韓國數學敎育學會誌 <數學敎育>
1981. 12. Vol. XX No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1981. Vol. XX No. 1

初等函數 範圍內에서 積分可能한 函數의 判別에 關하여

胡 文 龍

I. 序 論

初等函數의 不定積分이 初等函數가 아닌 函數가 되는 경우는 初等微積分學에서 취급된다. 그러나 初等函數의 不定積分이 初等函數가 되기 위한 條件을 구하는 問題의 제기는 初等微積分學에서 되었지만 完全한 解答을 얻으려면 그 範圍를 넘어야 한다. 이러한 問題는 *J. Liouville* 가 1833年과 1840年사이에 發表한 一聯의 論文에서 처음으로 취급 되었으며 그 以後의 硏究結果는 *Ritt*〔6〕에 정리 기록되어 있다.

本論文에서는 *Liouville* 의 定理의 特殊한 경우를 證明하고 그 應用例를 提示하고자 한다.

II. 初等函數의 定義와 構造

變數 x 의 代數演算, 指數演算 또는 로그演算 (이때 指數와 로그의 밑은 e)만을 反復使用하여 얻은 函數를 初等函數라 한다. 代數演算을 明確히 하기 위하여 代數函數를 다음과 같이 定義한다.

定義 1. 旣約方程式

$a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n=0$ (단, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 은 x 의 多項式, $a_0\neq0$)을 만족하는 y 를 x 의 代數函數라 한다.

그런데 一般的으로 代數函數는 多價函數이므로 위의 定義 1을 써서 初等函數의 不定積分問題를 취급하려면 分枝點, *Riemann* 曲面 또는 複素變數에 關한 問題들을 考慮해야 하므로 複雜하다. 이를 피하기 위하여 初等函數를 다음과 같이 定義한다.

定義 2. 變數 x 의 代數演算, 指數演算 또는 로그演算만을 使用하여 y 를 x 의 陽函數로 表示할 수 있을 때에 限하여 y 는 x 의 初等函數이다.

이 경우 代數演算이란 有理演算과 累乘根의 展開를 말하나 累乘根의 展開는 $x^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\log x}$ 와 같이 有理演算, 指數 또는 로그演算의 結合으로 代置可能하므로 생각하지 않아도 되겠다.

앞으로 初等函數를 위의 定義 2와 같은 좁은 의미에서 考察하고자 한다.

定義 3. 共通의 有限區間에서 部分的으로 微分可能한 函數들의 集合 D 가 代數體를 이루고, $\alpha\in D$ 이면 $\alpha'\left(=\frac{d\alpha}{dx}\right)\in D$ 일 때 D 를 微分體라 한다.

$K=\{a\in D|a'=0\}$ 는 微分體이고 이를 D 의 常數體라고 한다.

D 가 F 의 微分部分體일 때 $F=D(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$이고 그의 各元 θ_i 가

(i) θ_i 는 $D(\theta_1, \cdots, \theta_{1-1})$ 위에서 代數的이다.

(ii) $D(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$의 元 f에 對하여 $\frac{\theta_i'}{\theta_i}=f'$ 이다. (指數 경우)

(iii) $D(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$의 元 f에 對하여 $\frac{f'}{f}=\theta_i'$ 이다. (로그경우)

위의 (i)(ii)(iii)중 적어도 하나를 만족할 때 限해서 F 는 D 위에서 初等擴大體가 된다고 한다. 만일 (ii) 또는 (iii)에서 θ_i 가 $D(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$에서 超越的이고 $D(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$의 常數體가 $D(\theta_1, \cdots, \theta_i)$의 常數體와 一致하면 θ_i 는 $D(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$ 위에서 單項式이다. 만일 各 θ_i 는 $D(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$ 위에서 代數的이거나 單項式이면 F 는 D 위에서

正則初等擴大體이다. 이것을 一般化하면 $F=D(\theta_1, \cdots, \theta_n)$은 $F=D(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$의 單純正則初等擴大體가 된다.

Ⅲ. 微分體에 關한 定理

單純正則初等擴大體에 屬하는 元의 微分을 考慮하자. D를 微分體, θ를 D 위에서 單項式이라 하자.

(1) $P\in D[\theta]$, $P=A_n\theta^n+A_{n-1}\theta^{n-1}+\cdots+A_0$, $A_i\in D$, $A_n\neq 0$이라 하자.

(i) $\theta=\log f$인 경우 :

$P'=A_n'\theta^n+\left(A_{n-1}'+nA_n\frac{f'}{f}\right)\theta^{n-1}+\cdots\cdots+\left(A_0'+A_1\frac{f'}{f}\right)$이다. 여기서 만일 $A_n'\neq 0$이면 P'은 次數 n인 $D[\theta]$의 元이고, 만일 $A_n'=0$이면 $A_{n-1}'+nA_n\frac{f'}{f}\neq 0$이므로 P'의 次數는 $n-1$이다. $\left(\because\ A_{n-1}'+nA_n\frac{f'}{f}=0\right.$이면 $(A_{n-1}+nA_n\theta)'=nA_n\theta'+A_{n-1}'=0$이므로 $A_{n-1}+nA_n\theta$는 常數이고 D의 元이다. 곧, $\theta\in D$이다. 이는 θ가 D 위에서 單項式이라는 假定에 矛盾)

(ii) $\theta=e^f$인 경우 :

$P'=(A_n'+nf'A_n)\theta^n+(A_{n-1}'+(n-1)f'A_{n-1})\theta^{n-1}+\cdots+(A_1'+f'A_1)\theta+A_0'$이다. 여기서 $A_n'+nf'A_n\neq 0$ ($\because$ $A_n'+nf'A_n=0$이면 $(A_n\theta^n)'=0$이므로 $A_n\theta^n$은 常數이고 D의 元이 된다. 이는 θ가 D 위에서 單項式이라는 假定에 矛盾)이므로 P'의 次數는 P의 次數와 같다.

(2) $P, Q\in D[\theta]$, Q는 最高次項의 係數가 1인 既約多項式이고 P의 次數 p는 Q의 次數 q보다 작다고 하자.

$$\left(\frac{P}{Q^n}\right)'=-\frac{nPQ'}{Q^{n+1}}+\frac{P'}{Q^n}$$

(i) $\theta=\log f$인 경우 :

(1)에서 Q'의 次數는 $q-1$이므로 $Q\nmid -nPQ'$이다($\because$ $Q|-nPQ'$이라면 $Q|P$ 또는 $Q|Q'$이어야 한다. 이는 不可能). 따라서 $\left(\frac{P}{Q^n}\right)'$의 部分分數 分解는 $\frac{R}{Q^{n+1}}+\frac{S}{Q^n}(R\neq 0)$의 꼴이다.

(ii) $\theta=e^f$인 경우 :

$Q|-nPQ'$라 하자. $Q\nmid P$이므로 $Q|Q'$이어야 한다. $Q=\theta^q+\cdots$이므로 $Q'=qf'\theta^q+\cdots$, $Q'=qf'Q$. 그러므로 $Q=(e^f)^q=\theta^q$.

Q는 既約多項式이므로 $q=1$이고 $P\in D$.

따라서 $\left(\frac{P}{Q^n}\right)'$의 部分分數 分解는 $Q\neq\theta$이면 $\frac{R}{Q^{n+1}}+\frac{S}{Q^n}(R\neq 0)$, $Q=\theta$이면 $\frac{P'-nf'P}{Q^n}$ $(P'-nf'P\neq 0)$의 꼴이다.

(3) $P\in D[\theta]$, P는 最高次項의 係數가 1이고 次數가 p인 多項式이라 하자.

(i) $\theta=\log f$인 경우 :

$(\log P)'=\frac{P'}{P}$, P'의 次數는 $p-1$.

(ii) $\theta=e^f$인 경우 :

$(\log P)'=\frac{P'}{P}=\frac{N}{P}+pf'$, $N=P'-pf'P$

$P=\theta^p$의 경우에 $N=0$이고 다른 경우에는 N은 p보다 次數가 작은 多項式이다.

Ⅳ. Liouville의 定理의 證明

Liouville의 定理를 證明하기 위하여는 이미 밝혀진 다음 補助定理가 必要하다.

補助定理 1. $D(\theta)$가 體 D의 單純擴大體일 때 θ가 D 위에서 超越的이면 $D(\theta)$는 D에 係數를 가지는 1變數有理函數體와 同型이다. 또 θ가 D 위에서 代數的이면 $D(\theta)$는 θ의 最小多項式 $f(x)$로 生成되는 ideal $(f(x))$를 法으로 하는 多項式環 $D[x]$의 剩餘環 $\frac{D[x]}{(f(x))}$와 同型이다.

補助定理 2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$이 體 D의 적당한 代數的 閉包에서 α의 共軛이라면 α의 Norm $\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n$ 및 Trace $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$은 D에 속한다.

定理 1. Liouville의 定理

微分體 D에 속하는 函數 α에 대하여, 方程式 $y'=\alpha$가 같은 常數體를 가지는 D의 어떤 初等擴大體안에서 解를 가지면

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}+v' \cdots\cdots ①$$

이 되는 常數 $c_1, \cdots, c_n \in D$ 와 元 $u_1, \cdots, u_n,\ v \in D$ 가 存在한다.

證明 假定에서 微分體의 列

$$D \subset D(\theta_1) \subset \cdots \subset D(\theta_1, \cdots, \theta_N)$$

이 存在하여 적당한 $y \in D(\theta_1, \cdots, \theta_N)$에 대하여 $y'=\alpha$ 가 된다.

단, θ_i 는 $D(\theta_1, \cdots, \theta_{i-1})$ 위에서 代數的이거나 單項式이다.

N에 關한 歸納法을 써서 證明하자.

(i) $N=0$ 일 때 : $\alpha=v'$ 이라 놓으면 明白하게 成立한다.

(ii) $N>0$ 이라 하고 $N-1$ 일 때 定理가 成立한다고 假定하자. $N-1$ 인 경우 위의 定理를 體 $D(\theta_1) \subset D(\theta_1, \cdots, \theta_N)$에 적용하면 적당한 $u_1, u_2, \cdots, u_n,\ v \in D(\theta_1)$에 대하여 α 를 ①의 꼴로 쓸 수 있다. 卽 $\theta_1=\theta$ 라 놓으면 θ 는 D 위에서 代數的이거나 單項式이고

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}+v'$$

이 된다. 단, $c_1, \cdots, c_n$ 은 D 의 常數, $u_1, u_2, \cdots, u_n,\ v \in D(\theta)$.

이제 D 에 속하는 $u_1, \cdots, u_n,\ v$(n 은 달라질 수 있다)에 대하여 α 를 위와 같은 모양으로 表示可能함을 보이면 된다.

먼저 θ 를 D 위에서 代數的이라 하자. 그러면 D 위에서의 적당한 多項式 $U_1, \cdots, U_n, V \in D[X]$ 에 대하여 $U_1(\theta)=u_1, \cdots, U_n(\theta)=u_n,\ \ V(\theta)=v$ 로 된다.

$\tau_1(=\theta),\ \tau_2, \cdots, \tau_s$ 를 D 위에서 θ 의 서로 다른 共軛이라 하면

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(\tau_j))'}{U_i(\tau_j)}+(V(\tau_j))'$$

(단, $j=1, 2, \cdots, 3$)

이 式의 兩邊에 演算 $\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}$ 를 施行하면

$$\alpha=\sum_{i=1}^{s} \frac{c_i}{s}\ \frac{(U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_s)} + \left(\frac{V(\tau_1)+\cdots+V(\tau_s)}{s}\right)'$$

그런데 $U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_s)$과 $V(\tau_1)+\cdots+V(\tau_s)$는 각각 $U_i(\tau_1)$의 Norm 과 $V(\tau_1)$의 Trace 이므로 D 의 元이다($\because$ 補助定理 2).

따라서 α 는 ①의 꼴로 表示된다.

다음에 θ 를 D 위에서 單項式이라 하자. 그러면 $D(\theta)$에 속하는 적당한 $u_1(\theta), \cdots, u_n(\theta), v(\theta)$에 대하여

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(\theta))'}{u_i(\theta)}+(v(\theta))'$$

로 表示된다. 그러나 各 $u_i(\theta)$의 分母, 分子를 $D[\theta]$에서 各 因數의 最高次項의 係數가 1이 되게 素因數分解를 한 다음에 演算 $\frac{d}{d\theta}\log$ 를 시행하면 $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(\theta))'}{u_i(\theta)}$은 꼭 같은 꼴로 表示可能하다. 단, 變形된 式에서의 各 $u_i(\theta)$는 D에 屬하거나 $D[\theta]$에서 最高次項의 係數가 1인 旣約多項式으로 된다. 따라서 $u_1(\theta), \cdots, u_n(\theta)$는 D의 서로 다른 元 또는 $D[\theta]$에서 最高次項의 係數가 1인 旣約多項式이라 하여도 一般性을 잃지 않는다. $v(\theta)$를 部分分數로 分解하여 $D[\theta]$ 위에서의 多項式과 $\frac{g(\theta)}{(f(\theta))^r}$($f(\theta)$는 最高次項의 係數가 1인 旣約多項式이고 r은 陽의 整數이며, $g(\theta)$는 次數가 $f(\theta)$의 次數보다 낮은 0이 아닌 多項式)의 꼴의 分數式의 合으로 表示되었다고 하자. 여기서 다시 두 경우로 나누어 생각하자.

첫째로, $\theta=\log f,\ f \in D$ 인 경우 : $f(\theta)$가 最高次項의 係數가 1인 旣約多項式이라 하면 Ⅲ 의 (2)에 의하여 $f(\theta) \nmid f'(\theta)$.

따라서 $u_i(\theta)=f(\theta)$이면 $\frac{(u_i(\theta))'}{u_i(\theta)}$는 分母가 $f(\theta)$인 分數式이다. 또 $v(\theta)$의 部分分數分解에서 $\frac{g(\theta)}{(f(\theta))^r}$ (단, r은 陽의 整數이고 $g(\theta)$의 次數가 $f(\theta)$의 次數보다 낮다)의 項이 나타났다고 假定하고 r이 $f(\theta)$에 對한 그 最大次數라 하자. 그러면 $(v(\theta))'$은 Ⅲ 의 (2)에 의하여

$$\left(\frac{g(\theta)}{(f(\theta))^r}\right)'=\frac{(g(\theta))'}{(f(\theta))^r}-\frac{rg(\theta)(f(\theta))'}{(f(\theta))^{r+1}}$$

꼴의 項을 포함하고 실제로 分母에 $f(\theta)$인 因數를 갖는 項중 $r+1$은 最高次數가 된다

($\because$ $(f(\theta))^{r+1}\nmid rg(\theta)(f(\theta))^r$). 따라서 $f(\theta)$가 $v(\theta)$의 部分分數展開에서 分母에 나타나면 $f(\theta)$는 α의 分母에도 나타나게 된다. α는 θ를 포함하지 않는 式이므로 이것은 矛盾이다. 따라서 $v(\theta)$의 分母에는 $f(\theta)$라는 因數가 있을 수 없고 또 $f(\theta)$는 $u_i(\theta)$의 어느 것과도 같을 수도 없다. $f(\theta)$는 任意의 既約多項式이므로 $u_i(\theta)\in D, v(\theta)\in D[\theta]$로 된다. 또 $(v(\theta))'\in D$이어야 하므로 $v(\theta)=c\theta+d$ (단, c는 常數, $d\in D$). 그러므로

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{u_i'}{u_i}+c\frac{f'}{f}+d'$$

卽, α는 ①의 꼴로 表示되었다.

다음에, $\theta=e^f$, $f\in D$인 경우 : $f(\theta)$가 $f(\theta)\neq\theta$인 最高次項의 係數가 1인 既約인 $D[\theta]$의 元이라 하면 Ⅲ의 (2)에 의하여 $(f(\theta))'\in D[\theta]$이고 $f(\theta)\nmid f'(\theta)$. 따라서 위의 證明에서와 꼭같이 하여 $f(\theta)$는 $v(\theta)$의 分母의 因數가 될 수 없음을 알 수 있고 $u_i(\theta)$의 어느 것과도 같지 않음을 알 수 있다. 따라서

$$v(\theta)=\sum_j a_j\theta^j$$

(단, $a_j\in D$, j는 整數의 有限集合안에서 變動한다.)

로 表示된다. 또 各 $u_i(\theta)$는 D의 元이거나 이들중 꼭 하나만이 θ가 되어야 한다. 여기서 모든 $u_i(\theta)$가 D의 元이면 이미 α는 원하는 꼴로 表示된다. 만일 $u_i(\theta)$ 중 꼭 하나 이를테면, $u_1(\theta)=\theta$이고, $u_2(\theta),\cdots,u_n(\theta)\in D$이면

$$\alpha=c_1f'+\sum_{i=2}^{n} c_i\frac{u_i'}{u_i}+v'$$

$$=\sum_{i=2}^{n} c_i\frac{u_i'}{u_i}+(c_1f+v)'$$

여기서 $u_2,u_3,\cdots,u_n$, $c_1f+v\in D$이므로 定理의 證明이 完結되었다.

V. 應 用

初等函數의 積分可能性에 對한 Liouville의 定理의 特殊한 경우인 다음 定理를 얻을 수 있다.

定理 2. 微分體 D의 元 α,β에 對하여 $e^{n\alpha}(n=1,2,\cdots)$가 D에 속하지 않을 때 $\gamma=\int\beta e^\alpha$가 D 위에서 初等일 必要充分條件, 卽 D의 初等擴大體에 속할 必要充分條件은 $\delta\in D$가 存在하여

$$\beta=\delta'+\delta\alpha'$$

로 되는 것이다.

證明 必要條件 : $e^\alpha=\theta$라 두면 $e^\alpha\beta=\theta\beta\in D(\theta)$이다. 定理 1에 의하여

$$\theta\beta=\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{u_i'}{u_i}+v'$$

로 쓸 수 있다. 여기서 $c_1,\cdots,c_n$은 常數이고 $u_1,\cdots,u_n$, $v\in D(\theta)$이다.

各 u_i를 $D[\theta]$에서 素因數分解한 뒤 演算 $\frac{d}{d\theta}\log$를 시행하므로서 D에 속하지 않는 u_i는 서로 다르고 最高次項의 係數가 1이며 既約인 $D[\theta]$의 元이라 하여도 一般性을 잃지 않는다. v가 $D[\theta]$에서 部分分數로 分解되었다고 하자. 이 때 分解된 分母에 나타날 수 있는 最高次項의 係數가 1이고 既約인 因數는 Ⅲ의 (2)에 依하여 θ일 수 밖에 없고 D에 속하지 않는 u_i도 θ이어야 한다. 따라서 v는 $\sum b_j\theta^j$의 모양으로 된다. 단, j는 整數의 部分集合안에서 變動하고 $b_j\in D$이다. 또 $\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{u_i'}{u_i}\in D$이므로 $\theta\beta=(b'+b_1\alpha')\theta$이다.

여기서 $b_1=\delta$라 두면 $\beta=\delta'+\delta\alpha'$, $\delta\in D$를 얻는다.

充分條件 : : $\beta=\delta'+\delta\alpha'$을 만족하는 $\delta\in D$가 存在한다고 하자. 그러면

$$\gamma=\int\beta e^\alpha=\int(\delta'+\delta\alpha')e^\alpha=\delta e^\alpha+(\text{常數})$$

따라서 γ는 D의 初等擴大體에 속한다(證明 끝).

이제 위의 定理 2를 利用하여 初等函數의 不定積分이 初等函數로 되는가의 問題를 函數의 例를 들어 考察하고자 한다. 考察에 앞서 다음 定理를 想起하기로 한다.

定地 3. 多項式 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 $r(>0)$ 重根을 갖는다면 $f'(x)$는 $r-1$ 重根을 갖는다. 卽 $f(x)=(x-\alpha)^rh(x)$ $(r>0$, $h(x)$는 $h(\alpha)\neq0$인 多項式)이면 $f'(x)=(x-\alpha)^{r-1}k(x)$ $(k(\alpha)\neq0)$이다.

먼저 實變數函數에 對한 例를 考察하자.

例 1 e^{-x^2}

만일 $\int e^{-x^2}dx$가 初等函數라면 $\int e^{-x^2}dx=Re^{-x^2}$을 만족시키는 x의 有理函數 R이 存在한다. 定理 2의 條件을 생각하여

$1=R'-2xR,\ R=\dfrac{P}{Q}$ (P,Q는 서로 素이고 $Q\neq0$)라 두자.

위의 두 식에서

$$Q^2=QP'-PQ'-2xPQ \qquad (1.1)$$

다시 整理하면

$$Q(Q-P'+2xP)=-PQ' \qquad (1.2)$$

Q의 次數가 陽의 整數라면 $Q=0$는 根을 가진다. α를 그 根이라 하고 그 根의 重複度를 r (>0)라 하면 P,Q가 서로 素이므로 $P(\alpha)\neq0$이다. 지금 (1,2)식의 左邊의 根의 重複度는 r보다 작지 않지만 右邊의 根의 重複度는 $r-1$이다. 이는 矛盾이다. 따라서 Q의 次數가 陽의 整數라는 假定은 거짓이 되어야 한다. 따라서 Q는 常數($\neq0$)이고 $Q=1$이라 하면 (1.2)式에서

$$P'-2xP=1 \qquad (1.3)$$

을 얻는다. P는 x의 多項式이므로 (1.3)式의 左邊의 次數는 恒常 右邊의 次數보다 크다. 이것은 矛盾이다. 따라서 (1.3)式을 만족시키는 多項式 P는 存在하지 않으며 (1.1)式을 만족하는 有理函數 R도 存在하지 않는다. 卽, $\int e^{-x^2}dx$는 初等函數가 아니다.

例 2 $\dfrac{e^{bx}}{x}$ (b는 0이 아닌 常數)

만일 $\int\dfrac{e^{bx}}{x}dx$가 初等函數라면 $\int\dfrac{e^{bx}}{x}dx=Re^{bx}$을 만족하는 x의 有理函數 R이 存在한다. 定理 2의 條件을 생각하여

$\dfrac{1}{x}=R'+bR,\ R=\dfrac{P}{Q}$ (P,Q는 서로 素이고 $Q\neq0$)라 두자.

위의 두 式에서

$$Q^2=xQP'-xPQ'+xbPQ \qquad (2.1)$$

$$Q(Q-xP'-bxP)=-xPQ' \qquad (2.2)$$

Q의 次數가 陽의 整數라면 $Q=0$은 根을 가진다. α를 그 根이라 하고 그 根의 重複度를 r이라 하자.

만일 $\alpha\neq0$이라면 α는 重複度가 r보다 작지 않은 (2.2)의 左邊의 根이지만 右邊의 重複度는 $r-1$이어서 矛盾이 된다. 따라서 $\alpha=0$이어야 하고, 어떤 $c(\neq0)$에 대하여 $Q=cx^r$이다. 이 Q를 (2.1)식에 代入하면

$$cx^{r+1}(cx^{r-1}-P'-bP)=-crx^rP$$

다시 0은 重複度가 $r+1$보다 작지 않은 左邊의 根이지만 右邊의 根의 重複度는 r이어서 矛盾이 생긴다. 따라서 Q의 次數가 陽의 整數라는 假定은 成立하지 않는다. 그러므로 Q는 常數이고 $Q=1$이라 하면 (2.2)式에서

$$xP'+bxP=1 \qquad (2.3)$$

을 얻는다. P는 x의 多項式이므로 左邊의 次數는 bxP의 次數(>0) 및 右邊의 次數와 各各 같다. 이는 矛盾이다. 따라서 (2.3)式을 만족시키는 多項式 P는 存在하지 않으며 따라서 (2.1)식을 만족하는 有理函數 R도 存在하지 않는다. 곧 $\int\dfrac{e^{bx}}{x}dx$ $(b\neq0)$은 初等函數가 아니다.

例 3 $\dfrac{(x^2+ax+b)e^x}{(x-1)^2}$ (a,b는 常數)

만일 $\int\dfrac{(x^2+ax+b)e^x}{(x-1)^2}dx=Re^x=\dfrac{Pe^x}{Q}$이라면

$$(x^2+ax+b)Q^2 =(P'Q-Q'P+PQ)(x-1)^2 \qquad (3.1)$$

$$Q(Q(x^2+ax+b) -(x-1)^2P'-(x-1)^2P) =-Q'P(x-1)^2 \qquad (3.2)$$

Q의 次數는 陽數라 하고 α를 重複度가 $r(>0)$인 Q의 根이라 하자. 만일 $\alpha\neq1$이면 α는 重複度가 r보다 작지 않은 左邊의 根이지만 右邊의 重複度는 $r-1$이다. 이것은 矛盾이다. 따라서 $\alpha=1$이고 $Q=(x-1)^r$이다. 이를 (3.2)式에 代入하면

$$(x-1)^r[(x-1)^r(x^2+ax+b) -(x-1)^2P'-(x-1)^2P] =-r(x-1)^{r+1}P \qquad (3.3)$$

左, 右邊의 根으로서 $x=1$의 重複度가 같아야 한다는 사실에서 $r=1$. 卽 $Q=(x-1)$.

(3.3)式의 兩邊을 $(x-1)^2$으로 나누면

$$(x^2+ax+b)-(x-1)P'-(x-1)P=-P,$$
$$(x-1)P'+(x-2)P=x^2+ax+b$$

P는 x의 1次式이다. 卽 $P=cx+d$이다. 그러므로

$$cx-c+cx^2+dx-2cx-2d=x^2+ax+b$$

이 두 多項式은 同値이므로

$$c=1,\ d-c=a,\ -c-2d=b$$

그러므로 $b=-2a-3$

따라서 $\int\frac{(x^2+ax+b)e^x}{(x-1)^2}dx$가 初等函數인 必要充分條件은 $b=-2a-3$이고 이 경우 積分은 $\frac{(x+a+1)e^x}{x-1}+C$이다.

다음에서 複素變數函數에 對한 例를 考察하자. 三角函數, 逆三角函數는 I에서 言及한 세가지 演算만을 使用하여 얻을 수 있으므로 初等函數에 關하여 똑같은 結果가 얻어 진다는 것을 다음 例에서 알 수 있다.

例 4 $\frac{\sin x}{x}$

實函數 $u(x)$, $v(x)$에 對하여 $f(x)=u(x)+iv(x)$라 하면

$$R_e\left(\int f(x)dx\right)=\int R_e(f(x))dx=\int u(x)dx$$

$$I_m\left(\int f(x)dx\right)=\int I_m(f(x))dx=\int v(x)dx$$

이고 $\int f(x)dx$가 初等函數이면 $\int u(x)dx$, $\int v(x)dx$도 初等函數이다.

$\frac{\sin x}{x}$가 定理 2의 꼴은 아니지만 Euler의 公式에 依하여 $\frac{\sin x}{x}=I_m\left(\frac{e^{ix}}{x}\right)$이다.

例 2에서 $\int\frac{e^{ix}}{x}dx$는 初等函數가 아니므로 $\int I_m\left(\frac{e^{ix}}{x}\right)dx=\int\frac{\sin x}{x}dx$도 初等函數가 아니다.

例 5 $\frac{1}{\log x}$

定理 2가 直接適用될수는 없으나 $y=\log x$로 두면 $\int\frac{dx}{\log x}=\int\frac{e^y}{y}dy$이다.

例 2에서 이는 初等函數가 아니다. 卽 $\int\frac{dx}{\log x}$는 初等函數가 아니다.

以上의 例에서 初等函數의 不定積分이 初等函數인가를 判別하는 方法을 例示하였고 例 3은 判別뿐만 아니라 積分方法도 例示하였다.

Liouville의 定理 및 定理 2는 初等函數範圍內에서 積分可能한 函數를 判別하는 基準으로 매우 有用한 것이다.

參 考 文 獻

1. 尹甲炳外 3人(共譯), 現代代數學, 서울 : 文運堂, 1970. *pp.* 419—454.
2. Mead, D. G., *Amer. Math. Monthly*, **68**(1961), *pp.* 152—156.
3. Potts, D. H., Elementary integrals, *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), *pp.* 545—554.
4. Risch, R. H., The problem of integration in finite terms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), *pp.* 167—189.
5. Risch, R. H., The solution of the problem of integration in finite terms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), *pp.* 605—608.
6. Ritt, F. J., *Integration in finite terms*, Columbia Univ. Press, 1948.