韓國數學敎育學會誌 <數學敎育>
1981. 12, Vol. XX No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1981. Vol. XX No. 1

Computer 使用을 위한 Legendre 直交多項式을 利用한 近似함수

白 淸 鎬

1. 緖 論

우리 나라의 産業은 勞動集約的인 産業에서 頭腦集約的인 産業으로의 轉換을 要請하고 있으며, 1975年度 우리 나라 産業聯關表를 中心으로 調査한 바에 依하면, 情報産業部分의 附加價値率이 0.699로서 非情報産業部分의 0.346보다 높다[1]. 따라서 우리는 情報産業部分에서 Software의 開發問題를 重視하게 되고 또한 이에는 數學的 理論을 背景으로 하는 數値解析的 接近方法이 不可缺하게 되었다.

이러한 趣旨에서 本 論文은 Legendre 直交多項式을 利用하여 有限個의 平面上의 點 (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$의 近似함수를 推定하는 問題를 FORTRAN 프로그램에 依한 數値解析的 接近을 試圖하고 그 結果는 補間法에 應用될 수 있도록 하였다.

近似함수를 求하는 데 使用할 수 있는 直交多項式은 Legendre 多項式, Laguerre 多項式, Hermite 多項式, Chebyshev 多項式, Gram 多項式 等이 있으나[2], 本 論文에서는 事前誤差 및 컴퓨터에 依한 數値計算誤差의 發生기회가 비교적 적은 Legendre 直交多項式을 使用하였으며, 近似함수의 推定에 必要한 積分은 컴퓨터에 依한 計算을 위해서 Newton Cotes의 求積公式을 使用하였고, 元來의 함수는 各區間別 線型으로 推定하였고, 定義區域의 變換은 一次變換을 하였다.

2. 直交多項式의 定義 및 生成

區間 $[a, b]$에서 定義되는 함수 $\phi_i(x)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$가 있을 때 weighting function $\omega(x)\geqq 0$에 對하여 $\int_a^b \omega(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx=0$ (단, $i\neq j$)의 性質을 滿足하는 x에 關한 i次 多項式 $\phi_i(x)$를 直交多項式이라 定義한다[3].

$\phi_r(x)$가 直交多項式이면 $\int_a^b \omega(x)\phi_r(x)q_{r-1}(x)dx=0$ (단 $q_{r-1}(x)$는 r次 未滿의 任意의 多項式)

$$\omega(x)\phi_r(x)=d^r U_r(x)/dx^r=U_r^{(r)}(x)$$

라 하면

$$\int_a^b U_r^{(r)}(x)q_{r-1}(x)dx=0$$

이며 이는 部分積分에 依해서

$$\begin{aligned}&[U_r^{(r-1)}q_{r-1}-U_r^{(r-2)}q_{r-1}'\\&\quad+U_r^{(r-3)}q_{r-1}''-\cdots\\&\quad+(-1)^{r-1}U_r q_{r-1}^{(r-1)}]_a^b=0\end{aligned} \tag{1}$$

따라서

$$\begin{aligned}\phi_r(x)&=1/\omega(x)\cdot d^r U_r(x)/dx^r\\&=1/\omega(x)\cdot U_r^{(r)}(x)\end{aligned} \tag{2}$$

즉 (2)式은 直交多項式을 生成하는 公式이며 이는 區間 $[a, b]$에서 微分方程式

$$\begin{aligned}&\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}[\phi_r(x)]\\&=\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\left[\frac{1}{\omega(x)}\cdot\frac{d^r U_r(x)}{dx^r}\right]=0\end{aligned} \tag{3}$$

을 滿足시켜야 한다. (1)式은 任意의 $q_{r-1}(a)$, $q_{r-1}(b)$, $q_{r-1}'(a)$, $q_{r-1}'(b), \cdots$에 對하여도 成立하여야 하므로

1) 安文錫, "經濟發展과 情報産業", (1980年 11月號), 全經聯 情報産業協議會 發刊, pp. 8~10.
2) F. B. Hilderbrand (1956), "Introduction to Numerical Analysis," New-York Toronto London McGraw-Hill Book Company, Inc., pp. 272~291.
3) 同 p. 260.

$$U_r(a)=U_r'(a)=U_r''(a)=\cdots$$
$$=U_r^{(r-1)}(a)=0,$$
$$U_r(b)=U_r'(b)=U_r''(b)=\cdots$$
$$=U_r^{(r-1)}(b)=0 \tag{4}$$

의 $2r$ 個의 制限條件이 生成된다.

直交多項式 $\phi_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$의 一次結合으로서의 近似함수 $y(x)$는 元來의 함수 $f(x)$에 對하여 $\int_a^b \omega(x)[f(x)-y(x)]^2dx$ 의 값이 最小가 되는 條件下에서

$$y(x)=\sum_{r=0}^{n} A_r\phi_r(x) \tag{5}$$

로 表現하면

$$\int_a^b \omega(x)f(x)\phi_r(x)dx$$
$$=\int_a^b \omega(x)[\sum_{r=0}^{n} A_r\phi_r(x)]\phi_r(x)dx$$
$$=\int_a^b \omega(x)A_r\phi_r^2(x)dx$$

에서

$$A_r=\frac{\int_a^b \omega(x)f(x)\phi_r(x)dx}{\int_a^b \omega(x)\phi_r^2(x)dx} \tag{6}$$

(6)式의 分母를 γ_r 라 하고 $\phi_r(x)=a_{r0}+a_{r1}x+\cdots+a_{rr}x^r$ 라 하면

$$\gamma_r=\int_a^b \omega(x)\phi_r(x)\,[a_{r0}+a_{r1}x+\cdots+a_{rr}x^r]dx$$
$$=a_{rr}\int_a^b x^r\omega(x)\phi_r(x)dx$$
$$=a_{rr}\int_a^b x^rU_r(x)dx$$

이고 이를 r 번 部分積分하여 (4)式의 條件을 適用하고 $a_{rr}=a_r$ 라 하면

$$\gamma_r=(-1)^r r!\,a_r\int_a^b U_r(x)dx \tag{7}$$

3. 誤差解析

Legendre's principle of least squres[4]에 依하면 "定義區域 D 內에서 아주 正確하거나 或은 같은 程度의 信賴度를 갖는 資料에 對한 最適의 近似는 誤差제곱의 合이 最小인 경우"이다.

一般的으로 誤差의 根源은 事前誤差(Inherent error), 解析的 誤差(Analytic error), 컴퓨터에 依한 數値計算時 반올림에 依한 誤差(Round-off error)의 세가지가 있다[5].

定義區域 D 에서 $n+1$ 個의 離散點 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 에 對應하는 함수값 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 이 모두 正確하거나 或은 같은 程度의 信賴度를 갖고 있음을 假定하면 $\omega(x)=1$ 로 할 수 있다. 따라서 元來의 함수 $f(x)$에 對한 近似함수 $y(x)$의 近似의 測度를 各 絕對誤差의 相對誤差의 算術平均 (Absolute Relative Error Mean),

$$\mathrm{AREM}=\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{|y(x_i)-f(x_i)|}{f(x_i)}\right]\times\frac{1}{n+1}$$

로 定義하였다. 이는 近似의 精度를 하나의 數値로 表現하려는 意圖와 誤差의 偏差를 위해 絕對값을 取했고 資料에 對한 精度를 위해 그 相對誤差의 算術平均을 取하였다.

4. 近似함수의 誘導

함수값 $y_i=f(x_i)$에 對한 weighting function $\omega(x_i)=1$ 이면 (3)式에서 $d^{2r+1}U_r(x)/dx^{2r+1}=0$ 이고 (4)式은

$$U_r(\pm1)=U_r'(\pm1)=\cdots=U_r^{(r-1)}(\pm1)=0$$

이 되어 $U_r=C_r(x^2-1)^r$ (단 C_r 은 任意의 常數)라 하면 (2)式에서

$$\phi_r(x)=C_r\frac{d^r}{dx^r}(x^2-1)^r$$

이고 이 때 $C_r=1/(2^r r!)$로 해서 얻어지는 多項式을 r 次의 Legendre 直交多項式이라 定義하고 이것을 $P_r(x)$라 하면

$$P_r(x)=\frac{1}{2^r r!}\,\frac{d^r}{dx^r}(x^2-1)^r$$

이며 이의 recurrence formula는

$$P_{r+1}(x)=\frac{2r+1}{r+1}xP_r(x)$$
$$-\frac{r}{r+1}P_{r-1}(x) \tag{8}$$

단, $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$

(8)式의 값을 컴퓨터로 구하려면 IBM 社에서 開發한 package를 使用할 수 있다[6].

4) 同 p. 259.
5) 金慶波, 金泰富 (1977), "數値解析", 塔出版社, pp. 162～164.
6) IBM, "IBM Application Program System/360 Scientific Subroutine Package Version Ⅲ," pp. 212～213.

한편,

$$P_r(x)=\frac{1}{2^r r!}\cdot\frac{d^r}{dx^r}(x^{2r}-rx^{2r-2}+\cdots\cdots)$$
$$=\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}x^r-\cdots\cdots$$

에서 x^r 의 係數는 $a_r=\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}$ 이므로 (7)式에서

$$\gamma_r=\frac{(2r)!}{2^r r!}\cdot\frac{1}{2^r r!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^r dx$$
$$=\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\ \frac{2^{2r+1}(r!)^2}{(2r+1)!}=\frac{2}{2r+1}$$

따라서

$$A_r=\frac{2r+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_r(x)dx\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

이고 近似함수는

$$y(x)=\left[\sum_{r=0}^{n}\frac{2r+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_r(x)dx\right]P_r(x)$$

이다.

變數 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 가 포함된 區間 D 를 $[-1, 1]$로 變換하기 위해 $\mathrm{Min}\{x_i\}=x_0$, $\mathrm{Max}\{x_i\}=x_n$ 라 하고, x_0 는 -1 에, x_n 는 1에 對應하는 一次變換으로 D 內의 x_i 에 對應되는 變換된 값을 x_i' 라 하면

$$x_i'=\frac{2}{x_n-x_0}(x_i-x_0)-1$$

이다.

座標 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$의 一次變換에 依한 座標 $(x_0', y_0), (x_1', y_1), \cdots, (x_n', y_n)$로 된 元來의 함수 $f(x)$를, $f(x)=f_i(x)=a_ix+b_i$ (단 $x_i'\leqq x\leqq x'_{i+1}$, $i=0, 1, 2, \cdots, n-1$)과 같이 各 區間別 線型으로 推定하면 $f_i(x)$는 點 (x_i', y_i), (x'_{i+1}, y_{i+1})을 지나므로

$$a_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{x'_{i+1}-x_i'},\quad b_i=\frac{x'_{i+1}y_i-x_i'y_{i+1}}{x'_{i+1}-x_i'}$$

이다. 또한 (9)式의

$$A_r=\frac{2r+1}{2}\cdot\sum_{i=0}^{n}\int_{x'_i}^{x'_{i+1}}f_i(x)P_r(x)dx$$

따라서 近似함수는

$$y(x)=\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{2r+1}{2}\sum_{i=0}^{n}\int_{x'_i}^{x'_{i+1}}f_i(x)P_r(x)dx\right]P_r(x) \tag{10}$$

(단, $-1\leqq x_i'$, $x'_{i+1}\leqq 1$)

(10)式의 컴퓨터에 依한 積分計算은 Newton Cotes의 積分公式 Q_{66}을 使用한다[7].

Q_{66}:

$$\int_{x_0}^{x_6}f(x)dx=\frac{h}{140}[41f(x_0)+216f(x_1)$$
$$+27f(x_2)+272f(x_3)+27f(x_4)$$
$$+216f(x_5)+41f(x_6)]$$
$$-\frac{9}{1400}h^9f^{(8)}(\xi)$$

$$\left(\text{단},\ x_0<\xi<x_6,\ h=\frac{1}{6}(x_6-x_0)\right)$$

따라서 $\{(x_i, y_i)\,|\,i=0, 1, \cdots, n\}$에의 近似함수는

$$y(x)=\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{2r+1}{2}\cdot\frac{h}{140}\sum_{i=0}^{n}\{41F(\alpha_0)\right.$$
$$+216F(\alpha_1)+27F(\alpha_2)+272F(\alpha_3)$$
$$+27F(\alpha_4)+216F(\alpha_5)$$
$$\left.+41F(\alpha_6)\}\right]P_r(x)$$

단,

$$P_{r+1}(x)=\frac{2r+1}{r+1}xP_r(x)-\frac{r}{r+1}P_{r-1}(x),$$
$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x$$
$$F(\alpha_j)=(a_i\alpha_j+b_i)P_r(\alpha_j)\quad (j=0, 1, \cdots, 6)$$
$$h=\frac{x'_{i+1}-x'_i}{6},\quad x_i'=\alpha_0,\quad x'_{i+1}=\alpha_6,$$
$$\alpha_j=\alpha_0+jh$$
$$x_i'=\frac{2}{x_n-x_0}(x_i-x_0)-1\quad (i=0, 1, \cdots, n)$$
$$a_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}'-x_i'},\quad b_i=\frac{x_{i+1}'y_i-x_i'y_{i+1}}{x_{i+1}'-x_i'}$$

5. 結 論

理論的으로, 주어진 資料에 對하여 使用되는 Legendre 直交多項式의 次數를 높일수록 適合度가 좋지만, 實際의 테스트에 依하면 資料의 數가 n 雙일 때에 $P_r(x)$의 次數가 $r=\frac{3}{2}n$ 近傍일 때 適合度가 제일 좋은 結果를 보였으며, 함수값 y_i 의 偏差가 클수록 "AREM"의 값이 커져서 適合度가 낮아지게 되었다.

앞으로 硏究開發되는 모든 프로그램에 對한 package化는 다음과 같은 方法과 順序로 文書化되어 作成될 것이 要望된다.

7) Kaiser S. Kunz (1957), "Numerical Analysis," Mc-Graw-Hill Book Company, Inc., pp. 145~147.

1) 프로그램의 理論的 背景
2) 프로그램의 解析的 理論
3) 프로그램의 모델 作成
4) 一般的 흐름도
5) 프로그램의 테스트 例示
6) 카드 配列 順序
7) 使用者의 프로그램 利用 方法
※ Program 및 Test 결과는 지면관계상 생략한다.

參考文獻

1. 金慶泰, 金泰富, "數値解析", 塔出版社, 1977.
2. 金悳鎭, "컴퓨터 프로그래밍", 電波科學社, 1977.
3. 安思明, "電子計算理論", 敎文社, 1977.
4. F. B. Hilderbrand, "*Introduction to Numerical Analysis*", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.
5. Kaiser S. Kunz, "*Numerical Analysis*", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957.
6. IBM, "*System*/360 *Scientific Subroutine Package Version* Ⅲ."
7. Householder, Alston S., "*Principles of Numerical Analysis*", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.