高次 三角形 有限要素에 依한 矩形斷面의 温度分布와 熱傳達

Temperature Distribution & Heat Transfer of Rectangular Cross Section by the Higher-order Triangular Finite Element Method

龍 鎬 澤* · 徐 廷 一** · 趙 珍 鎬**

Abstract

This paper is studied an efficient temperature distribution and heat transfer of two-dimensional rectangular cross-section by the higher-order triangular finite dynamic element and finite difference.

This is achieved by employing a discretization technique based on a recently developed concept of finite dynamic elements[1][2], involving higher order dynamic correction terms in the associated stiffness and convection matrices.

Numerical solution results of temperature distribution presented herein clearly optimum element and show that FEM10 is the most accurate temperature distribution, but heat transfer and computational effort is the most acquired.

Nomenclature

B : Biot number

E : total element

f : force vector

g′ : heat generation

h : heat transfer coefficient

I : function to be minimized

k : thermal conductivity

K : stiffness matrix

l : length of an element

L : length of rectangular cross section

n : direction cosine of the outward normal vector.

N : shape function

s : surface

t : time

T : temperature

V : volume

ρc : heat capacity (density × specific heat capacity)

[ ] : square matrix

⟨ ⟩ : column matrix

⌊ ⌋ : row matrix

Σ : summation

Superscript

(e) : element

T : Transpose

Subscript

c : conduction

h : convection

i, j : position vector

x, y, z : direction

∞ : condition in the surrounding

I. 序 論

本 硏究는 B. Fraeijs de Veubeke 와 P. Silvester 가 硏究한 6 節點, 10節點 三角形 有限要素

* 한양대학교 대학원

** 한양대학교

法과 差分法을 使用하여 矩形斷面의 温度分布와 傳熱量을 求하여 正確解와 比較 檢討한 것이다.

高次 三角形 有限要素를 使用하여 溫度分布를 求함에 있어서 最近에 K. K. Gupta[1][2] 가 研究한 有限動要素를 移用하였고, 研究를 遂行함에 있어서 解析의 簡便化와 正確性等을 考慮하여 境界條件은 一定 溫度와 對流만 있는 2次元 定常狀態를 생각하였다.

實際 問題에 適用할 수 있게 하기 위하여 25個의 Biot 數에 對한 解를 求하여 正確解와의 比較를 通하여 最適 要素와 計算 時間이 가장 적게 걸리는 正確한 數值解法을 찾는 것에 目的을 두고 있다.

Ⅱ. Galerkin 法에 依한 有限要素

2－1 熱傳導 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$
$$+g'(x, y, z)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \cdots\cdots (1)$$

任意의 區域 c_1, c_2에서의 境界條件은

$$T=T(x, y, z)\ ;\ c_1 \cdots\cdots (2)$$

$$k_x\frac{\partial T}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial T}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial T}{\partial z}n_z+q_c$$
$$+h(T-T_\infty)=0\ ;c_2 \cdots\cdots (3)$$

여기서 q_c, $h(T-T_\infty)$는 各各 境界에서의 傳導와 對流에 依한 熱損失을 表示한다.

2－2 汎函数와 最小値

方程式(1)의 最小値[8][9] 는

$$I(T)=\int_v\frac{1}{2}\left\{k_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.-2\left(g'-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}\right)T\right\}dv+\int_s\left\{q_cT\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}h(T-T_\infty)^2\right\}dS \cdots\cdots (4)$$

任意의 物体를 無限히 많은 要素로 分割하면 式(4)는

$$I(T)=\sum_{e=1}^{E}\int_v\frac{1}{2}\left\{\lfloor g^{(e)}\rfloor^T[D^{(e)}]\lfloor g^{(e)}\rfloor-2T^{(e)}g'^{(e)}\right\}dv$$
$$+\sum_{e=1}^{E}\left\{\int_v\rho c\lfloor N^{(e)}\rfloor^T\lfloor N^{(e)}\rfloor\right\}dv\frac{\partial T}{\partial t}$$
$$+\int_s\frac{1}{2}h^{(e)}(T^{(e)}-T_\infty^{(e)})^2 ds \cdots\cdots (5)$$

但, $\lfloor g^{(e)}\rfloor^T=\left\langle\frac{\partial T}{\partial x},\ \frac{\partial T}{\partial y},\ \frac{\partial T}{\partial z}\right\rangle$

$$\lfloor D^{(e)}\rfloor=\begin{bmatrix}k_x & 0 & 0\\ 0 & k_y & 0\\ 0 & 0 & k_z\end{bmatrix}$$

여기에 形狀函数를 導入하면

$T^{(e)}=\lfloor N^{(e)}\rfloor\langle T\rangle$로 되며, $T^{(e)}$의 微分값을 $\langle g^{(e)}\rangle$라 하면

$$\langle g^{(e)}\rangle=\begin{Bmatrix}\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x}\\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{2N_n}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ \vdots\\ T_n\end{Bmatrix}$$
$$=[B^{(e)}]\langle T\rangle \cdots\cdots (6)$$

最小値를 求하기 위하여 式(6)을 式(5)에 代入하여 微分한 값을 零으로 놓으면

$$\left([K_c^{(e)}]+[K_h^{(e)}]\right)\langle T\rangle+\left[C^{(e)}\right]\frac{\partial T}{\partial t}+\langle f^{(e)}\rangle=0$$
$$\cdots\cdots (7)$$

여기서

$$[K_c^{(e)}]+[K_h^{(e)}]=\int_v\lfloor B^{(e)}\rfloor^T[D^{(e)}]\lfloor B^{(e)}\rfloor dv$$
$$+\int_s h\lfloor N^{(e)}\rfloor^T\lfloor N^{(e)}\rfloor ds$$

$$[C^{(e)}]=\int_v\rho c[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]dv$$

$$\langle f^{(e)}\rangle=-\int_v g'\lfloor N^{(e)}\rfloor^T dv+\int_s q_c\lfloor N^{(e)}\rfloor^T ds$$
$$-\int_s hT_\infty\lfloor N^{(e)}\rfloor^T ds$$

Ⅲ. 数值 解析例

研究를 遂行함에 있어서 材質과 熱傳導 係数는 一定하며, 各 要素 自体内에 熱源이 없는 2次元 定常狀態로 假定하면 方程式(7)은

$$([K]+[K_h])\langle T\rangle = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

로 된다.

Fig. 3-1과 같은 한 면은 一定 温度 t_0, 두 면은 断熱되어 있고, 나머지 한 面에서 対流로 因한 傳熱이 이루어지는 矩形断面($b=\ell$)에 式(8)을 適用시킨다.

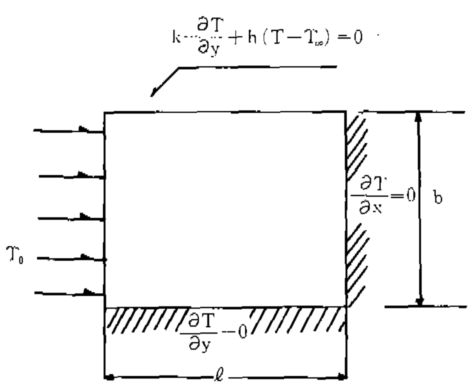

Fig. 3-1. Rectangular cross section.

Fig. 3-1과 같은 断面을 매쉬(mesh) 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6 로 分割해서 節点이 各各 10, 6, 3인 三角形 要素(FEM10, FEM 6, FEM 3)와 差分法(FDM)에 対한 温度分布를 求한다.

Ⅳ. 比較 및 檢計

4-1. 温度 分布

25個의 Biot 数에 対한 矩形断面의 温度分布를 求하여 平均 相対誤差와 mesh의 크기(要素의 数)에 対한 그림은 Fig. 4-1과 같다. Fig. 4-1에서 FEM10, FDM, FEM 6, FEM 3는 各各 매쉬 2×2, 3×3, 4×4, 5×5에서 平均相対誤差가 2% 以下이므로 直四角形(가로 : 세로=2:1)과 같이 矩形断面도 FEM 3의 매쉬가 5×5以上이어야 한다고 말한 T. Shuku & K. Ishihara[4], D.H Norrie & G. Devries[7]의 結果와 一致한다.

10節点, 6節点 三角形 要素는 3節点 要素로 9個, 4個의 要素로 分割될 수 있으므로, 3節

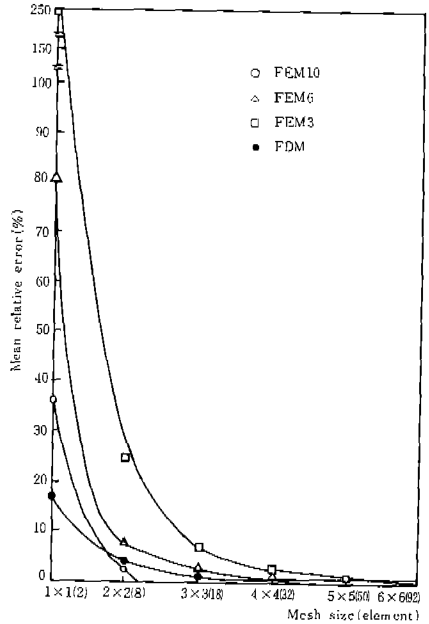

Fig. 4-1. Mean relative error for a plane triangular element+

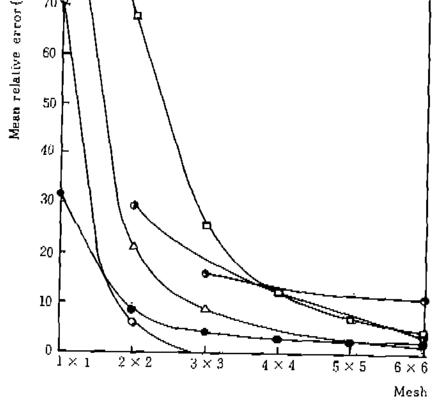

Fig. 4-2. Mean relative error of convection.

点 要素와 같은 節点을 가진 10節点 要素(FEM 101)와 6節点 要素(FEM61)의 平均 相対誤差는 매쉬 6×6에서 0.742%, 2.666%이었다.

Fig. 4-2는 対流 熱傳達이 일어나고 있는 境界의 温度分布이다.

Fig. 4-1과 同一하게 FEM10의 誤差가 매쉬 2×2以上에서는 거의 零에 가까우며, 또한 FDM, FEM101, FEM61이 FEM 3 보다 優秀함을 보여 주고 있다.

4-2. 熱傳達과 計算勞苦

4-2-1. 熱傳達

Fig. 4-3은 各 매쉬에 対한 傳熱量의 平均相対誤差와의 関係이다.

Fig. 4-1과 같이 FEM10이 가장 優秀하며 FEM6, FDM, FEM 3의 順으로 되어 있다.

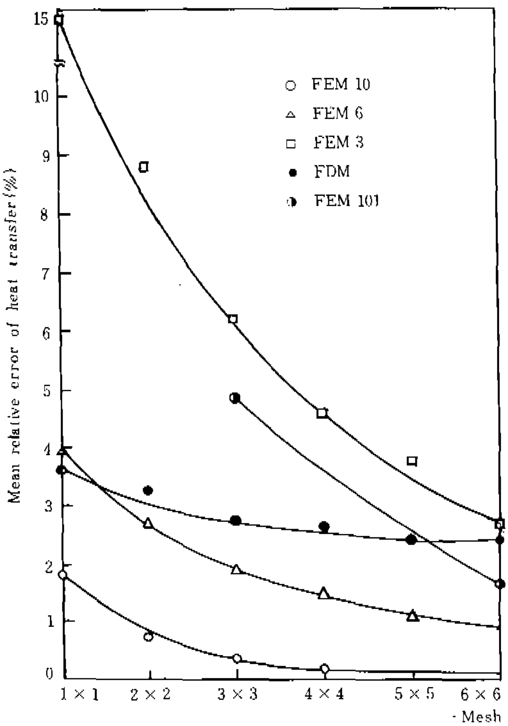

Fig. 4-3. Heat transfer for a triangular element.

温度分布에서 FEM 6 보다 좋았던 FDM이 매쉬가 커짐에 따라 FEM 6 보다 나빠짐을 알 수 있다.

Fig. 4-3은 25個의 Biot 数(0.1~50)에 対한 것이며, Biot 数가 10以下(괄호안의 숫자)일 때는 Table 1에서 보는 바와 같이 FEM10, FEM6, FDM, FEM 3의 順序로 되어 있으며, FEM 61은 搖動이 생긴다.

Table 1. Mean relative error of heat transfer.

MESH \ APPM	FEM 10	FEM 6	FEM 3	FDM	FEM101	FEM61
1×1	1.845 (0.295)	4.945 (1.718)	14.973 (6.338)	3.597 (3.979)		
2×2	0.794 (0.186)	2.644 (0.429)	8.859 (4.168)	3.298 (3.339)		
3×3		1.956 (1.528)	6.266 (2.468)	2.779 (2.452)	4.947 (1.649)	
4×4			4.579 (1.346)	2.539 (2.067)		1.129 (0.661)
5×5			3.736 (0.843)	2.413 (1.820)		
6×6			2.596 (0.551)	2.411 (1.729)	1.620 (0.282)	8.642 (4.636)

4-2-2. 計算 勞苦

D. H. Norrie & G. Deveries[7]의 方法에 依한 半밴드 幅은 Table 2와 같다.

Table 2. Bandwidth for a mesh.

MESH \ APPM	FEM10	FEM 6	FEM 3	FDM
1×1	15	6	2	2
2×2	21	10	3	3
3×3	27	14	4	4
4×4		18	5	5
5×5			6	6
6×6			7	7

Fig. 4-4는 n을 次数(m+1)을 剛性 마트릭스의 半밴드幅이라 할 때 平均 相対誤差를 그린 것이다.

FEM10이 어떤 方法보다도 計算機의 勞苦가 큼을 알 수 있다.

計算 勞苦는 FEM3, FDM, FEM6, FEM10의 順序로 된다. 즉 次数가 크면 勞苦가 크다는 것을 알 수 있으며, FEM10과 FEM 6 는 FEM 3 보다 約 112, 16培 정도의 힘이 든다.

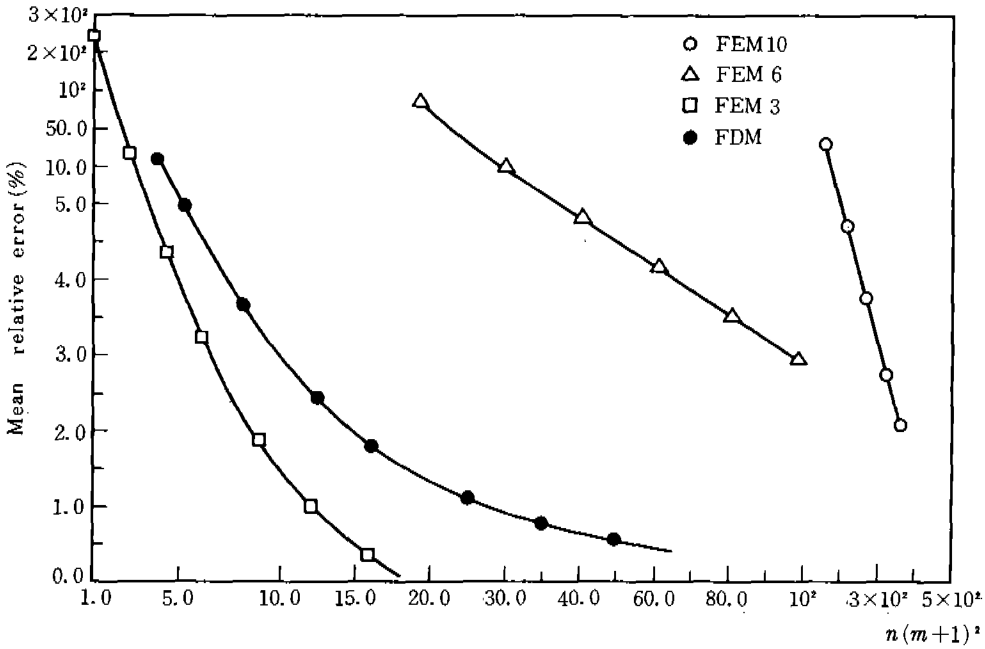

Fig. 4 - 4. Computational effort (n : order, $m+1$: half bandwidth)

V. 結 論

1. 相対誤差 1%以内의 溫度分布를 求하기 위한 FEM10, FDM, FEM6, FEM 3의 매쉬는 2×2, 3×3, 4×4, 5×5 이다.

2. Biot 数가 10以下에서의 熱傳達은 FEM 10, FEM6, FDM, FEM 3 의 順이고, 10以上에서는 FDM이 FEM 6 보다 優秀하며, 2%以内의 相対誤差를 求하기 위한 FEM10, FEM 6, FDM, FEM 3의 매쉬는 각각 2×2, 4×4, 7×7, 7×7以上이어야 한다.

3. 計算機 勞苦는 FEM10, FEM 6 이 FEM 3 보다 約 112, 6培 정도이다.

參 考 文 献

1. K. K. Gupta, "Development of a Finite Dynamic Element for Free Vibration Analysis of Two-Dimensional Structures," Int J for Num Meth in Eng. Vol. 12, pp. 1311-1327, 1978.

2. K. K. Gupta, "Finite Dynamic Element Formulation for a Plane Triangular Element, " Int J for Num Meth in Eng. Vol. 14, pp. 1431-1448, 1979.

3. A. F. Emery & W. W. Carson, "An Evaluation of the Use of the Finite Element Method in the Computation of Temperature," J of Heat Tran. pp. 136~145, May 1971.

4. T. Shuku & K. Ishihara, " The Analysis of the Acoustic Field in Irregularly Shaped Rooms by the Finite Element Method," J of Sound and Vibration. Vol 29(1), pp. 67-76, 1973.

5. D. G. Harrison & Y. K. Cheung, "A Higher-Order Triangular Finite Element for the Solution of Field Problem in Orthotropic Media," Int J for Num Meth in Eng. Vol. 7, pp. 287-295, 1973.

6. U. Salaan & R. S. Sandhu, "A Finite Element Galerkin Formulation and its Numerical Performance," Int J for Num Meth in Eng. Vol. 10. pp. 1077-1095, 1976.

7. D. H. Norrie & G. Devries, An Introduction to Finite Element Analysis, Academic Press, pp. 138-143, 1978.

8. G. E. Myers, Analytical Methods in Conduction Heat Transfer, McGraw-Hill, pp. 362-388, 1971.

9. L. J. Segerlind, Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Son, pp. 71-77, 1976.

10. C. A. Brebbia & S. Walker, Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, pp. 54-79, 1980.