韓國數學敎育學會誌 <數學敎育>
1981. 6. Vol. XIX. No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1981. Vol. XIX No. 2

Matroid의 base의 성질에 관하여

김 연 식

1. 서 론

수학에서는 Set S가 주어질 때 matroid의 basic exchange axiom의 성질을 만족하는 S의 incomparable subset들의 어떤 non-empty family $\mathscr{B}$를 생각해야 할 경우가 종종 생긴다. 이를테면

(1) Noetherian module에서의 element들의 maximal independent set들의 family, (2) division ring 위에서의 finitc vector space의 base들의 family, (3) finite graph의 edge들의 vertex spanning circuit-free subset들의 famiy (4) relation R⊂S×X (S나 X 한 쪽은 finite set)로 결정되는 partial bijection(matching)들의 maximal support들의 family, (5) finite transcendence degree의 extension field K의 ground field k에 관한 transcendence base들의 family 등과 같다.

여기에서는 matroid의 basic exchange axiom에 관한 성질을 정리하고 이것을 사용하여 set exchange에 대한 정리를 증명하고자 한다.

2. 정 리

$\mathscr{P}(U)$에서의 두 set S와 T의 sum $S+T$를

$$S+T=\{x\,|\,x\in S\cup T,\ \ x\notin S\cap T\}$$

로 정의한다. 이 때 $S+T$는 U에서의 S의 complement를 나타낸다.

set S의 incomparable finite subset들의 non-empty family $\mathscr{B}$를 basic system이라고 하는 것은 임의의 $X, Y\in\mathscr{B}$와 임의의 $x\in X$에 대하여 $X+\{x,y\}\in\mathscr{B}$가 되는 $y\in Y$가 존재할 때를 말한다. 이 때 $\mathscr{B}$의 member를 base라고 말하고 x는 y로 exchange 된다고 말한다.

여기에서 $\mathscr{B}$의 incomparability에 의하여

$$x\in X+(X\cap Y)\text{이면 } y\in Y+(X\cap Y)$$

라고 가정할 수 있다.

보조정리 1 $\mathscr{B}$를 S 위에서의 basic system이라고 하자. 임의의 $X, Y\in\mathscr{B}$에 대하여 $|X|=|Y|$이다.

증명 임의의 $X, Y\in\mathscr{B}$에 대하여 $Y=X_0$, $X_0+(X_0\cap X)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$라고 놓고 induction을 사용하자. $x_i\in X_{i-1}+(X_{i-1}\cap X)$를 $y_i\in X+(X_{i-1}\cap X)$로 exchange 하면 $X_i=X_{i-1}+\{x_i, y_i\}$가 $\mathscr{B}$의 base가 된다. 이 때

$$|X_i|=|Y|\text{이고}$$

$$|X_{i-1}+(X_{i-1}\cap X)|=|X_i+(X_i\cap X)|+1$$

따라서 $X_n=X$ $\quad\therefore\ |Y|=|X_n|=|X|$

위의 1에 의하여 basic system $\mathscr{B}$는 base X가 common cardinality를 가지므로 이것을 $\mathscr{B}$의 dimension이라고 말하고 dim $\mathscr{B}$로 나타낸다.

보조정리 2 $\mathscr{B}$를 S 위에서의 basic system이라고 하고 S_1, S_2를 S의 disjoint subset라고 하자.

$$\mathscr{B}'=\{X\in\mathscr{B}\,|\,S_1\subset X,\ \ S_2\cap X=\phi\}$$

$$\mathscr{B}''=\{X+S_1\,|\,X\in\mathscr{B},\ \ S+S_2\supset X\supset S_1\}$$

가 non-empty이면 $\mathscr{B}'$는 S 위에서의 basic system이고 B″는 $S+(S_1\cup S_2)$ 위에서의 basic system이다. 이 때 $\dim\mathscr{B}''=\dim\mathscr{B}-|S_1|$이다.

증명 이것은 basic system의 정의에서 직접 증명된다.

위의 2에서 $\mathscr{B}''$를 $\mathscr{B}/S_1-S_2$로 나타내기로 한다.

보조정리 3 $\mathscr{B}$는 S 위에서의 basic system이다. 임의의 $X, Y\in\mathscr{B}$와 임의의 $x\in X$에 대하여 $X+\{x,y\}\in\mathscr{B}$이고 $Y+\{x,y\}\in\mathscr{B}$인 $y\in Y$가 존재한다.

증명 dim $\mathscr{B}$에 관한 induction을 사용하여 증명하자. dim $\mathscr{B}=1$인 때는 분명하므로 dim $\mathscr{B}=n-1$일 때 위의 정리가 성립한다고 가정하고 dim $\mathscr{B}=n$일 때도 성립한다고 주장하자.

임의의 $X, Y\in\mathscr{B}$와 임의의 $x\in X$에 대하여 x는 어떤 $y_1\in Y$와 exchange되므로 $X_1=X+\{x, y_1\}$는 $\mathscr{B}$의 base이다. 또 $y_1\in Y$이므로 y_1은 어떤 $x'\in X$와 exchange되므로 $Y_1=Y+\{y_1, x'\}$는 $\mathscr{B}$의 base이다.

$x=x'$일 때는 바로 성립하므로 $x\neq x'$일 때만 조사하면 된다.

$Y_1'=Y_1+x'=Y+y_1$, $X'=X+x'$라고 놓으면 Y_1'과 X'는 dimension $n-1$인 basic system $\mathscr{B}/x'$의 base가 된다.

따라서 induction hypothesis에 의하여 $x\in X'$에 대하여

$$\exists y_2\in Y_1',\ X'+\{x,y_2\}\in\mathscr{B}/x'$$
$$Y_1'+\{x,y_2\}\in\mathscr{B}/x'$$

곧 X'는 $X_2'=X+\{x,x',y_2\}$가 되고 Y_1'는 $Y_2'=Y+\{y_1,y_2,x\}$가 된다. 그러므로 $X_2=X+\{x,y_2\}$와 $Y_2=Y+\{y_1,y_2,x,x'\}$는 $\mathscr{B}$의 base이다. 그런데 $x'\in Y_2$이므로

$$\exists y'\in Y,\ Y_2+\{x',y'\}\in\mathscr{B}$$

또 $x'\in Y_2+(Y\cap Y_2)$이므로

$$\exists y'\in Y+(Y\cap Y_2)=\{y_1,y_2\}$$

따라서 $y'=y_1$이면 $Y_3=Y_2+\{x',y_1\}=Y+\{x,y_2\}$가 $\mathscr{B}$의 base이고 $y'=y_2$이면 $Y_4=Y_2+\{x',y_2\}=Y+\{x,y_1\}$이 $\mathscr{B}$의 base가 된다.

그러므로 X_2, Y_3이거나 X_1, Y_4에 의하여 정리가 증명되었다.

보조정리 4 S는 finite set이고 $\mathscr{B}$는 S 위에서의 basic system이다. 이 때 $\mathscr{B}'=\{S+X|X\in\mathscr{B}\}$는 S 위에서의 basic system이 된다.

증명 임의의 $X, Y\in\mathscr{B}'$와 임의의 $x\in X$에 대하여 $x\in Y$인 경우는 자명하므로 $x\notin Y$인 경우만 생각하자. 이 때는 $x\in S+Y\in\mathscr{B}$이므로 $((S+X)+y)\cup x\in\mathscr{B}$인 y가 $(S+X)+((S+X)\cap(S+Y))=Y+(X\cap Y)$ 안에 존재한다. 따라서 $\mathscr{B}'$는 S 위에서의 basic system이다.

보조정리 5 S는 $|S|=2k+1$인 set이다. $\mathscr{B}_1$이 dim $\mathscr{B}_1=k+1$이고, $X_1\cup Y_1=S$가 되는 $\mathscr{B}_1$의 base X_1, Y_1이 존재하는 basic system이고, $\mathscr{B}_2$가 dim $\mathscr{B}_2=k$이고 $X_2\cap Y_2=\phi$이 되는 $\mathscr{B}_2$의 base X_2, Y_2가 존재하는 basic system이라면 $Z_1\in\mathscr{B}_1$, $Z_2\in\mathscr{B}_2$가 존재하여 Z_1과 Z_2는 S의 partition이 된다.

증명 k에 관한 induction을 사용하여 증명한다. $k=0$일 때에는 자명하므로 $k=n-1$일 때 위의 정리가 성립한다고 가정하고 $k=n$일 때를 증명한다.

$|S|=2n+1$이라 하고 X_1, Y_1, X_2, Y_2는 위에서 말한 base들이라고 하자. 이 때

$$|X_1\cap Y_1|=1,\ |X_2\cup Y_2|=2n$$

따라서 $x=X_1\cap Y_1$, $y=S+(X_2\cup Y_2)$라고 하자.

(1) $x\neq y$인 경우

$X_1\cup Y_1=S$이므로 $y\in X_1+(X_1\cap Y_1)$이거나 $y\in Y_1+(X_1\cap Y_1)$이다. $y\in X_1+(X_1\cap Y_1)$라고 가정하자. 이 때,

$$\exists z\in Y_1+(X_1\cap Y_1),\ Y_1+\{z,y\}\in\mathscr{B}_1$$

이므로 $Y_1'=Y_1+\{z,y\}$라고 하자.

$$\therefore\ X_1\cap Y_1'=\{x,y\},\ S+(X_1\cup Y_1')=z$$

또 $S+(X_2\cup Y_2)=y\neq x$이므로 $x\in X_2+(X_2\cap Y_2)$이거나 $x\in Y_2+(X_2\cap Y_2)$이다. $x\in Y_2+(X_2 Y_2)$라고 가정하자. 이 때,

$$\exists\omega\in X_2+(X_2\cap Y_2),\ Y_2+\{x,\omega\}\in\mathscr{B}_2$$

이므로 $Y_2'=Y_2+\{x,\omega\}$라고 하자.

$$\therefore\ X_2\cap Y_2'=\omega,\ S+(X_2\cup Y_2')=\{x,y\}$$

따라서 보조정리 2에 의하여

$X_1+\{x,y\}$와 $Y_1'+\{x,y\}$는 disjoint이고 $S+\{x,y\}$ 위에서의 basic system $\mathscr{B}_2'=\mathscr{B}_1/\{x,y\}$의 dimension $n-1$인 base들이다. 이 때 $|S+\{x,$

$y\}|=2(n-1)+1$ 이다.

또 X_2, Y_2'는 disjoint 이고 basic system $\mathcal{B}_1'=\mathcal{B}_2-\{x,y\}$의 dimension n인 base 들이고, $X_2 \cup Y_2'=S+\{x,y\}$를 만족한다.

그러므로 induction hypothesis 에 의하여

$\exists Z_1'\in\mathcal{B}_1'$, $\exists Z_2'\in\mathcal{B}_2'$

Z_1'과 Z_2'는 $S+\{x,y\}$의 partition

따라서 $Z_1=Z_2'\cup\{x,y\}$, $Z_2=Z_1'$라고 놓으면

$Z_1\in\mathcal{B}_1$, $Z_2\in\mathcal{B}_2$

이고 Z_1, Z_2는 S의 partition 이다.

(2) $x=y$인 경우

$y'(\neq x)\in S$를 잡고 위의 (1)과 같은 방법을 사용하면 $X_1+\{x,y'\}$와 $Y_1'+\{x,y'\}$는 disjoint 이고 $\mathcal{B}_2'=\mathcal{B}_1/\{x,y'\}$의 dimension $n-1$인 base 들이고 또 X_2, Y_2'도 disjoint 이고 $\mathcal{B}_1'=\mathcal{B}_2-\{x,y'\}$의 dimemsion n인 base 들이다.

따라서 induction hypothesis 에 의하여

$\exists Z_1'\in\mathcal{B}_1'$, $\exists Z_2'\in\mathcal{B}_2'$:

Z_1', Z_2'는 $S+\{x,y'\}$의 partition

여기서 $Z_1=Z_2'\cup\{x,y'\}$, $Z_2=Z_1'$라고 놓으면 $Z_1\in\mathcal{B}_1$, $Z_2\in\mathcal{B}_2$이고 Z_1, Z_2는 S의 partition 이다.

정리 $\mathcal{B}$는 S 위에서의 basic system 이다. X, Y가 $\mathcal{B}$의 base 이고 $X'\subset X$라면 그 때에 $(X+X')\cup\bar{Y}$와 $(Y+\bar{Y})\cup X'$가 $\mathcal{B}$의 base 가 되는 Y의 subset $\bar{Y}$가 존재한다.

증명 $\mathcal{B}-(S+(X\cup Y))$를 생각하면 $S=X\cup Y$라고 가정해도 무방하므로 $k=|X'|$에 관한 induction 을 사용하여 증명한다. $k=1$일 때는 보조정리 3과 같으므로 자명하다. 따라서 위 정리가 모든 $k<n$에 대하여 성립한다고 가정하고 $|X'|=n$일 때 증명한다.

$x\in X'$라고 하면 $|X'+x|=n-1$이므로 induction 에 의하여 $X'+x\subset X$는 어떤 $Y'\subset Y$와 exchange 된다. 곧

$$X_1=(X+(X'+x))\cup Y',$$
$$Y_1=(X'+x)\cup(Y+Y')$$

는 base 이다.

또 $x\in X_1+(X_1\cap Y)$는 어떤 $y\in Y+Y'\subset Y+(X_1\cap Y)$와 exchange 되므로

$$X_2=(X+X')\cup(Y'\cup y),\quad Y_2=x\cup(Y+y)$$

는 base 가 된다.

X와 Y_2에 대하여 $X'+x\subset X+(X\cap Y_2)$는 어떤 $Y''\subset Y+y\subset Y_2+(X\cap Y_2)$와 exchange 되므로

$$X_3=(X+X')\cup x\cup Y'',$$
$$Y_3=X'\cup(Y+(Y''\cup y))$$

는 base 가 된다. 또 $y\in Y+(Y'\cup Y'')$이다.

이제 Y_1, Y_3에 대해서 생각하면 $y\notin Y'$이므로

$$Y_1+(Y_1\cap Y_3)=(Y''+(Y''\cap Y'))\cup y,$$
$$Y_3+(Y_1\cap Y_3)=(Y'+(Y'\cap Y''))\cup x$$
$$Y_1\cap Y_3=(X'+x)\cup(Y+(Y'\cup Y''\cup y))$$

따라서 $Y'+(Y'\cap Y'')\subset Y_3$는 어떤 $y'\in(Y''+(Y'\cap Y''))\cup y$에 대하여 $(Y''+(Y'\cap Y''))\cup y+y'\subset Y_2$와 exchange 되므로

$$X_4=X'\cup(Y+(Y'\cup Y''\cup y))\cup((Y''+(Y'\cap Y''))\cup y+y')$$
$$=X'\cup(Y+(Y'\cup y'))$$

는 base 가 된다.

같은 방법으로 X_2와 X_3에 대하여 생각하면

$$X_2+(X_2\cap X_3)=(Y'+(Y'\cap Y''))\cup y,$$
$$X_3+(X_2\cap X_3)=(Y''+(Y'\cap Y''))\cup x$$
$$X_2\cap X_3=(X+X')\cup(Y'\cap Y'')$$

따라서 $x\in X_3$는 어떤 $y''\in(Y'+(Y'\cap Y''))\cup y\subset X_2$와 exchange 되므로

$$Y_4=(X+X')\cup(Y''\cup y'')$$

는 base 가 된다.

$X_2\cap Y_4=(X+X')\cap(Y'\cap Y'')$와 $Y_3\cap X_4=X'\cup(Y+(Y'\cup Y''\cup y))$를 각각 U, V라고 놓고

$$\mathcal{B}_1=\mathcal{B}/U+(U\cap V),\quad \mathcal{B}_2=\mathcal{B}/V+(U\cap V)$$

라고 놓으면 보조정리 2게 의하여 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$는 $S'=(Y'+Y'')\cup y$ 위에서의 basic system 이 된다.

여기에서 $\mathcal{B}_1$은

$$Y_4'=Y_4+(U\cap Y_4)$$
$$=(Y''+(Y'\cap Y''))\cup y''$$
$$X_2'=X_2+(U\cap X_2)$$
$$=(Y'+(Y'\cap Y''))\cup y$$

인 base 를 갖고 $Y_4'\cap X_2'=y''$, $Y_4'\cup X_2'=S'$이 성립한다.

또 $\mathscr{B}_2$는

$$Y_3' = Y_3 + (V \cap Y_3) = Y' + (Y' \cap Y'')$$
$$X_4' = X_4 + (V \cap X_4)$$
$$= (Y'' + (Y' \cap Y'')) \cup y + y'$$

인 base를 갖고

$$Y_3' \cap X_4' = \phi, \quad Y_3' \cup X_4' = S' + y'$$

보조정리 5에 의하여

$$\exists Z_1' \in \mathscr{B}_1, \ \exists Z_2' \in \mathscr{B}_2 :$$

Z_1'과 Z_2'는 S'의 partition

그러므로 $Z_1 = Z_1' \cup U$, $Z_2 = Z_2' \cup V$라고 놓으면 Z_1과 Z_2는 disjoint인 $\mathscr{B}$의 base가 되고

$$Z_1 \cap X = X + X', \quad Z_2 \cap X = X'$$

따라서 $\bar{Y} = Z_1 \cap Y$라고 놓으면 $\bar{Y}$는 X'과 exchange 된다.

참 고 문 헌

[1] W. T. Tutte, *Introduction to theory of matroids*, American Elsevier, 1970.

[2] D. J. A. Welsh, *Matroid theory*, Academic Press, 1976.