韓國數學敎育學會誌 <數學敎育>
1981. 6. Vol. XIX. No. 2

Journal of Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1981. Vol. XIX. No. 2

BCK-代數에 關하여

洪 性 敏

1. 1966년 K. Iséki에 의하여 BCK-대수라는 새 개념이 소개 되었다.

여러 사람에 의하여 BCK-代數에 關한 흥미있는 결과를 얻은바 아직 계속 연구되고 있는 중이다.

여기에서 본인은 有界인 可換 BCK-代數에서 定義된 對合(involution)을 中心으로 하여 非可換 BCK-代數에서의 對合의 存在를 살펴본다.

2. 우선 BCK-代數의 개념을 살펴보자.

〈정의 1〉 다음 (1)에서 (6)까지의 조건을 만족하는 〈2.0〉 형태의 일반 대수 $M=\langle X * 0\rangle$를 BCK-代數라 한다.

(1) $(x*y)*(x*z)\leq z*y$

(2) $x*(x*y)\leq y$

(3) $x\leq x$

(4) $x\leq y,\ y\leq x$ 이면 $x=y$ 이다.

(5) $0\leq x$

(6) $x\leq y$ *iff* $x*y=0$

〈정리 1〉 BCK-代數에서는 다음의 정리가 成立한다〈(7)~(13)〉.

(7) $x\leq y$ 이면 $z*y\leq z*x$ 이다.

(8) $x\leq y,\ y\leq z$ 이면 $x\leq z$ 이다.

(9) $(x*y)*z=(x*z)*y$

(10) $x*y\leq z$ 이면 $x*z\leq y$ 이다.

(11) $x\leq y$ 이면 $x*z\leq y*z$ 이다.

(12) $x*y\leq x$

(13) $x*0=x$

(7)~(13)의 증명은 〔1〕 참조

〈정의 2〉 $y*(y*x)$를 $x\wedge y$로 정의한다.

그러면 (2)에서 $x\wedge y\leq x$……(14)

또 $0=y*y\leq y*x$는 (10)에 의하여

$y*(y*x)\leq y$

$\therefore\ x\wedge y\leq y$……(15)

그러므로 $x\wedge y$는 $x\cdot y$의 일반 下界이고 (13) 및 〈정의 2〉에 의하여

$x\wedge x=x$ ……………………(16)

$x\wedge 0=0\wedge x=0$ …………(17)

〈정의 3〉 BCK-代數에 한 원소 1이 있어서 모든 x에 관하여 $x\leq 1$이면 1을 unit라 부르고 unit가 있는 BCK-代數를 有界라고 부른다.

유계인 BCK-代數에서 $1*x$를 Nx라 표시하자.

〈정리 2〉 有界인 BCK-代數에서는 다음 정리가 成立한다. 〈(18)~(24)〉

(18) $N1=0,\ N0=1$

(19) $NNx\leq x$

(20) $Nx*Ny\leq y*x$

(21) $y\leq x$ 이면 $Nx\leq Ny$ 이다.

(22) $Nx*y=Ny*x$

(23) $1\wedge x=x$

(24) $x\wedge 1=NNx$

〈증명〉 (18)~(22)의 증명은 〔1〕 참조. 단 여기서는 본 이론 전개의 目的에 依하여 (23), (24)의 증명만 한다.

(23)의 증명 $1\wedge x=x*(x*1)=x*0=x$ …(25)

(24)의 증명 $x\wedge 1=1*(1*x)=NNx$………(26)

3. 〈정의 4〉 한 원소 x가 $NNx=x$를 만족하면 x는 對合(involution)이라 부른다.

〈정의 5〉 BCK-代數의 각 쌍의 두 원소 x, y에 대하여 $x\wedge y=y\wedge x$이면 이 대수를 可換(commutative)라 한다.

따라서 다음 정리를 얻는다.

〈정리 3〉 有界인 BCK-代數에서는 $NNx=x$이다.

〈증명〉 (23), (24)에 의하여 $NNx=x$ 〈증명끝〉

우리는 BCK-代數 X에서 非可換인 경우에도 $NNx=x$인 $x \in X$가 존재하는가 하는 문제가 생긴다.

다음 예는 그러한 x가 존재하는가 하는 K. Iséki의 문제 제기에서 긍정적인 대답을 얻을 수 있는 예이다.

〈예〉 [6]의 도표 (Ⅱ)에서 〈[6] 참조〉 원소 1에 대응하는 각원소에 대한 연산 $*$에 대응치를 교정하였다.

즉 $X=\{0, a, b, 1\}$의 X 위에서의 연산 $*$를 다음표와 같이 정하였다.

아래 표에서

$$\left.\begin{array}{l} 1*(1*0)=1*1=0 \\ 1*(1*a)=1*b=a \\ 1*(1*b)=1*a=b \\ 1*(1*1)=1*0=1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	a	b	0	0
1	1	b	a	0

그러므로 위 (28)은 $X=\{0, a, b, 1\}$ 위에서 involution을 보인 것이다. 그런데

$a*(a*b)=a*0=a$

$b*(b*a)=b*b=0$

$\therefore\ a\wedge b \neq b\wedge a$

$\therefore$ 이 BCK-代數는 非可換이다.

그러므로 非可換 BCK-代數에서도 對合인 경우는 存在한다.

<참고 문헌>

[1] K. Iséki: Some properties of BCK-algebras, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.* (1974)

[2] A. B. Thaheem: Remarks on commutative BCK-algebras, *Math. Sem. Netes,* 6 (1978)

[3] K. Iséki: BCK-algebras, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* (1976)

[4] K. Iséki: On some problemes on BCK-algebras, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.* (1979)

[5] S. M. Hong: *A notes on Griss-algebra,* Kyung Hee univ. (1979)

〈Abstract〉

In this note, I studied about involution on BCK-algebras, and solved a problem posed by K. Iséki [4].

The problem is following : Is there a non-commutative BCK-algebra satisfying $NNx=x$?