1	0.2	1.2	4.2	10.3	17.5	20	17	9.8	3.9	1.2	0.2			
	0.04	0.04	0.09	0.5	1.9	7.0	25.3	50	24.8	6.9	2	0.5	0.08			
	0.02	0.02	0.04	0.25	1	3.9	20.1	100	19		1	0.2	0.04			
2 nd	1	1.4	3.8	4.2	3.3	3	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.3			"
	0.2	0.3	6.4	4.1	14.9	17.6	15	14.1	14.4	15.8	13.5	4.3	0.6			
	0.1	0.14	0.3	1.9	8.3	29	32.7	28.3	31.3	27.6	8.4	1.9	0.3			
	0.04	0.06	0.13	0.7	2.9	12.7	71.4	70.7	70	12.9	3	0.7	0.1			
	0.02	0.03	0.06	0.36	1.4	5.9	41.5	141	40		1.43	0.3	0.06			

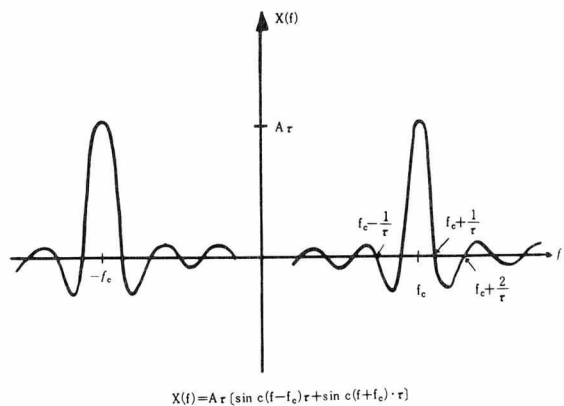
〈表 3〉 Butterworth BPF의 遲延時間 ( $\omega_g = \sqrt{\omega_U \cdot \omega_L}$ ) 單位: sec



〈그림 2〉 Butterworth BPF의 遲延時間



〈그림 3〉 入力信号



〈그림 4〉 入力信号의 周波数 스펙트럼

1. 低帶域 通過 濾波器(LPF)의 通過 效率

〈表1〉의 係數를 갖는 1st order의 伝達函數의 크기,  $|H_n(f)|$  는 ⑧式과 같고,

$$|H_n(f)| = G / \sqrt{1+f^2} \dots\dots\dots ⑧$$

여기서  $f$ 는 遮斷周波數,  $f_0$ 로 normalization 된 값

入力 信號 周波數 스펙트럼,  $X(f)$  는,  $1/\tau = b \cdot f_0$  ( $b$ 는 常數)로 놓을 경우 ⑨式과 같이 表示되고,

$$X(f) = A\tau \cdot \text{sinc} \left\{ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_c}{f_0} \right) \cdot \frac{1}{b} \right\} \dots\dots\dots ⑨$$

$f_0$ 로 normalization 한  $X_n(f)$  는 ⑩式과 같이되어,

$$X_n(f) = A\tau \cdot \text{sinc} \left\{ \left( f - \frac{f_c}{f_0} \right) \cdot \frac{1}{b} \right\} \dots\dots\dots ⑩$$

出力,  $|Y_n(f)|$  는 ⑪式과 같이 表示된다.

$$|Y_n(f)| = |X_n(f)| \cdot |H_n(f)| = G \cdot A\tau \cdot \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{1}{b} \right\} / \sqrt{1+f^2} \dots\dots\dots ⑪$$

여기서  $a \leq f_c/f_0$

濾波器的 通過效率,  $S(\%)$ 를 ⑫式과 같이 定義해서

$$S(\%) \triangleq (\text{出力 스펙트럼의 합} / \text{入力 스펙트럼의 합}) \times 100\% \dots\dots\dots ⑫$$

$S(\%)$ 를 구하면 ⑬式을 얻는다.

$$S(\%) = \frac{\int_0^\infty |Y_n(f)| \cdot df}{\int_0^\infty |X_n(f)| \cdot df} \times 100 = \frac{\int_0^\infty A\tau \cdot \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{1}{b} \right\} / \sqrt{1+f^2} \cdot df}{\int_0^\infty A\tau \cdot \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{1}{b} \right\} \cdot df} \times 100 \dots\dots\dots ⑬-1$$

$$\frac{S(\%)}{G} = \frac{\int_0^\infty \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{1}{b} \right\} / \sqrt{1+f^2} \cdot df}{\int_0^\infty \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{1}{b} \right\} \cdot df} \times 100 \dots\dots\dots ⑬-2$$

2nd order의 伝達函數의 크기,  $|H(f)|$  는 ⑭式과 같이 表示되고,

$$|H_n(f)| = G / \sqrt{1+f^4} \dots\dots\dots ⑭$$

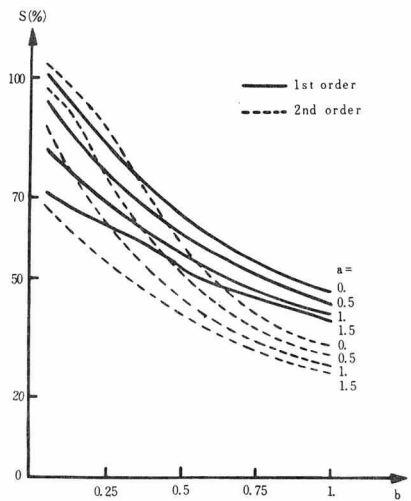
⑩, ⑫式을 利用하여 구한  $S(\%)$ 는 ⑮式으로 表示된다. 따라서

$$\frac{S(\%)}{G} = \frac{\int_0^\infty \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{1}{b} \right\} / \sqrt{1+f^4} \cdot df}{\int_0^\infty \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{1}{b} \right\} \cdot df} \times 100 \dots\dots\dots ⑮$$

$a, b$ 에 따른 ⑬, ⑮式의 電算値는 〈表4〉와 같으며, 이를 示하면 〈그림5〉에서와 같이 필스 持續時間( $\tau$ )이 클수록 通過率( $S$ )는 커지고, 또한 搬送信號 周波數가 작을수록 通過率은 커짐을 보여 준다.

		a						
		b	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25
1st	0.1	96.3	92.6	88.2	83.5	78.7	73.7	68.6
	0.25	84.1	80.0	76.1	72.5	69.1	65.9	62.8
	0.5	66.3	63.6	61.1	58.8	56.6	54.6	52.6
	1	46.8	45.5	44.3	43.1	42.0	40.9	40.0
2nd	0.1	99.4	97.3	92.8	86.4	78.9	71.0	62.8
	0.25	87.0	80.5	74.2	68.3	63.0	58.2	53.8
	0.5	59.0	55.0	51.4	48.3	45.4	42.8	40.5
	1	33.8	32.3	31.0	29.8	28.7	27.6	26.6

〈表4〉 Butterworth LPF의 入力信號 通過效率,  $S(\%)$  ( $a = f_c/f_0, b = 1/\tau \cdot f_0, f_c =$  信號周波數,  $f_0 =$  遮斷周波數)



〈그림5〉 入力信號 通過效果 ( $a = f_c/f_0, b = 1/\tau \cdot f_0, S =$  通過效率)

2. 帶域通過 濾波器(BPF)의 通過效率

1st order 境遇 伝達函數의 크기,  $|H_n(f)|$  는 〈表2〉의 係數를 갖는 Butterworth 型 濾波器를 例로서 ⑯式과 같이 表示되고,

$$|H_n(f)| = G \cdot f / \sqrt{\{Q(1-f^2)\}^2 + f^2} \dots\dots\dots ⑯$$

1/τ=b·B 로 놓을 境遇, X<sub>n</sub>(f)는 ⑰ 式과 같으며,

$$X_n(f) = A\tau \cdot \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{Q}{b} \right\}, \quad a = f_0 / f_g \dots \text{⑰}$$

S(%)를 구하면 ⑱ 式과 같다.

$$\frac{S(\%)}{G} = \frac{\int_0^\infty f \cdot \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{Q}{b} \right\} / \sqrt{1 - (1-f^2)^2 + f^2} \cdot df}{\int_0^\infty \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{Q}{b} \right\} \cdot df} \times 100 \dots \text{⑱}$$

2nd order 의 境遇, |H<sub>n</sub>(f)|는 ⑲ 式과 같으며

$$|H_n(f)| = G \cdot f^2 / \sqrt{Q^2 f^8 - 4Q^2 f^6 + (6Q^2 + 1)f^4 - 4Q^2 f^2 + Q^2} \dots \text{⑲}$$

⑰ 式의 X<sub>n</sub>(f)를 利用하여 S(%)를 구하면 ⑳ 式과 같다.

$$\frac{S(\%)}{G} = \frac{\int_0^\infty \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{Q}{b} \right\} \cdot f^2 / \sqrt{Q^2 f^8 - 4Q^2 f^6 + (6Q^2 + 1)f^4 - 4Q^2 f^2 + Q^2} \cdot df}{\int_0^\infty \text{sinc} \left\{ (f-a) \cdot \frac{Q}{b} \right\} \cdot df} \times 100 \dots \text{㉑}$$

따라서 a, Q, b에 따른 ⑱, ㉑ 式의 값은 <表 5>와 같이 電算되고, 示하면 <그림 6>과 같이 通過率(S)는 周波수가 中心 周波數 ω<sub>g</sub> 근처에서는 持續時間이 클수록 커짐을 보여 주고 있다.

order	a/b	0.5				0.25				1				1.5			
		10	4	2	1	10	4	2	1	10	4	2	1	10	4	2	1
1st	0.1	6.5	10.7	18.9	34.4	15.1	27.1	37.9	50.1	74.6	76.9	68.2	68.4	15.5	32.0	54.6	83.6
	0.25	4.9	12.0	28.2	44.7	13.8	27.8	39.8	51.0	52.1	45.9	49.7	56.2	18.8	36.9	44.3	51.8
	0.5	5.7	23.0	36.6	46.8	17.3	29.9	38.1	47.0	28.8	34.1	40.3	46.7	27.2	31.7	37.3	43.5
	1	14.9	27.7	34.6	39.1	22.2	29.0	34.1	38.2	22.1	27.8	32.5	36.7	19.5	24.7	29.4	33.9
2nd	0.1	0.4	1.5	7.2	24.8	2.4	11.5	26.0	41.5	70.3	71.8	63.3	65.2	6.6	18.2	44.5	57.7
	0.25	0.3	3.2	19.8	38.8	2.6	18.1	31.9	44.9	40.2	36.2	41.1	49.2	7.0	24.0	32.6	41.9
	0.5	0.5	16.2	29.0	38.6	9.4	21.2	29.7	37.4	18.7	23.6	29.5	36.0	14.8	19.5	25.0	31.4
	1	7.9	18.1	23.4	27.1	13.8	18.6	22.5	25.9	12.6	16.9	20.7	24.3	10.0	13.8	17.7	21.6

<表 5> Butterworth BPF의 入力信号 通過效果  
(a = f<sub>0</sub>/f<sub>g</sub>, 1/τ = b·Q, f<sub>c</sub> = 信号周波數, f<sub>g</sub> = 等比 中心周波數)

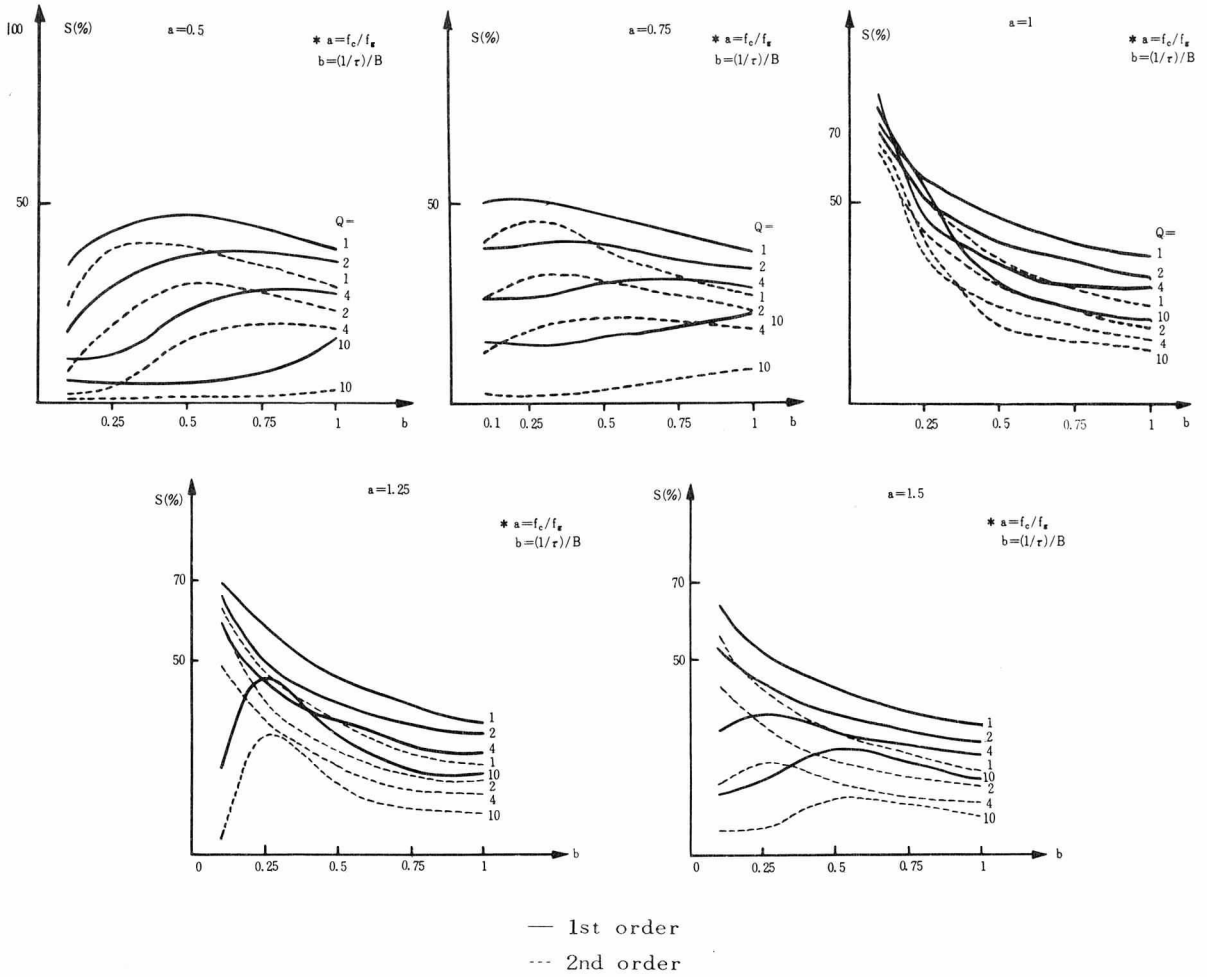
#### IV. 結 論

아나로그 濾波器의 通信 特性으로서 遲延歪曲의 原因이 되는 入力 周波數別 通過(遲延) 時間을 보면, 低帶域通過 濾波器에서는 周波數가 遮斷周波數에 接近할수록 서서히 增加함을 알 수 있고(<그림 1> 参照), 帶域通過 濾波器에서는 周波數가 中心 周波數에 接近할수록 周波數 帶域幅 減少와 더불어 急激히 增加됨을 보여 주었다(<그림 2> 参照). 따라서 受信에서는 檢波되기 前에 逆 濾波器 特性을 갖는 等化器(Equalizer)를 반드시 부착하여 周波數別 過通時間이 같게 되도록 함으로써 遲延歪曲을 없애도록 하 근처에서 Q가 작을수록(即, 帶域幅이 클수록)

여야 함은 通信施設을 設計하는 엔지니어에게는 周知의 事實이다.

펄스波의 通信效率은 低帶域通過 濾波器(Butterworth型 1st, 2nd order)에서는 周波數가 遮斷 周波數보다는 작아야 되고, 펄스 持續時間이 클수록 서서히 增加함을 보여 주며(<그림 5> 参照), 帶域通過 濾波器(Butterworth 1st, 2nd order型)에서는 信号 周波數가 中心 周波數(ω<sub>g</sub>) 또한 펄스波 持續時間이 클수록 커지는 現象을 보여 주었다.

따라서, 濾波器를 利用한 通信 設計에서는 通信 信号가 相當한 時間동안 持續되어야 함을 留意하여야 한다.



〈그림 6〉 Butterworth 型 BPF 의 信号通過效率, S(%)

参 考 文 献

1. Johnson, David E., Introduction to Filter Theory, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976.
2. Williams, Arthur B., Active Filter De-

- sign, Dedham, Artech House, 1975.
3. Daniels, Richard W., Approximation Methods for Electronic Filter Design, New York, McGraw-Hill, 1974.
4. Carlson, Bruce, Communication System, New York, McGraw-Hill, 1975.