韓國數學敎育學會誌 <數學敎育>
1981. 12. Vol.XX. No.1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1981. Vol.XX No.1

Euclid의 第5公準에 關한 考察

胡 文 龍

I. 序 論

Euclid는 그 이름은 알려져 있으나 生涯에 對한 記錄이 남아있는 것이 거의 없다. Proclus의 著書에 記錄된 內容으로 보아 B.C. 300年頃 Alexandria에서 活躍한 大數學者임을 알 수 있을 뿐이다. 그의 原論은 거의 完全한 形態로 오늘에 傳해져 왔다. 그의 業績은 演繹的 理論體系의 原形으로서 幾何學을 公理主義 立場에서 構成하였다는 데 있다. 비록 Euclid의 公理系가 論理的으로 完全하지는 못해서 後世에 Hilbert (1862—1943) 等에 依하여 批判되지만 公理主義의 嚆矢로서 功勞가 至大한 것이었다. 現代數學의 公理主義가 Euclid原論의 模倣이라 해도 過言은 아니다.

Euclid原論은 모두 13卷으로 되어 있으며 第1卷에는 23個의 定義, 5個의 公準, 5個의 共通概念과 48個의 命題가 證明되어 있으며, 13卷을 通해서 命題의 數는 465個에 達한다.

Euclid의 理論體系에 對하여 Hilbert 以後 알려진 몇 가지 缺陷을 指摘해 보면 公理는 Euclid의 생각과 같이 自明한 眞理인 것이 아니라 演繹的 理論의 展開를 爲한 假定에 不過하다는 것이다. 또한 Euclid의 公理는 幾何學의 모든 定理를 證明 하는데 完備되어 있지 못했다는 점이다. 가령 그의 公理系에는 順序의 公理가 빠져 있다. 또 그는 用語의 定義에서 無定義用語를 두지 않았다는 점이다. 用語를 定義함에 있어서 無定義用語를 認定하지 않을 때 결국 循環論法에 빠지게 되기 때문에 이것은 그의 理論體系의 缺陷으로 指摘될 수 밖에 없는 것이다.

Euclid原論에서 그의 모든 數學의 理論展開에서 基礎가 되는 共通槪念과 幾何學의 理論展開를 爲한 公準을 아래와 같이 列擧하고 있다.

共通槪念 :

1. 같은 것에 같은 것은 또 서로 같다.
2. 같은 것에 같은 것을 더하면 그 全體는 같다.
3. 같은 것에서 같은 것을 빼면 그 나머지는 같다.
4. 서로 포개지는 것은 서로 같다.
5. 全體는 部分보다 크다.

公準 :

다음 事實이 要請되어 있다고 認定한다.

1. 任意의 點에서 任意의 點으로 한 直線을 긋는 것
2. 有限의 直線을 繼續해서 直線으로 延長하는 것
3. 任意의 中心과 距離를 갖고 圓을 그리는 것
4. 모든 直角은 서로 같다는 것
5. 한 直線이 두 直線과 만나고 같은 쪽에서 合이 2直角보다 작은 內角을 만들 때, 이들 直線을 限없이 延長하면 2直角보다 작은 角이 있는 쪽에서 만나는 것

그가운데서 公準5(平行線公準)는 다른 公準에 比하여 複雜하고, 命題 29 前의 命題를 證明하는데 使用하지 않은 것으로 보아 Euclid 스스로가 證明할 수 있는 定理가 아닌가 하고 생각하였던 듯 하다. 事實 그 以後 2000年 동안에 걸쳐 平行線公準이 다른 公理로 부터 獨立이라

는 事實이 밝혀질 때까지 많은 사람들이 平行線公準을 證明하려고 試圖했다. 本論文에서는 그 중 代表的인 것을 調査 紹介하고, 이러한 試圖가 現代數學의 理論發展에 어떻게 關聯되었는가를 考察하고자 한다.

Ⅱ. 平行線公準과 同値인 命題

平行線公準을 證明하려고 試圖하는 過程에서 나타난 平行線公準과 同値인 命題들은 다음과 같다.

(1) '주어진 한 點을 지나서 주어진 한 直線에 平行한 直線은 단 하나만 그을 수 있다.' (Ptolemy) 또는 '서로 만나는 두 直線은 한 直線에 同時에 平行할 수 없다.'

(1a) '만일 한 直線이 두 平行線中 하나와 만나면 다른 것과도 또 만난다.' (Proclus)

(1b) '같은 直線에 平行한 直線들은 서로 平行이다.'

(2) '어디서나 等距離에 있는 直線이 存在한다.' (Proclus)

(3) '세 內角의 合이 2直角과 같은 三角形이 存在한다.' (Nasiraddin at-Tüsi, Legendre)

(4) '주어진 圖形과 닮은꼴이고 任意의 크기를 갖는 圖形이 存在한다.' (Wallis) 또는 '角이 各各 같고 크기가 다른 두 三角形이 存在한다.' (Saccheri)

(5) '$\frac{2}{3}$直角보다 작은 角의 內部의 한 點을 지나서 그 角의 두 邊과 만나는 直線을 항상 그을 수 있다.' (Legendre) 또는 '角의 內部에 있는 한 點을 지나는 모든 直線은 角의 邊중에 적어도 하나와 반드시 만난다.'

(6) '一直線上에 없는 任意의 세 點이 주어지면 이들을 지나는 한 圓이 存在한다.' (Legendre, W.B. Bolyai)

(7) '주어진 面積보다 더 큰 面積을 갖는 直線三角形을 作圖할 수 있다는 事實을 證明할 수 있다면 幾何學의 모든 定理를 完全히 證明해 낼 수 있다.' (Gauss)

(8) '만일 四角形의 세 角이 모두 直角이면, 나머지 한 角도 直角이다.' (Clairaut)

(9) '두 直線이 平行이면 엇각, 同位角은 各各 같다.'

Ⅲ. 平行線公準의 證明을 爲한 試圖

平行線公準을 證明하기 爲하여 2000年 동안 수많은 사람들이 여러모로 努力했는데, 그중에서 代表的인 것을 紹介하고 이로서 이들의 努力이 非Euclid幾何學의 誕生에 어떤 影響을 미쳤는 가를 살펴 보고자 한다.

1. Ptolemy의 試圖

Ptolemy(85—165)는 命題 28, 命題 29를 平行線公準을 使用하지 않고 證明한 後 이것을 써서 平行線公準을 推論했다고 Proclus의 記錄에 나타나 있다.

命題 28 :

한 直線이 두 直線과 만나서 이루어 지는 同位角이 같거나 同側內角의 合이 2直角과 같으면 두 直線은 平行이다.

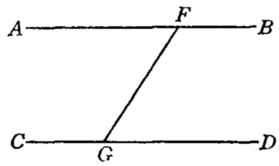
이 定理의 證明은 Euclid原論의 證明 內容을 그대로 擇하고 있다.

命題 29 :

平行인 두 直線과 한 直線이 만나면, 엇각은 서로 같고, 同位角이 같고, 同側內角의 合이 2直角과 같다.

證明 : 한 直線이 平行인 두 直線과 만나서 생기는 同側內角의 合은 2直角과 같거나, 2直角보다 크거나 또는 2直角보다 작다.

지금 平行인 두 直線 AB, CD와 한 直線이 두 點 F, G에서 만날 때



i) FG는 같은 쪽에 合이 2直角보다 큰 內角을 만들지는 않는다.

왜냐하면, 만일 角 AFG와 CGF의 合이 2直角보다 크면 나머지 角 BFG, DGF의 合은 2直角보다 작다. 그러나 같은 두 角의 合이 2

直角보다 역시 크다. 왜냐하면 AF, CG가 平行이면 FB, GD도 역시 行平이다. 만일 平行인 두 直線 AF, CG와 直線 FG가 만나서 생기는 同側內角의 合이 2直角보다 크다고 하면 平行인 두 直線 FB, GD와 直線 FG와 만나서 생기는 同側內角의 合이 역시 2直角보다 크다. 이는 不合理하다. 마찬가지로

ii) FG는 같은 쪽에 合이 2直角보다 작은 內角을 만들지 않는다. 그러나

iii) 만일 2直角보다 크지도 않고 작지도 않게 그들을 만든다면 같은 쪽에 2直角과 같은 內角을 만들 수 있을 뿐이다. (證明 끝)

이 證明하는 過程을 綿密히 檢討해 보자. 'AF, CG가 平行이면 FB, GD도 平行이다.'라는 論證을 하고 있는데 이것은 直線 CD 밖의 한 點 F를 지나 CD에 平行한 直線은 하나 뿐이라는 平行線公準과 同値인 命題를 假定한 것에 不過하다. 그러므로 平行線公準을 證明하기 爲하여 平行線公準과 同値인 命題를 假定하고 있는 것이다.

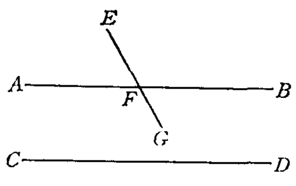
2. Proclus의 試圖

Proclus(410—485)는 Aristotle의 公理 '角의 두 邊을 無限히 延長한다면 두 邊 위에 있는 點들 사이의 距離는 任意의 有限確定된 길이보다 더 크게 만들 수 있다.'를 證明하지 않고 公理로 假定하고 다음 命題를 먼저 證明하고 이를 써서 平行線公準을 推論했다.

命題 :

한 直線이 平行인 두 直線 중 하나와 만나면, 다른 것과도 만난다.

證明 : 直線 AB와 CD를 平行한 두 直線이라 하고 直線 EFG를 AB와 F에서 만나는 直線이라 하자. 그러면 FB와 FG는 한 點 F를 지나는 두 直線이므로 限없이 延長하면 두 直線



FB, FG 위에 각각 있는 點들 사이의 距離는 어떤 크기 보다도 더 큰 距離를 가진다. 그러므로 그들은 平行線 사이의 距離보다도 더 큰 距離를 維持할 때 반드시 FG와 CD는 만난다. (證明 끝)

Proclus의 推論은 FB와 FG를 無限히 延長하면 이 두 直線위에 各各 놓여있는 두 點 사이의 距離를 주어진 길이보다 얼마든지 크게 할 수 있다는 命題를 利用하고 있으나 이 命題 역시 證明을 要하는 命題이다(Clavius[1]). 또 平行인 두 直線 사이의 距離는 어디서나 같다는 命題를 은연중에 暗示하고 있으나 이 역시 公準 5와 同値이다.

3. Nasiraddin at-Tüsi의 試圖

13世紀 Persia의 學者 Narsiraddin at-Tüsi (1201—1274)는 3個의 Lemma를 利用하여 平行線公準을 證明하려고 하였는데 Saccheri와 Wallis가 指摘한 바와 같이 完全한 것은 아니었다[2].

4. John Wallis의 試圖

Wallis(1616—1703)는 '한 圖形이 주어지면 주어진 圖形과 닮은 任意의 크기의 다른 圖形을 그릴 수 있다.'를 公準으로 假定하고(實은 Wallis는 이것을 三角形에 對해서만 假定했다) 平行線公準을 證明하려고 했는데, 닮은 圖形의 存在를 假定하는 것은 Saccheri가 指摘한 바와 같이 소위 '直角假設'과 同値이다. 結果的으로 平行線公準과 同値인 命題를 假定하고 있는 것이다.

5. Gerolamo Saccheri의 試圖

Saccheri(1667—1773)은 Euclid와 다른 假設을 計劃했는데 그 內容은 대략 다음과 같다.

'線分 AB의 양끝 點에서 길이가 같은 垂線 AC, BD를 세워 C와 D를 잇는다. 平面四角形(이것을 Saccheri의 四角形이라고 한다)에서 角 C와 角 D는 같다.'는 事實을 圖形의 合同을 利用하여 證明했다. 角 C와 角 D가 같으므

1) Clavius(1537—1612) : 1574年에 Euclid 原論을 Latin語로 飜譯, 그는 많은 註釋과 批評을 加함.

2) 參考文獻 4. pp. 208—210 參照

로

i) 角 C, 角 D는 모두 直角(直角假設)

ii) 角 C, 角 D는 모두 鈍角(鈍角假設)

iii) 角 C, 角 D는 모두 銳角(銳角假設)

중 어느 하나 만이 成立하지 않으면 안된다. Saccheri는 鈍角과 銳角假設은 眞이 아님을 밝힘으로서 直角假設만이 眞임을 밝혀서 平行線公準을 證明하려고 했다. 그의 論證에는 直線의 길이가 無限하다는 假定을 利用했는데 鈍角假設(Riemann의 假設) 下에서는 이것은 成立하지 않는 것이다.

그러나 그가 밝힌 命題가운데 중요한 것을 몇가지 골라 보면

(1) 만일 直角, 鈍角 또는 銳角假設이 한 가지 경우에서 眞임이 證明된다면 그것은 모든 다른 경우에도 眞이다.

(2) 直角, 鈍角 또는 銳角假設이 眞임에 따라서 三角形의 세 角의 合은 各各 2直角과 같거나, 2直角보다 크거나 또는 2直角보다 작다.

(3) 內角의 合이 2直角인 한 三角形이 存在하면 直角假設이 眞이고, 內角의 合이 2直角보다 큰 한 三角形이 存在하면 鈍角假設이 眞이고, 內角의 合이 2直角보다 작은 한 三角形이 存在하면 銳角假設이 眞이다.

(4) 한 平面위에 있는 두 直線(비록 銳角假設이 成立하더라도)이 共通垂線을 가지거나, 또는 어느 한 方向으로 延長해 나아갈 것 같으면 有限인 距離에서 한 번 만나든지 적어도 서로 繼續해서 가까와 지지 않으면 아니된다.

(5) 銳角假設下에서 한 點을 지나는 直線群과 定直線 l이 주어 졌을 때 l과 共通垂線을 갖는 確定된 두 直線이 存在해서 l과 만나는 直線들과 l과 만나지 않는 直線들을 區分하는 境界를 이루게 된다.

이 가운데서 (1), (2), (3)의 一部가 一世紀 後에 Legendre에 依하여 證明되었고 (4), (5)는 後에 Lobachewsky와 Bolyai에 依하여 非Euclid幾何學에서 成立하는 命題로서 새롭게 證明되었다.

6. Lambert의 試圖

Lambert(1728—1777)는 Saccheri의 直角假設, 鈍角假設, 銳角假設에 關해서 좀더 깊이 硏究하고 鈍角假設과 銳角假設로 부터 새로운 命題를 誘導함에 있어 進一步 하였다. 그 가운데서 가장 注目 할만한 것은 '鈍角假設, 銳角假設下에서 平面三角形의 面積은 세 內角의 合과 2直角과의 差에 比例한다'라는 定理를 얻고 있다. 이것을 數式으로 表現하면

$\Delta=k(\pi-A-B-C)$ 또는 $\Delta=k(A+B+C-\pi)$

여기서 k는 陽의 常數이다.

이와 關聯해서 鈍角假設下에서 成立한다고 밝힌 위의 定理는 平面三角形이 아닌 球面三角形에서 成立하는 定理임이 알려져 있다.

이 鈍角假設에 關聯된 發見들을 球面에 適用하면 Riemann 假設(1854)下에서의 非Euclid幾何學의 定理로 된다.

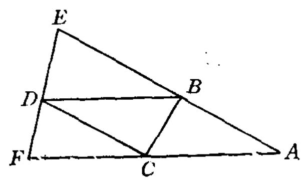
7. Legendre의 試圖

Adrien Marie Legendre(1752—1833)는 1794年부터 1823年까지에 걸쳐 Euclid의 平行線公準을 證明하기 爲하여 12차례나 論文을 썼다. 그는 解析的으로도, 作圖에 依하여도, 그 밖의 여러가지 方法으로 試圖했으나 그가 使用한 假定이 結局 平行線公準과 同値인 命題였음이 밝혀졌다.

그가 試圖하는 過程에서 必要했던 命題 및 그 證明을 一部 紹介한다.

命題 : '三角形의 內角의 合이 2直角보다 작을 수 없다.

證明 : A는 三角形 ABC의 세 內角 중 가장 작다고 하자. A의 對邊 BC에 角 DBC는 角 ACB와 같고 角 DCB는 角 ABC와 같도록 定하여 그림과 같이 三角形 DBC를 作圖한다. 다



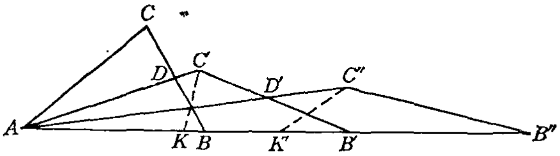
음에 D를 지나는 任意의 直線이 AB, AC의 延長線과 만나는 點을 各各 E, F라 하자. 만일 三角形의 內角의 合이 2直角보다 작다면, 三角形 ABC의 內角의 合을 $2\angle R-\delta(\delta>0)$라 놓자. 그러면 三角形 DBC의 內角의 合은 三角形 ABC와 같으므로 역시 $2\angle R-\delta$이다. 나머지 三角形 DEB, FDC의 內角의 合은 各各 2直角보다 크지 않으므로 圖形에 있는 4個의 三角形의 12個의 內角의 合은 $4\angle R+(2\angle R-\delta)+(2\angle R-\delta)$ $(=8\angle R-2\delta)$보다 크게 될 수 없다.

지금 B, C, D 各點에서의 세 角의 合은 各各 2直角이다. 이 9個의 角을 빼면, 三角形 AEF의 內角의 合은 $2\angle R-2\delta$보다 크게 될 수 없다는 結果가 된다.

그러므로 三角形 ABC의 內角의 合이 2直角보다 δ만큼 작으면 더 큰 三角形 AEF의 內角의 合은 2直角보다 적어도 2δ만큼 작다. 三角形 AEF보다 더 큰 三角形을 앞에서와 같은 方法으로 繼續해서 作圖할 수 있다. 그러나 $\delta>0$이므로 위와 같은 作圖를 繼續하여 $2^n\delta$가 2直角을 超過하도록 할 수 있다. 따라서 充分히 큰 三角形의 內角의 合은 0이 되거나 0보다 작게 되어야 한다. 이는 不合理하다. (證明 끝)

命題: '三角形의 內角의 合은 2直角과 같다.'

證明: ABC를 주어진 三角形이라 하자. AB를 最大邊, BC를 最小邊이라 하면 C는 最大角이고 A는 最小角이다. A에서 BC에 中線 AD를 긋고 AD를 C'까지 延長하여 AC'과 AB를



같게 C'을 잡는다. 다음에 AB를 B'까지 延長하여 AB'을 AD의 2培와 같게 B'을 잡는다. 그러면 三角形 AB'C'의 內角의 合은 三角形 ABC의 內角의 合과 같다.

(왜냐하면, AB위의 AK와 AD가 같도록 K를 잡는다. 그리고 C'과 K를 잇는다. 그러면 三角形 ABD와 AC'K는 두 邊과 사잇角이 各各 같으므로 두 三角形은 모든 面에서 같다. 그리고 C'K는 BD 또는 DC와 같다. 다음에 三角形 B'C'K와 ACD에서 角 B'KC'와 ADC는 各各 같은 角 AKC'와 ADB의 補角이므로 같다. 그리고 같은 角을 낀 두 邊이 各各 같다. 따라서 三角形 B'C'K와 ACD는 모든 面에서 같게 된다. 그래서 角 AC'B'는 三角形 ABC의 두 角 B, C의 合과 같고 三角形 ABC에서 A는 三角形 AB'C'의 두 角 A, B'의 合과 같다. 따라서 三角形 AB'C'의 內角의 合과 三角形 ABC의 內角의 合은 같다.)

그리고 角 C'AB'는 $\frac{1}{2}$A보다 작다. (여기서 A는 三角形 ABC의 內角 CAB를 表示한다)

(왜냐하면, 邊 AC'은 AB와 같고, AB는 AC보다 크고, AC는 B'C'와 같으므로 AC'은 B'C'보다 크다. 그러므로 角 C'AB'는 角 AB'C'보다 작다. 따라서 角 C'AB'는 $\frac{1}{2}$A보다 작다.)

더 繼續하여, 三角形 AB'C'에서 邊 B'C'의 中點 D'을 잡아 같은 方法으로 作圖를 反復하면

i) 三角形 AB''C''의 內角의 合은 三角形 ABC의 內角의 合과 같고

ii) 두 角 C''AB'', AB''C''의 合은 먼저 三角形에서 角 C'AB'$\left(\frac{1}{2}\text{A 보다 작은}\right)$과 같고

iii) 角 C''AB''은 角 C'AB'의 $\frac{1}{2}$보다 작아져서 $\frac{1}{4}$A보다 작은, 三角形 AB''C''을 얻는다.

이 方法으로 繼續하면, 三角形 Abc에서 두 角 A와 b의 合이 $\frac{1}{2^n}$A보다 작고, c에서의 角이 그 以前 三角形의 對應角보다 더 크도록 三角形 Abc를 얻을 수 있다.

만일 $\frac{1}{2^n}$A가 어떤 定해진 角보다 더 작게 되도록 作圖를 限없이 繼續 한다면 點 c는 結局은 Ab 위에 놓이고 三角形(內角의 合이 三角形

ABC의 內角의 合과 같은)의 內角의 合은 c에서의 內角과 一致하게 되는데 c는 平角이므로 2直角과 같다.

곧, 三角形의 內角의 合은 2直角과 같다. (證明 끝)

다음은 Legendre의 定理중에서 平行線에 關한 假設에 依存하지 않고 證明되는 價値가 있는 것들을 몇 가지 더 紹介한다.

(1) '三角形의 內角의 合은 2直角보다 크게 될 수 없다.'

Legendre는 이것을 두 가지 方法으로 證明을 했는데, 첫번은 Euclid의 命題 24.를 利用하고, 다음번에는 歸謬法을 썼다. 두 方法다 Riemann의 假設下에서 眞이 아니다.

(2) 한 三角形의 內角의 合이 2直角보다 작다면, 三角形을 한 꼭지점을 지나고 對邊과 만나는 直線으로 작은 2個의 三角形을 만들 때 작은 두 三角形의 內角의 合을 各各

$2\angle R-\alpha(\alpha>0)$, $2\angle R-\beta(\beta>0)$

라 할 때 原三角形의 內角의 合은

$2\angle R-(\alpha+\beta)$

(3) '한 三角形의 內角의 合이 2直角과 같으면, 한 꼭지점을 지나고 對邊과 만나게 그은 直線들로 얻어지는 各三角形의 內角의 合은 2直角이다.'

(4) '內角의 合이 4直角이고 네 邊이 주어진 線分의 길이보다 더 큰 等邊四角形을 作圖할 수 있다.'

(5) '한 三角形에서 內角의 合이 2直角과 같으면 任意의 三角形의 內角의 合도 역시 2直角이다.'

(6) '한 三角形에서 內角의 合이 2直角보다 작으면 任意의 三角形의 內角의 合도 역시 2直角보다 작게 된다.'

(7) '三角形의 內角의 合이 2直角과 같으면 한 平面에서 어떤 點을 지나서 주어진 直線에 平行인 直線은 하나만 그릴 수 있다.'

이 定理를 證明하기 爲하여 Legendre는 다음 Lemma를 必要로 했다.

Lemma: '한 점 P를 지나서 주어진 直線(r)과 어떤 주어진 角보다 작은 角을 만드는 直線을 그리는 것은 恒常 可能하다.'

이 Lemma를 써서, 점 P에서 直線 r에 내린 垂線의 발을 Q라 할 때, P를 지나 PQ에 垂線 s를 그으면 直線 s가 求하는 唯一한 平行線이라는 것을 推論하였다.

以上과 같이 平行線公準의 證明은 많은 사람들에 依하여 試圖되었으나, 平行線公準은 結코 證明될 수 없다는 確信을 처음 表示한 사람은 Gauss(1777—1855)였다(1822). 그러나 平行線公準이 他公理로 부터 獨立이라는 事實은 1868年에 Engenio Beltrami(1835—1900)와 Hoüel J.에 依하여 證明되었다.

IV. 非 Euclid 幾何學의 誕生

앞에서 調査, 紹介한 바와 같이 많은 사람들이 平行線公準 또는 이것과 同値인 어떤 命題를 다른 公理, 公準으로 부터 證明하려고 試圖해 왔다. Russia의 Lobachewsky(1793—1856)도 平行線公準을 證明하려고 했는데 公準 1~4에 '直線밖의 한 點을 지나고 이 直線에 平行한 直線은 2個 以上 存在한다.'…(*)를 添加한 公理系에서 矛盾을 誘導 하려고 하였으나 그도 다른 사람과 마찬가지로 矛盾을 誘導하지 못했다.

그러나 公準 1~4와 앞의 (*)을 公理系로 하여 다음 命題들을 證明하였다. '三角形의 內角의 合은 2直角보다 작다.'

'面積이 큰 三角形의 內角의 合은 面積이 작은 三角形의 內角의 合보다 작고, 內角의 合이 같은 두 三角形의 面積은 같다.'

'對應하는 세 角이 各各 같은 두 三角形은 合同이다.'

위의 結果는 우리가 經驗的으로 알고 있는 사실과 다르나 數學的인 矛盾을 發生하지 않았다. 그래서 Lobachewsky는 公準 1~5를 公理系로 하는 Euclid幾何學 外에도 公準 1~4와 앞의 命題(*)을 公理系로 하는 幾何學도 存在한다고 생각한 內容을 1826年에 發表했으나, 당시 사람들은 이를 받아들이지 않았다.

그 後 Lobachewsky의 繼續的인 硏究와 Bolyai(1802—1900)等의 硏究로 非 Euclid 幾何學의 誕生을 보게 되었다.

그 後 Riemann(1826—1866)은 直線의 길이는 有限이고 平行線은 하나도 存在하지 않는다는 幾何學을 發表했는데 이것은 非 Euclid 幾何學의 一種이다.

後에 Klein(1849—1935)은 Euclid, Lobachewsky, Riemann의 幾何學을 各各 抛物線的, 雙曲線的, 楕圓的 幾何學이라 불렀다. 이들의 몇 가지 性質을 간단히 比較해 보면 다음 表와 같다.

	Klein의 命名	直線 밖의 한 點을 지나는 平行線數	直線의 길이	三角形의 內角의 合	Saccheri의 四角形
Euclid	抛物線的 幾何學	1	無限	2∠R	直角假設 成立
Lobache-wsky	雙曲線的 幾何學	無 數	無限	2∠R보다 작다	銳角假設 成立
Riemann	楕圓的 幾何學	0	有限	2∠R보다 크다	鈍角假設 成立

V. 結 論

1. 平行線公準의 證明을 爲한 試圖가 平行線公準과 同値인 다른 命題를 假定하고 平行線公準을 證明한 것이 矛盾이다. 이는 嚴密한 意味에서 平行線公準이 證明된 것이 아니다.

2. 平行線公準은 다른 公理들로 부터 獨立이라는 事實, 다시 말하면 다른 公理로 부터 證明될 수 없다는 事實이 Eugenio Beltrami와 Hoüel J에 依하여 證明이 되었을 뿐 아니라 平行線公準만을 否定한 非 Euclid 幾何學의 Model 卽 Riemann의 Model과 Klein의 Model이 紹介되므로서 平行線公準의 獨立性이 確認된 셈이다. 그러나

3. 수많은 사람들이 證明하고자 했던 努力은 전혀 無價値한 것은 아니었다. 왜냐하면 그들의 努力에 依하여 非 Euclid 幾何學의 可能性이 暗示되었고 Lobachewsky, Bolyai와 Riemann 等에 依하여 非 Euclid 幾何學의 理論이 發展되기에 이르렀다. 그 後 特히 Riemann 幾何學等은 電磁氣學, 相對性理論, 最近의 宇宙科學 等에서 莫大한 實用性을 發揮했다.

參 考 文 獻

1. 金應泰, 金年植(共著), 數學敎育敎材論, 서울 : 二友出版社, 1980. *pp.* 277—306.
2. 李星憲編, 世界數學史, 서울 : 敎學社, 1961. *pp.* 11—18.
3. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, New York : Holt, Rinehart and Winston, 1969. *pp.* 112—131.
4. Heath, T. L. (ed.), *Euclid's Elements(Vol. 1)*, New York : Dover Pub., 1956. *pp.* 202—220.