產業科學研究(江原大學校 產業科學研究所 論文集) 第1輯(1981)
Res. Report, The Inst. of Industrial Science, Kangweon Nat. Univ., Korea, Vol. 1

檢査過誤와 逐次샘플링 檢査

安 世 熙* 李 鍾 盛**

Inspection Errors and Sequential Sampling Plan

Se-Hee Ahn · Jong-Seong Lee

Abstract

The sequential sampling models are presented in a form which includes inspector error. The effect of inspector errors on the probability of type I and type II errors is discussed.

I. 序 論

品質檢査의 方法으로서 널리 利用되고 있는 샘플링檢査方式은 檢査가 완벽하다는 가정을 전제로 하고 있다. 그러나 실제로 완벽한 檢査란 있을 수 없다. Jacobson [7]은 이상적인 檢査조건에서도 高度로 숙련된 檢査者의 過誤率(error rate)이 25% 이상이 된다고 하였다.

檢査過誤가 計數型 샘플링檢査에 미치는 영향은 Case, Bennett와 Schmidt [4]와 Beainy와 Case [2]에 의해 AOQ, ATI 그리고 OC곡선의 변화가 연구되었으며, Biegel [1]은 檢査過誤는 檢査로트의 不良率과 線形관계가 있다는 가정을 세워서 計數型 1回 샘플링 檢査에서 檢査過誤의 영향을 연구하였다. Collins와 Case [3]는 檢査過誤가 발생하는 경우에도 샘플에서 발견되는 不良品의 數의 分布는 역시 2항分布에 따름을 증명하였다.

本 研究에서는 計數型 逐次샘플링 檢査에서 檢査過誤의 영향을 논의하였다. 실제로 검사과정에서 발생하는 過誤는 2가지 type로 구분된다. 즉,

e_1=良好品을 不良品으로 분류하는 過誤

e_2=不良品을 良好品으로 분류하는 過誤

檢査로트의 不良率의 참값을 P라고 할 때 e_1과 e_3의 영향으로 외관상에 실제로 나타나는 不良品 P_e는 다음과 같이 표현된다.

$$P_e = P(1-e_2)+(1-P)e_1$$

不良率이 P인 로트를 檢査하기 위해 수립된 검사계획서 제1종오차 및 제2종오차의 설계치를 각각 α와 β라하면 檢査過誤로 인해서 실제로 외관상에 나타나는 로트의 不良率은 Pe가 되므로 실질적인 제1종오차 및 제2종오차는 각각 α_r과 β_r로 나타나게 된다. 아래에서는 逐次샘플링檢査에서 P_e에 對한 α_r 및 β_r의 값을 random walk process를 利用하여 계산하는 과정을 제시하고 例題를 통하여 檢査過誤가 가설검정의 제1종오차 및 제2종오차에 미치는 영향을 例示하였다.

---

* 工科大學 產業工學科 助敎授

** 工科大學 產業工學科 專任講師

Ⅱ. 逐次샘플링 檢査의 제1종 및 제2종 誤差

檢査過誤가 없는 경우의 逐次샘플링 검사의 가설은 $H_0: P=P_0$ VS. $H_0: P=P_1$이다. 크기 n인 로트내에 있는 不良品의 數의 分布는 2항分布에 따름으로 逐次 檢査의 경우

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \leq \frac{P_1{}^x(1-P_1)^{n-x}}{P_0{}^x(1-P_0)^{n-x}} \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (1)$$

이 된다. 여기서 x는 누적 불량개수이다. (1)을 검사자 過誤가 포함된 경우로 수정하면

$$\frac{1-\alpha}{\beta} \leq \frac{(P_1P_e)^x(1-P_1P_e)^{n-x}}{(P_0P_e)^x(1-P_0P_e)^{n-x}} \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (2)$$

이 되며, 양변에 로그를 취하면

$$\log(\frac{\beta}{1-\alpha}) \leq x\log(\frac{P_1}{P_0})+(n-x)$$
$$\log(\frac{1-P_1P_e}{1-P_0P_e}) \leq \log(\frac{1-\beta}{\alpha}) \quad (3)$$

이 된다.

이 문제는 1차원 랜덤—워크(gambler ruin problem)로서 설명될 수 있다.

즉, $a=\log(\frac{1-\beta}{\alpha})-\log(\frac{\beta}{1-\alpha})$로 놓으면 랜덤 워크의 한계(limits)는 o, a가 되며 단계(step)는 $\{P_k=(x_i=k), -\infty \leq k \leq \infty\}$의 확율분포를 갖는 확율변수 x_i로 설명된다. $x_1+x_2+\cdots+x_n$이 한계 o, a를 초과할 때 샘플링은 끝난다. 이 경우 확율변수 x_i의 값은,

$$\log \lambda_n = \log\left(\frac{P_1{}^x(1-P_1)^{n-x}}{P_0{}^x(1-P_0)^{n-x}}\right) = x\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + (n-x)\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)$$

으로부터 결정된다. 언제나 $P_0<P_1$이므로 不良品이 한개 발생되면 x와 n이 각각 1씩 증가하므로 $\log \lambda_n$은 $\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$ 만큼 증가한다 ($x_i=\log(\frac{P_1}{P_0})$).

良好品이 발견되는 경우에는 n만이 1 증가하므로 $\log \lambda_n$은 $\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)$ 만큼 감소하게 된다$\left(x_i=\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)\right)$

따라서 확율 변수 x_i가 취할 수 있는 값은 $\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$와 $\log\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)$의 두가지 뿐이다.

이 랜덤 워크의 한계는 샘플링계획의 誤差의 설계치 α와 β에 의해서 결정되며, α와 β는 2항分布 $b(x;n,P_0)$와 $b(x;n,P_1)$으로부터 계산된다. 그러나 檢査 로트에서 不良品이 발견될 확율은 製品의 品質水準과 檢査者의 검사능력(過誤를 범할 확율)에 따라 결정되므로 不良品의 발견 확율은 귀무가설 H_0가 진실일 경우 P_0P_e가 H_0가 거짓일 경우에는 P_1P_e가 된다.

실질적으로 외관상에 나타나는 제1종오차는 H_0가 진실일때 $1-P_r.(\text{ruin})$이다.

즉, $\alpha_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_r. \{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n \geq \log\frac{1-\beta}{\alpha}$ /n이전의 단계에서는 한계 o, a를 초과하지 않음$\}$

실질적인 제2종 誤差는 H_1이 진실일 때 $P_r.(\text{ruin})$이다.

즉, $\beta_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_r. \{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n \leq \log\frac{\beta}{1-\alpha}$ /n이전에는 한계 o, a를 초과하지 않음$\}$

$P_r.(\text{ruin})$을 구하기 위해서는

$$u_t = \sum_{x=1}^{a-1} u_x P_{x-t} + r_t \quad (4)$$

의 解를 먼저 구하여야 한다. (Feller [6] pp. 363—371 참조)

여기서,

$u_t = P_r(\text{eventual ruin/at position } t)$
$P_{x-t} = P_r.(\text{jump from } t \text{ to } x)$
$r_t = P_r.(\text{ruin in one step from position } o \leq t \leq a)$

한계 $a=\log\frac{1-\beta}{\alpha}-\log\frac{\beta}{1-\alpha}$는 꼭 정수(integer)가 되어야 하는데, 보통 a는 정수가 되지 않는다. 따라서 random walk 의 근사해

법(truncation method)으로 a의 값은 소수 다섯째 자리까지 구하고 그 결과에 10^5을 곱한다.

여기서 이 ruin problem은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$\alpha_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_r.\{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n < a/n$ 이전에는 한계를 초과하지 않음$\}$

$\beta_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_r.\{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n < o/n$ 이전에는 한계를 초과하지 않음$\}$

Feller [6]는 式 (4)가 유일해(unique solwtion)을 가짐을 증명하였다.

경계조건;

$$u_x = 1 \text{ if } x \leq o$$
$$= 0 \text{ if } x \geq a \quad (5)$$

에 의해서 式 (4)는

$$u_t = \sum_{x=1}^{a-1} u_x\ P_{x-t} \quad (6)$$

로 되어 式 (6)은 (a−1)개의 미지수가 있는 (a−1)개의 방정식의 집단이다.

$w = \log\frac{P_1}{P_0}$, $-v = \log\frac{1-P_1}{1-P_0}$라 하면 P_k는 $k=-v$와 $k=w$에서만 0(zero)이 아닌 값을 갖게 된다. 따라서 式 (6)의 특성 방정식의 형태는

$$P_{(-v)}\sigma^{-v} + P_w\sigma^w = 1 \quad (7)$$

이 되며 (7)의 일반해는 σ_k의 선형 결합 형태가 된다.

즉, $u_t = \sum A_k \sigma^t{}_k$ (8)

여기서 계수 A_k는 경계 조건에 따라 결정된다. 그런데 (8)의 방정식(system of equations)은 계수 A_k의 모든 값이 결정되기 위해서 특성 방정식의(w+v)개의 실근(real roots)을 필요로 한다. 실제로(w+v)는 큰 수이므로 A_k의 결정은 거의 불가능한 것처럼 보인다. 그러나 특성 방정식은 항상 2개의 양근(positive roots)을 가지며 적어도 그중 하나는 1이 된다.

Feller [6]는 이 문제의 解法을 다음과 같이 제시하였다.

$u_t = \sum u_x P_{x-t}$은 경계 조건이

$u_x = 1$ if $x \leq o$

$= 0$ if $x \geq a$이며

$k=-v$와 $k=w$일 때만 $P_k \neq 0$이므로 $\{P_k\}$의 평균이 0일 때는

$$\frac{a-t}{a+v-1} \leq u_t \leq \frac{a+w-t-1}{a+w-1} \quad (9)$$

을 만족하고, $\{P_k\}$의 평균이 0이 아닐 때는

$$\frac{\sigma_1{}^a - \sigma_1{}^t}{\sigma_1{}^a - \sigma_1{}^{-v+1}} \leq u_t \leq \frac{\sigma_1{}^{a+w-1} - \sigma_1{}^t}{\sigma_1{}^{a+w-1} - 1} \quad (10)$$

을 만족한다. 일반적으로 $\{P_k\}$는 0이 아닌 평균(non-zero mean)을 갖게 되므로 式 (10)은 ruin problem의 解의 범위(range)로 간주될 수 있으며, 이로부터 α_r과 β_r의 값의 범위를 결정할 수 있다. 例로서, $P_e=0.8$, $P_0=0.05$, $P_1=0.1$, $\beta=0.2$, 그리고 $\alpha=0.05$라 하면

$$a = \log\frac{0.8}{0.05} - \log\frac{0.2}{0.95} = 1.8819$$

$$t = -\log\frac{0.2}{0.95} = 0.6778$$

$$w = \log\frac{0.1}{0.05} = 0.30103$$

그리고 $-v=-0.02349$가 된다. 이들 값에 10^5배를 하여서 특성 방정식은

$0.965^{-2349} + 0.045^{30103} - 1 = 0$이 된다.

이 방정식의 한 解는 1이며 또 다른 non-negative solution은 Newton-Raphson의 方法으로 구할 수 있다. 위의 값들을 (10)式에 대입하여 P_r.(ruin)의 범위를 구한다. 그리고,

$\alpha_r = 1 - P_r$.(ruin)에서 $0.04 \leq \alpha_r \leq 0.013$을 얻을 수 있다. (Feller [6] 참조)

例 題

다음의 例를 통해서 檢査 過誤의 영향을 例示하였다.

$H_0 : P=0.05$ vs. $H_1 : P=0.10$

where $\alpha=0.05$, $\beta=0.20$

아래 그림은 α_r과 β_r의 범위를 P_e의 범위를 P_e의 함수로 나타낸 것이다.

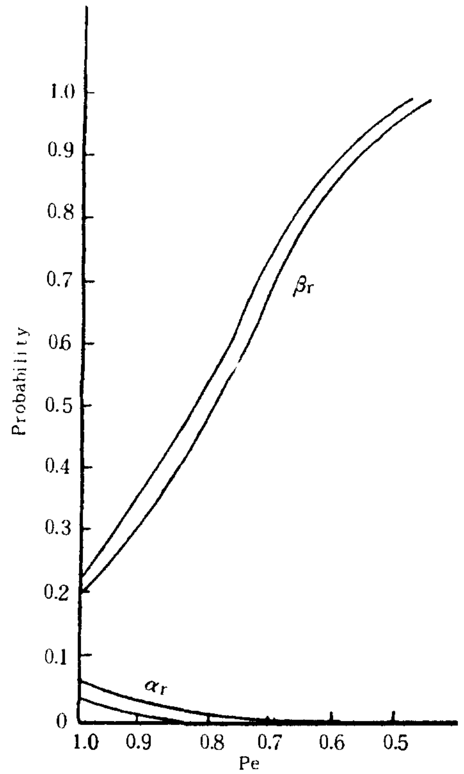

Figure 1. **The Effects of P_e on the Type Ⅰ and Type Ⅱ Errors.**

Ⅲ. 結 論

例題를 통해서 다음의 두 가지 결론을 얻을 수 있었다.

1) β_r은 항상 β보다 크며 α_r은 항상 α보다 작다.

2) P_e의 값이 클수록 α_r과 β_r의 변화가 커지며, 특히 P_e의 값이 0.6 이하에서는 α_r과 β_r의 변화가 급격히 적어진다.

逐次 샘플링 檢査에서는 일단 검정통계량이 합격(혹은 불합격) 한계를 초과하면 Sampling이 중단되므로 검사 과오를 補正하기 위하여 샘플의 크기를 조정하여 제1종 誤差와 제2종 誤差를 수정한다는 것은 극히 어렵다. 따라서 逐次 샘플링 檢査의 補正은 불합격(혹은 합격) 한계를 수정하든가 아니면 검정통계량에서 검사과오에 해당되는 값 만큼을 加減하는 方法을 택하여야 한다.

REFERENCES

1. Biegel, J. E., "Inspector Errors and Sampling Plans." AIIE Transactions, Vol. 6, No. 4. pp 284—287 (1974)
2. Beainy, I. and K. E. Case, "A Wide Variety of AOQ and ATI Performance Measures with and without Inspection Error." Journal of Quality Technology, Vol. 13, No. 1, pp 1—9 (1981)
3. Collins, R. D., Jr., Kenneth E. Case, "The Distribution of Observed Defectives in Attribute Acceptance Sampling Plans under Inspection Error." AIIE Transactions, Vol. 8, No. 3, pp 375—378 (1976)
4. Case, K. E., G. K. Bennet and J. W. Schmidt, "The Effect of Inspection Error on AOQ." Journal of Quality Technology, Vol. 7, No. 1, pp 28—33 (1975)
5. Duncan, A. J., Quality Control and Industrial Statistics. 4th Ed. pp 190—196 (1974)
6. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Application. 3rd Ed., Vol. 1, pp 363—371 (1968)

7. Iacobson, H. J., "A Study of Inspector Accuracy," Industrial Quality Control, Vol. 9, pp 16—25 (1952)
8. 김영휘, 품질관리, pp 106—114 (1979)
9. Minton, G., "Verification Error in Single Sampling Inspection Plans for Processing Survey Data," Journal of American Statistical Association, Vol. 67, No. 337, pp 46—54 (1972)
10. Rohatgi, V. K., An Introduction to Probebility Theory and Mathematical Statistics. pp 589—640 (1976)
11. Wald, A., "Sequential Tests of Statistical Hypotheses." Annals of Math. Stat., Vol. 16, pp 117—186 (1945)