

鋼材의 衝擊疲勞破壞壽命에 미치는 Tempering 効果에 관한 研究

Effect of Tempering on the Repeated Impact Fatigue Life of the Steel

鄭 載 天^{*}

(Chae-Cheon Cheong)

Abstract

The fatigue characteristics of Si-Mn spring steel (AISI 9260-H, JIS SUP-6) were investigated on several heat treatment conditions. Repeated impact loads of 10kg-cm and 15kg-cm energy were applied with a cam roller drop hammer type impact fatigue testing machine.

Specimens were oil-quenched, and tempered at 350°C, 400°C, 450°C and 500°C, respectively. Results obtained in these experiments are summarized as follows. :

- 1) The fatigue life of the specimen is decreased as the magnitude of constant impact energy is increased, regardless of heat treatment.
- 2) Generally, the fatigue life of the specimen is decreased as the tensile strength of the materials is increased.
- 3) Within the limit of these experiments, the fatigue life showed abrupt decrease at the tempering temperature of about 400°C.
- 4) The fatigue life is increased as the initial value of applied stress intensity factor(K_1) is decreased. This tendency is apparent for the low tensile strength materials.

1. 緒 論

一般的으로 機械나 構造物의 部材의 破壞는 設計上의 잘못이라기 보다는 材料内部에 存在하는 Crack 또는 缺陷에 起因된다고 볼수가 있고, 또한 이러한 破壞는 意外로 重大한 大型事故를 發生케 한다.

그런데, 이들 事故의 動機는 各種 原因에 起因된다고 생각되나, 破壞의 樣相은 一連의 關聯性을 가지고 있다. 즉, 이러한 事故의 原因을 調査 分析한 結果 延性破壞는 比較的 적게 發生되

며, 大部分의 事故는 初期에 發生한 Crack이 傳播進展되어서, 破壞가 일어나는 脆性破壞에 의한 事故임이 究明되어 있다. 이런 境遇의 破損은 大部分이 疲勞에 의한 破壞라고 볼 수 있다.

本 研究에서는 衝擊疲勞를 받는 鋼材의 破壞 舉動을 考察하여 보기로 한다. 衝擊荷重에 의한 變形과 破壞現象이 靜的荷重에 의한 破壞現象과 다른점은 大端히 큰 變形率速度를 갖는다는 점이다. 衝擊疲勞에 있어서도 普通의 疲勞와 比較하여 變形率速度가 크며, 따라서, 破壞 現象도 一般疲勞때와는 다른 樣相을 갖는다. 衝擊疲勞

* 仁荷大學校 工科大學 教授

現象을 對象으로 놓고 考察하여 볼 때 一回衝擊으로는 破壞가 일어나지 않는 境遇에도 이와같은 적은 衝擊energy의 反復 및 蓄積으로 인한 組織의 變化등에 起因하여 破壞가 發生하며, 單一衝擊의 特性이 그대로 나타난다고는 말할 수 없을 것이다.

이와같은 점을 考慮하여 本 研究에서는 그 基礎的 研究로서 熱處理條件을 달리한 Si-Mn鋼材料에 對하여 振幅을 달리하는 反復衝擊 荷重을 加하였을 때의 破壞現象을 究明하여 보았다.

2. 破壞力學의 基礎概念

近來에 와서 Crack의 存在 내지 그 發生이 豫想되는 材料의 強度, 使用壽命의 評價등에 破壞力學이 重要한 하나의 工學的手法으로서 導入

되어 있고, 이에 對한 研究가 活潑히 進行되고 있다.

破壞力學的手法에는 여러가지 種類가 있으나 여기에서는 線形破壞力學의 基本概念을 簡單하게 記述하겠다.

A. A. Griffith⁽¹⁾의 "Crack의 進展은 變形 Energy 解放率(Energy Release Rate)이 Crack의 表面 energy의 增加率보다 커질때 始作된다"는 學說에 起源을 둔 破壞力學은 E. Orowan⁽²⁾등을 거쳐 G. R. Irwin⁽³⁾의 Energy의 研究와 限界應力에 基礎를 둔 應力擴大係數와는 等價임을 證明하기에 이르러 急速한 發展을 가져왔다.

이 Irwin의 理論은 Crack 先端에서의 塑性區域이 적을때에는 恒常 成立하고, Crack 先端에 아주 가까운 곳에서의 應力分布는 2次元 問題에 對해서 Fig. 1의 座標系에 의해 다음과 같이

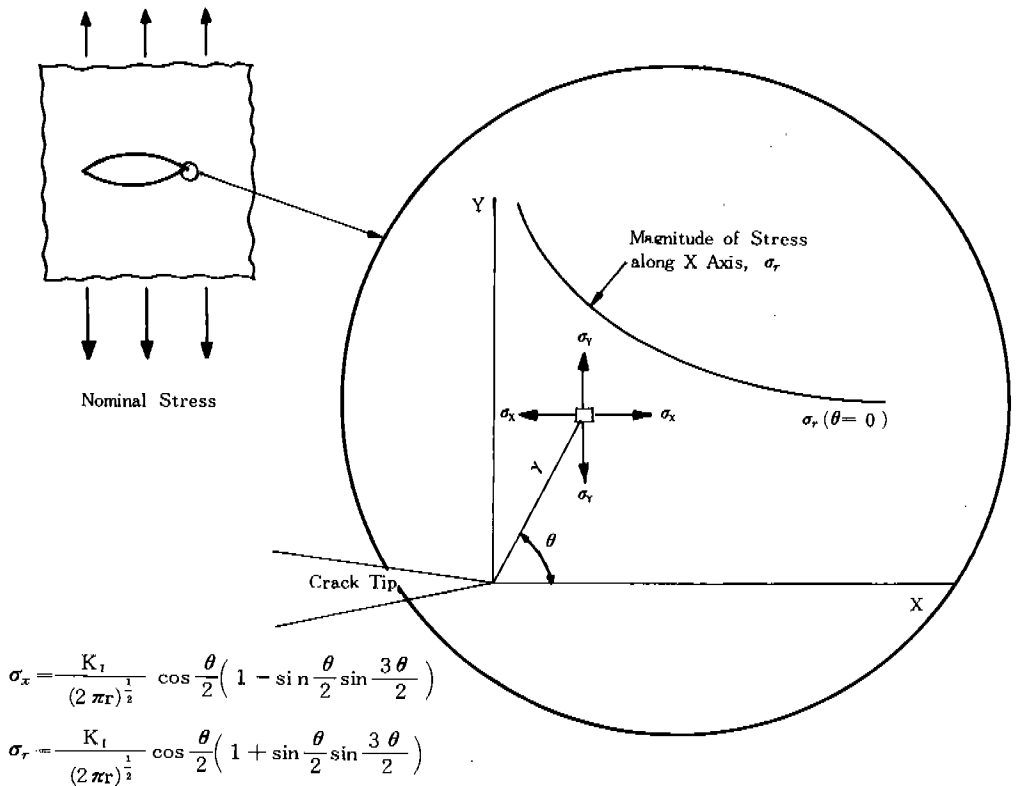


Fig. 1. Schematic Illustration of the Elastic Stress-Field Distribution near the Tip of a Fatigue Crack (Mode I Deformation)

나타낼 수 있다.^{(3),(4),(5)}

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ &\quad - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ &\quad + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ &\quad + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} (2.1)$$

上記式(2.1)에서 r 및 θ 는 Crack先端에서부터 任意의 要所까지의 距離 및 方向이고 K_I , K_{II} 는 Crack面의 變位에 대한 第1 및 第2 Mode의 應力擴大係數(Stress Intensity Factor)이다.

이 K의 값은 Crack을 包含하는 部材의 幾何學的 形狀, Crack의 크기, 位置 및 荷重의 分布와 크기에 따라 決定된다. Crack先端의 應力이 應力擴大係數 K에 의하여 表現될 수 있기 때문에 K의 臨界値는 脆性破壞의 條件으로 생각할 수 있다.

여기서 Crack線과 直角方向만으로 應力이 發生하고 있을 때는 先端에서는 第1 Mode만 일어나며 式(2.1)은 $K_{II} = 0$ 이 되므로

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} (2.2)$$

가 된다. 破壞韌性値 決定試驗⁽⁶⁾은 K_I Mode에서 行하여지는 것이 普通인데, 이때는 Crack은 直進하게 되고, 式(2.2)에서 $\theta = 0$ 에서의 應力이 破壞에 寄與하게 된다. 式(2.2)에서 $\theta = 0$ 을 代入하면,

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} (2.3)$$

로 되는데, Crack先端의 應力에 特異性을 招來하는 것은 σ_y 뿐이며 σ_x 는 影響을 미치지 않는다. 式(2.3)에서 應力擴大係數 K_I 의 臨界値를 平面變形破壞 韌性値(Plane Strain Fracture Toughness) K_{Ic} 라고 부른다. 이 K_{Ic} 는 Crack과 같이 缺陷을 갖는 材料의 破壞에 대한 固有値로 생각할 수 있다.

3. 實驗節次 및 實驗方法

本 實驗에 使用된 試驗片은 Si-Mn 鋼(車輛用 Spring鋼, AISI 9260H, JIS SUP 6)이며 그 化學的 成分은 Table 3-1과 같다. 또한 熱處理 條件에 따르는 材料의 機械的 性質을 把握하기 위하여 熱處理 爐의 爐內 溫度를 840°C로 加熱하여 試驗片을 15分間 爐內에 維持시킨 후 Oil Quenching 하였다. 이때 Oil Quenching 作業은 Quenching Oil을 60°C까지 加熱한 狀態에서 施行하였다. 이렇게 Oil Quenching한 후 Tempering 하였는데, Tempering은 爐內溫度 300°C, 350°C, 400°C, 450°C 및 500°C에서 1時間씩 維持시킨 후 爐中冷却시켰다.

Table 3-1. Chemical Composition (%)

C	Si	Mn	P	S	Cr	Fe
0.50	1.55	0.78	0.010	0.012	0.05	Bal.

熱處理된 各各의 材料를 引張試驗과 衝擊試驗 및 本 實驗用인 反復衝擊疲勞 試驗片 加工하였는데, Fig. 2에 各各의 試驗片의 形狀 및 치수를 表示하였는데, 本 實驗에 使用된 材料는 車輛用 緩衝材料 및 一般機械 構造用으로 使用되는 Si-Mn鋼인 Spring鋼材로서 840°C에서 Oil Quenching한 후 400°C 내지 520°C 사이의 溫度로 Tempering하여 用途에 適合한 機械的 性質을 賦與하여 使用하므로, 反復衝擊疲勞 試驗片은 350°C, 400°C, 450°C 및 500°C로 Tempering된 材料만을 加工하여 實驗하였다.

試驗片材料의 機械的 特性을 把握하기 위한 予備實驗으로서 引張試驗, 衝擊試驗, 硬度試驗 및 光学顯微鏡에 의한 組織撮影 등을 實施하였다.

引張試驗에 使用된 試驗機로서는 万能材料試驗機(UTM, Cap. 10ton, Amsler Type, Tópo Baldwin Co., 및 Japan製 UTM, Cap. 30ton, Amsler Type, SEB-DA699, Alfred J. Amsler & Co., Switzerland製)를 使用하여 熱處理條件에 따른 材料의 引張強度, 延伸率 및 断面收率率등을 測定하였다.

또 衝擊試驗機로는 万能衝擊試驗機(American Chain & Cable Co., Model 4 JR, Wilson, UK製)를 使用하여 測定하였으며, 熱處理條件에 따른 基本組織의 變化를 金屬顯微鏡(Union Optical Co. Ltd, High Temperature Microscope, Model HNUM-4, $\times 2,000$ Japan製)을 使用하여 400倍로 撮影하였다.

本 實驗用 試驗機로서는 万能反復 疲勞衝擊試驗機(Repeated Impact Fatigue Testing Machine, Cap. 50kg·cm, Tokyo Testing Machine Mfg., Ja-

pan製)가 使用되었다. 이 試驗機는 金属材料의 反復引張衝擊試驗 및 反復굽힘衝擊試驗을 할 수 있는 것으로서 그 構造의 概略은 回轉하는 Cam Roller에 의하여 上下로 運動하는 衝擊 Hammer가 試驗片에 衝擊을 加하도록 되어있다.

本 實驗에서는 反復衝擊굽힘試驗을 實施하였는데, Cam Roller의 回轉半徑을 調整하여 單一衝擊 Energy가 10kg·cm 및 15kg·kg가 되도록 하였다. 試驗片을 裝置한 후, 試驗片이 破斷될 때 까지의 總吸收Energy를 測定하기 위하여 積算Counter를 使用하여 總Cycle수를 測定하였고, 衝擊荷重을 測定하기 위하여 荷重의 負荷部分에 strain gage를 Fig. 3과 같이 付差하여 測定하였다.

이때 使用된 strain gage (Kyowa, $120.9 \pm 0.3 \Omega$, KFC-10-C1-11, gage factor $2.10 \pm 1\%$)를 그림과 같이 Full Bridge로 만들어서 Dynamic Strain Amplifier (Kyowa, DPM-6CM, 6Channel, Japan製)로 增幅하여 Oscilloscope (Trio-Kenwood Co, 15MHZ, CS-1560AII, Japan製)

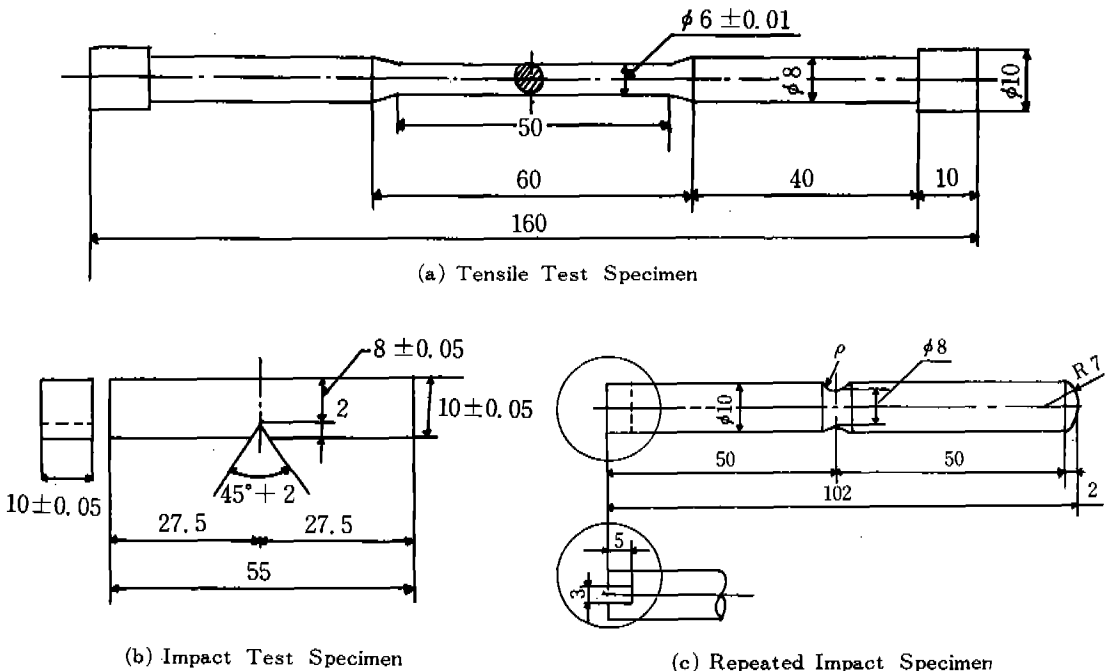


Fig. 2. Configuration of the Test Specimen (Unit:mm)

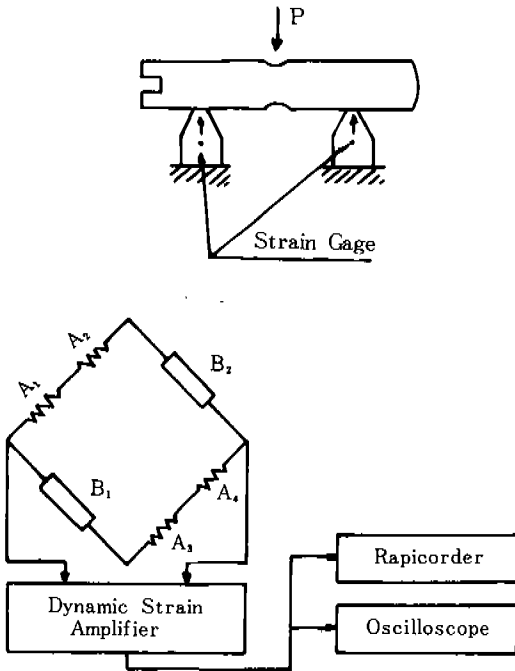


Fig. 3. Block Diagram for Measuring Repeated Impact Load.

로測定하였으며 아울러서 Rapicorder (Repet, Kyowa, RMS-11, 700Hz, Japan製)로記錄하였다.

4. 實驗結果 및 結果에 대한 考察

本研究에 있어서는 試驗片이 熱處理條件에 따르는 材料의 破壞挙動을 살펴보기 위하여 一連의 實驗을 實施하였다. 前述한 바와 같이, 本實驗에 앞서 熱處理條件을 달리한 各各의 試驗片材料의 一般의인 機械的 性質을 把握하기 위하여 引張試驗 및 衝擊試驗을 하였고, 아울러서 熱處理에 따르는 組織의 變化를 光学顯微鏡으로 觀察하였다.

衝擊疲勞試驗用 試驗片과 同一하게 熱處理한 材料로 加工된 引張試驗片과 衝擊試驗片을 實驗하여 引張強度, 延伸率, 断面收縮率 및 衝擊値를 調査하였는데, 그 實驗結果 Fig. 4에 表示하였다. Fig. 4에서 알 수 있는바와 같이 引張強度는 Tempering 溫度를 300°C에서부터 500°C까지 50°C씩 漸次的으로 上昇시킴에 따라서, 약 200

kg/cm²에서부터 130kg/cm²까지 下降하였으며, 延伸率은 840°C로 加熱한 후 Oil Quenching 하였을 때 0.2%에 불과하던 것이 Tempering 溫度를 300°C에서 부터 550°C로 上昇시킴에 따라 漸次的으로 增加하여 16%에 이르렀다.

断面收縮率은 Oil Quenching만 한 경우에 3.3% 이었는데, 350°C에서 Tempering 하였을 때 14%, 400°C에서 Tempering 하였을 때 22.4%, 500°C에서 Tempering 하였을 때 30.4% 그리고 550°C에서 Tempering 하였을 때 46%까지 增加하였다.

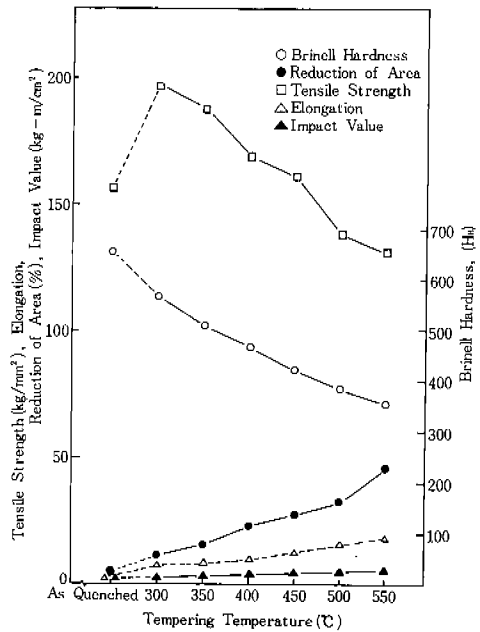


Fig. 4. Mechanical Properties of Si-Mn Steel.

또한, 모든 試驗片에 대한 硬度를 測定한 結果, Tempering 溫度의 上昇에 따라서 300°C에서 Tempering한 材料의 H_b 653이던 것이 550°C에서 Tempering한 材料의 硬度가 H_b 360으로 減少하였으며, Tempering 溫度가 50°C씩 上昇함에 따라서 硬度는 大略 H_b 60 程度씩 減少된 것을 알 수 있었다.

衝擊試驗은 前述한 것과 同一한 條件으로 熱處理한 各各의 試驗片에 대하여, 衝擊試驗을 實施한 結果, 衝擊値는 840°C로 Oil Quenching 하였을 때 0.5kg·m/sec²이었으며, Tempering 溫

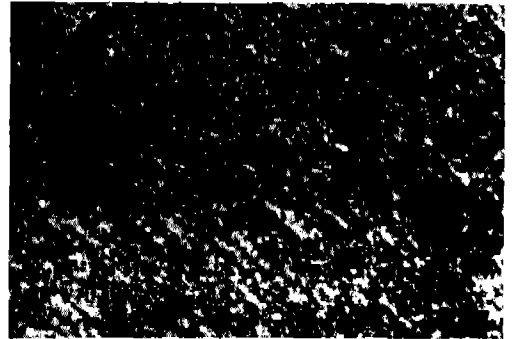
度の上昇과 더불어 衝擊値도 漸次로 増加하였으며, 550°C에서 Tempering 하였을때 3.8kg·m/sec²으로 되었다. Tempering 溫度의 變化에 따른 衝擊値도 역시 Fig. 4에 함께 表示하여 놓았다.

熱處理溫度의 變化에 따른 各 試驗片材料의 顯微鏡組織을 Photo. 1에 보였다. Photo. 1 a)는

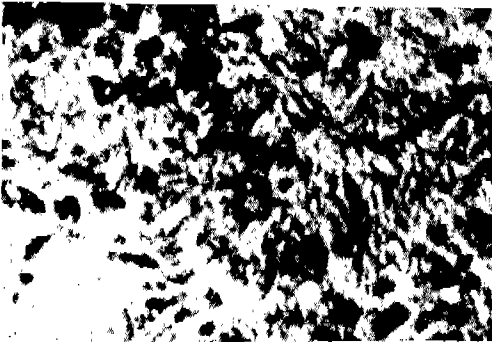
熱處理를 하지 않은 狀態의 組織으로써 Pearlite 組織을 보이고 있으며, Photo. 1 b)는 840°C에서 Oil Quenching한 것으로서 Martensite 組織을 보이고 있다. Photo. 5-3 c), d)는 350°C 400°C에서 Tempering 한 것으로서 Tempered-Martensite 組織을 보이고 있는데, 一部 또는 全部의 Cementite가 Spheroidite로 나타내고 Photo.



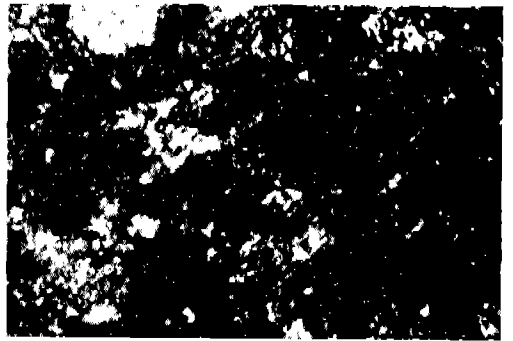
(a) As Rolled



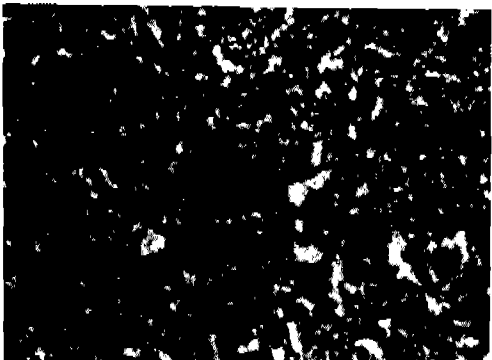
(d) Tempered at 400°C



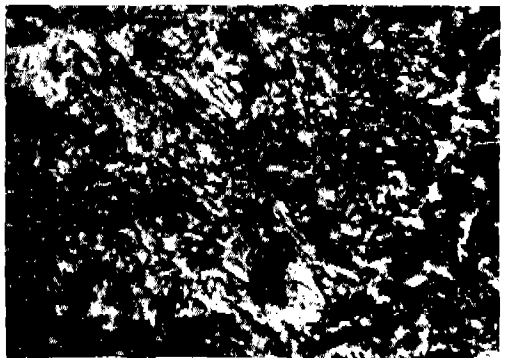
(b) Oil Quenched at 840°C



(e) Tempered at 450°C



(c) Tempered at 350°C



(f) Tempered at 500°C

Photo. 1. Micrographs of the Tested Materials (×400)

1 (e), (f)는 450°C 및 500°C에서 Tempering 한 것이며, Tempering 溫度가 높을수록 Tempered Martensite가 炭化物의 層狀化로 Medium Pearlite가 되는 傾向을 보이고 있다.

Oil Quenching한 후 350°C에서 Tempering한 試驗片의 機械的 性質은 硬度가 $H_v 509$ 이고, 衝擊 値가 $2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{cm}^2$ 이었다. 이 材料를 反復衝擊 試驗한 結果, 破壞時까지의 反復衝擊回數는 $10 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 單一衝擊Energy일때에 136회이던 것이 $15 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 單一衝擊Energy일 때에는 23회로 減少하는 傾向을 보이고, 또 $10 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 衝擊 Energy下的 破壞時까지 負荷된 總 Energy는 $360 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 이던 것이 $15 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 衝擊Energy下的 破壞時까지 負荷된 總Energy는 $340 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 로 되었다. 여기에서 $10 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 單一衝擊Energy를 作用시켰을 때의 總吸收Energy의 量이 多少 적었으며 그 比率은 94%이었다.

熱處理條件中 實用上 가장 널리 使用되는 Tempering 溫度 450°C에서 Tempering한 試驗片에 있어서 破壞時까지의 反復衝擊回數는 $10 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 衝擊Energy를 作用시켰을 경우 183회이던 것

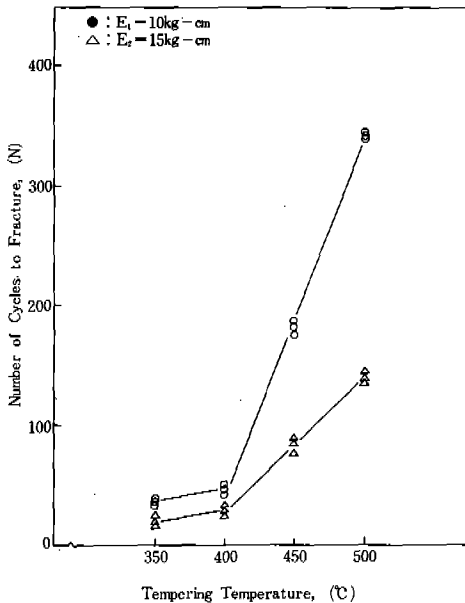


Fig. 5. Number of Cycles to Fracture vs. Tempering Temperature

이 $15 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 衝擊Energy를 作用시켰을 경우 82회로 減少되는 傾向을 보이며, 또 $10 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 反復衝擊Energy下에서 總吸收Energy는 $1830 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 이고, $15 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 의 反復衝擊Energy를 作用시켰을 때의 總吸收Energy는 $670 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 로 總吸收Energy의 量이 67%로 減少되었다.

이 實驗結果를 使用하여 破壞時까지의 總打擊數 및 總吸收Energy를 Tempering 溫度에 대하여 plot하여 Fig. 5 및 Fig. 6에 보였다. 그림에서 보는 바와 같이 破壞時까지의 總打擊數 및 總吸收Energy는 Tempering 溫度의 上昇에 따라 增加하고 있다.

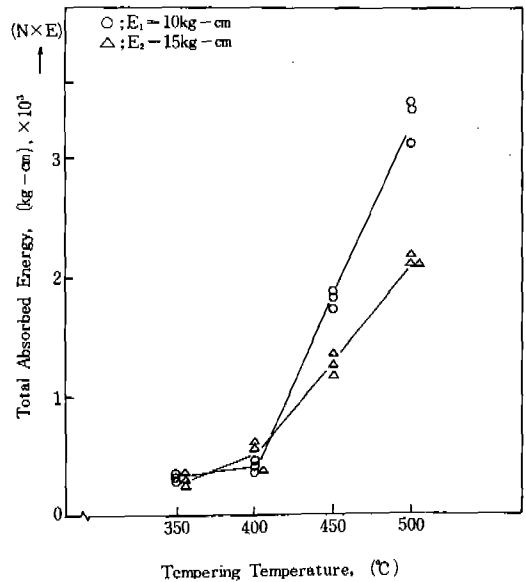


Fig. 6. Total Absorbed Energy vs. Tempering Temperature.

實驗結果를 綜合的으로 살펴볼때 反復衝擊Energy를 作用시켰을 때 單一衝擊Energy의 크기가 크면 材料의 疲勞壽命은 熱處理條件에 關係없이 大體的으로 減少하는 傾向이 있음을 알 수 있다.

Tempering 溫度, 즉, 引張強度의 變化에 따르는 各 試驗片의 衝擊疲勞挙動에 대하여 살펴보기로 한다.

Fig. 7에 引張強度의 增加에 따르는 破壞時까지의 總打擊數를 表示한 것이다. 이 그림에서 알

수 있는 바와 같이 大体的으로 引張強度가 높아짐에 따라서 疲勞壽命은 減少하고 있고, 引張強度가 約160kg/mm²(Tempering 溫度: 450℃)를 지남에 따라서 壽命은 減少하는 程度가 若干 甚한 것을 알 수 있다.

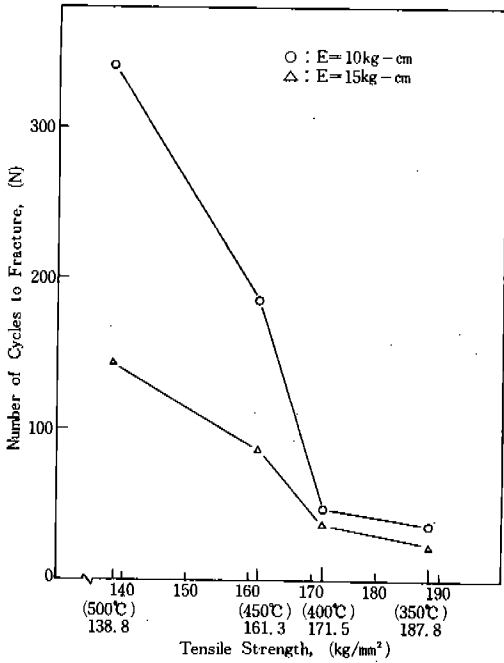


Fig. 7. Number of Cycles to Fracture vs. Tensile Strength for Constant Impact Loading.

引張強度의 増加에 따르는 疲勞壽命이 減少하는 傾向을 定量的으로 觀察하기 위하여 500℃에서 Tempering한 引張強度 約139kg/cm²인 때의 疲勞壽命을 基準으로 하여 引張強度의 増加에 따른 疲勞壽命의 減少率을 表示하여 보면 Fig. 8과 같이 된다. 이 그림에서도 알 수 있는바와 같이, 材料의 引張強度가 높아질수록 疲勞壽命은 大体的으로 減少하고 있으며, Tempering 溫度를 連續的으로 變化시켜 引張強度가 계속 높아지게 하였을 境遇, 本 研究에 使用된 材料에 있어서는 Tempering 溫度가 400℃ 附近에서 急激히 衝擊 疲勞壽命이 떨어지는 特異한 點이 存在한다는 事實을 發見할 수 있다.

通常的으로 Notch先端으로 부터의 Crack發生

條件 등을 實驗的으로 究明하고자 할 때에는 Notch先端에 發生하는 最大応力을 使用하여 實驗結果를 解析하는 境遇가 많다.

그러나, Notch先端이 crack과 같이 銳利할 때에는 最大応力은 使用할 수가 없고, 破壊力學에서의 応力擴大係數를 使用하는 것이 有利하다고 알려져 있다.

本 實驗에 있어서 Fig. 3의 Block Diagram에서 보였던 바와 같이 Strain Gage, Dynamic Strain Amplifier 및 Rapi coder에 의한 測定에서 얻어진 衝擊Energy 作用時의 荷重을 써서 応力擴大係數 K_L의 값을 計算하여,⁷⁾ 初期의 K_L과 破

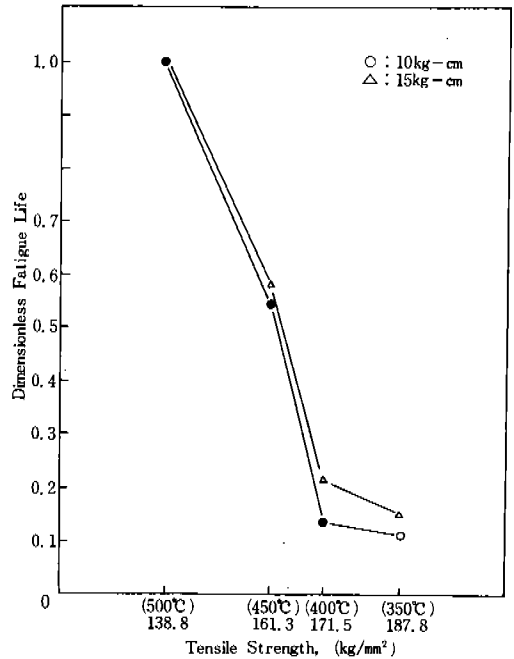


Fig. 8. Dimensionless Fatigue Life vs. Tensile Strength for Constant Impact Loading.

壞時까지의 總打撃數와의 關係를 圖式化하여 Fig. 9에 表示하였다. 이 그림에서 引張強度가 높으면 Notch先端에서의 K_L은 衝擊疲勞壽命에 대하여 影響을 크게 미치지 못하고, 오히려 引張強度가 낮아질수록 疲勞壽命은 K_L의 増加와 더불어 더욱 減少함을 보여주고 있다.

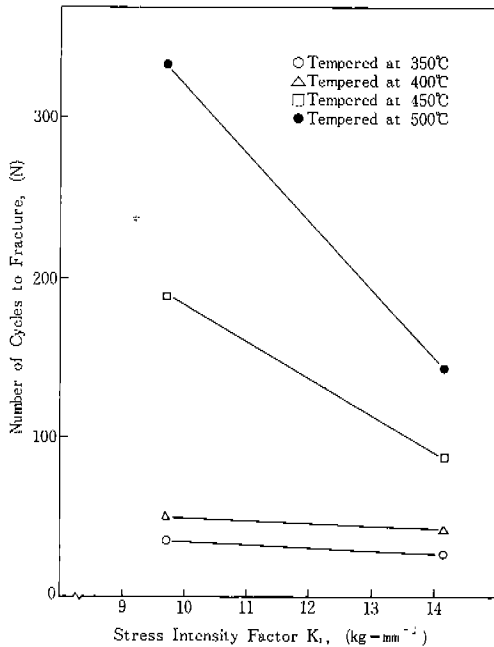


Fig. 9. Number of Cycles to Fracture vs. Stress Intensity Factor.

結 論

本 研究에서는 Si-Mn鋼을 対象으로 熱処理를 달리 하였을 때의 材料의 機械的 性質을 살펴 보았고, 또한 Notch를 갖고있는 材料의 疲勞破壞挙動을 破壞力學的인 側面에서 살펴 보았다.

本 研究에서 얻어진 結論을 要約하면 다음과 같다.

1) 本 實驗에 使用한 材料에서는 引張強度가 높을수록 疲勞壽命은 大体로 減少하였고, 이와같은 事實은 一般材料에 대해서도 拡張適用이 可能하리라고 思料된다.

2) 金屬을 熱處理등에 의하여 그 引張強度를 上昇시킬때 引張強度의 上昇에 따라 衝擊疲勞壽

命은 減少하나 材料에 따라 急激히 疲勞壽命이 減少하는 特異한 溫度가 存在한다. 本 研究에서는 大略 400°C 근방의 溫度에서 Tempering하면 疲勞壽命은 急激히 減少하는 結果를 나타내었다.

3) 單一衝擊Energy를 反復하여 作用시키는 境遇 Crack 先端에서의 応力擴大係數 K_I 의 크기는 衝擊疲勞壽命에 影響을 미친다. 즉, K_I 의 크기는 衝擊疲勞壽命에 影響을 미친다. 즉, K_I 이 크면 疲勞壽命은 짧고, K_I 이 작으면 疲勞壽命은 길다. 그러나 이 影響은 材料의 引張強度가 낮을수록 크고, 引張強度가 높을수록 오히려 작다.

REFERENCES

- 1) A. A. Griffith, "The Phenomena of Rupture and Flow in Solides," Phil. Trans. Roy. Soc., London, Series A, Vol. 221 (1920), p. 163.
- 2) E. Orowan, "Energy Criteria of Fracture," Welding Journal Vol. 34 (1955), p. 1575.
- 3) G. R. Irwin, "Analysis of Stresses and Strain Near the End of a Crack Traversing a Plate," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 24 (1957), p. 361.
- 4) G. R. Irwin, "Fracture," Handbuch der Physik, Springer, Berlin, Vol. 6 (1958), p. 551.
- 5) M. L. Williams, "On the Stress Distribution at the Base of a Stationery Crack," Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, No. 1 (1957), p. 109.
- 6) Standard Method of Test for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials, Annual Book of ASTM Standard, E-399 (1975), p. 561.
- 7) J. P. Benthem and W. T. Koter, "Approximations to Crack Problems," Chapter 3, Edited by G. C. Sih (1972).