

不定流의 IMPLICIT 數值解析

李 鍾 泰*

An Implicit Method to Analysis Unsteady Flow

Jong-tae LEE*

In order to make a numerical modeling for the one dimensional unsteady flow which expressed by Saint Venant partial differential equations, Preissmann's implicit scheme was used, and it's stability and accuracy was mentioned.

By introducing recurrence relations make it possible to use double sweep algorithm.

Effective parameters to the result were the values of the $\Delta t/\Delta x$, θ and the chezy coefficient. In order to get numerical solutions with enough accuracy, $\Delta t/\Delta x$ should not be far from the value of 1, and the criteria of the θ was $0.6 < \theta < 1.0$ for the stability without condition.

This model should be calibrated by real field data, and expected to be developed for the simulation of the river system and to the long wave analysis for one dimensional coastal zone problem.

緒 論

Saint Venant式은 두개의 非線形 偏微分方程式으로 구성되어 있다. 이 式들을 실제의 流体흐름 解析에 適用함에 있어 特殊한 경우를 제외하고는 解析的 方法으로는 求解를 구하기 어렵다(Yevdjovich, 1964). 따라서 별도의 數值解析의 方法이 강구되는 바, 一般적으로 有限差分法에 의해 偏微分方程式을 代數方程式으로 變形시킨 후 컴퓨터에 의해 近似值를 求하게 된다.

一般적으로 安定성과 精度가 explicit scheme보다 높은 implicit scheme은 Richtmyer(1957)에 의해 熱傳達解析에 適用된 것이 처음이며 그후 開水路 不等流解析에 사용되기 시작했다.

本論文에서는 1960年 以後에 개발된 Preissmann (1960)의 SOGREAH scheme을 Saint Venant式에 應用 導入하는 問題에 關하여 檢討하였다.

資料 및 方法

1. 理論 式

Saint Venant式은 雙曲線形 偏微分方程式이며 式 1), 2)와 같이 表現된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b_s \frac{\partial h}{\partial t} - q = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} - I_b \right) + S_f - u_q \cdot q = 0 \dots\dots\dots(2)$$

에너지 損失項 S_f 는 自由水面의 흐름에서는 Manning의 粗度係數, 또는 chezy의 係數로 表現되는 바 흐름의 底面摩擦抵抗의 정도에 따라 그 크기가 決定된다. 式 3), 4)에서

$$S_f = \frac{g|Q|Q}{C^2 A R} \dots\dots\dots(3)$$

*釜山水產大學; National Fisheries University of Busan.

$$S_f = n^2 \frac{g|Q|Q}{AR^{4/3}} \dots\dots\dots(4)$$

2. Preissmann Implicit Scheme

2.1 有限差分方程式

Preissmann(1960)에 의하면 獨立變數와 그 微分値를 Fig. 1의 格子網에서 다음 差分式으로 表現하였다.

$$f(x, t) \approx \frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n + f_j^{n+1} - f_j^n}{2\Delta t} \dots\dots\dots(7)$$

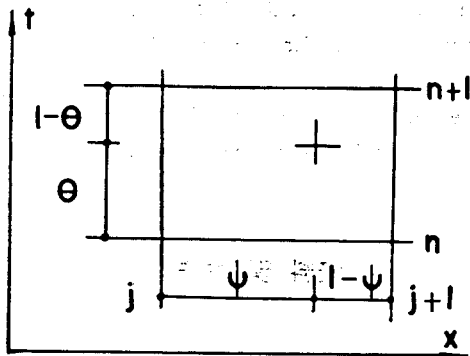


Fig.1 Preissmann implicit scheme.

式(5), (6), (7)의 形式을 (1), (2)式에 適用하고 各 格点의 未知變數들을 水深 h와 流量 Q로하여 다음과 같은 差分方程式들을 誘導하였다. (式 (8)(9))

$$b_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} \left\{ \frac{1}{2} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n}{\Delta t} \right\} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} - q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{\left(\frac{\eta}{A}\right)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} Q_{j+1}^n - \left(\frac{\eta}{A}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} Q_j^n}{\Delta x} \dots\dots\dots(9)$$

$$+ g A_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} \left\{ \theta \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\Delta x} - I_b \right\} + \frac{1}{2} g \left\{ \frac{Q_j^n |Q_j^{n+1}|}{(C^2 AR)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{Q_{j+1}^n |Q_{j+1}^{n+1}|}{(C^2 AR)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}} \right\} - (u_{\theta} q)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

式(8)과 (9)를 整理하여 式(10)과 (11)로 表現하고 各 係數의 값들이 決定되었다.

$$A1_j Q_j^{n+1} + B1_j h_j^{n+1} + C1_j Q_{j+1}^{n+1} + D1_j h_{j+1}^{n+1} = E1_j \dots\dots(10)$$

$$A2_j Q_j^{n+1} + B2_j h_j^{n+1} + C2_j Q_{j+1}^{n+1} + D2_j h_{j+1}^{n+1} = E2_j \dots\dots(11)$$

2.3 Double Sweep 알골리즘

式(10), (11)로써 five-diagonal matrix가 되며 이를 2個의 補助關係式(recurrence relations)을 使用하여 tri-diagonal matrix形으로 變換한 후 Double Sweep의 過程을 거쳐 解를 구한다(Abbott, 1977). 卽 式(10), (11)에 다음 (12), (13)式을 代入하면 式(12a), (13a)를 얻는다.

$$Q_j^{n+1} = F_j h_j^{n+1} + G_j \dots\dots\dots(12)$$

$$h_j^{n+1} = H_j Q_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + I_j h_{j+1}^{n+1} + J_j \dots\dots\dots(13)$$

$$Q_{j+1}^{n+1} = F_{j+1} h_{j+1}^{n+1} + G_{j+1} \dots\dots\dots(12a)$$

$$h_j^{n+1} = H_j Q_{j+1}^{n+1} + I_j h_{j+1}^{n+1} + J_j \dots\dots\dots(13a)$$

여기서,

$$F_{j+1} = \frac{-D1_j - \alpha I_j}{C1_j + \alpha H_j} \dots\dots\dots(14)$$

$$G_{j+1} = \frac{-\alpha J_j - (A1_j G_j - E1_j)}{C1_j + \alpha H_j} \dots\dots\dots(15)$$

$$H_j = \frac{-C2_j}{\gamma} \dots\dots\dots(16)$$

$$I_j = \frac{-D2_j}{\gamma} \dots\dots\dots(17)$$

$$J_j = \frac{-A2_j G_j + E2_j}{\gamma} \dots\dots\dots(18)$$

단,

$$\alpha = A1_j F_j + B1_j$$

$$\gamma = A2_j F_j + B2_j$$

式(14)~(18)로부터 補助關係式의 係數 F_{j+1} , G_{j+1} , H_j , I_j , J_j 의 값이 Fore Sweep에 의해 먼저 구해진 후

Back Sweep을 통하여 $Q_j, H_j, Q_{j-1}, H_{j-1}$ 의 順序로 解를 구한다.

本 Double Sweep을 可能하게 하기 爲하여서는 境界條件들이 必要하게 된다. 卽 F_1, G_1 의 값이 주어지거나 h_1^{n+1} 의 값이 既知이어야 한다. 外部 境界條件은 다음 (1), (2), (3)의 세가지 경우중의 하나에 해당되게 되며 各各의 경우에서 F_1, G_1 을 다음과 같이 決定한다.

(1) $h_1 = h_1(t)$ 가 既知일 때
式(12)로부터

$$h_1 = \frac{Q_1}{F_1} - \frac{G_1}{F_1}$$

$F_1 \gg Q_1$ 이면 $G_1 = F_1 h_1$ 이 된다. 適合한 F_1 의 값을 취함으로써 誤差를 無視할 수 있을 程度로 줄일 수 있는 바 Preissmann(1963)의 의하면 F_1 의 값은 $10^4 \sim 10^6$ 이다.

(2) $Q_1 = Q(t)$ 가 既知일 때

式(12)에서 $F_1 = 0$ 로 놓으면 $G_1 = Q_1$ 이 된다.

(3) $Q_1 = f(h)$ 가 既知일 때

$$Q_1^{n+1} = f(h_1^n) - \frac{df}{dh_1} h_1^n + \frac{df}{dh_1} h_1^{n+1}$$

따라서

$$F_1 = f(h_1^n) - \frac{df}{dh_1} h_1^n$$

$$G_1 = \frac{df}{dh_1}$$

이 된다.

$A_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta}, \left(\frac{\eta}{A}\right)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}, (C^2 AR)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}$ 등의 값은 初期值로

서 $A_{j+\frac{1}{2}}^n, \left(\frac{\eta}{A}\right)_{j+1}^n, (C^2 AR)_{j+1}^n$ 을 取하여 $A_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$,

$\left(\frac{\eta}{A}\right)_{j+1}^{n+1}, (C^2 AR)_{j+1}^{n+1}$ 을 구한 후 $A_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta}, \left(\frac{\eta}{A}\right)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}$,

$(C^2 AR)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}$ 의 近似值가 1次로 구해진 후 反復 試算을 實施한다. 一般的으로 두 차례의 試算值로써 充分하다고 생각된다. 以上の 內容을 Fig. 2로써 壓縮하여 表現하였다.

結果 및 考察

1. 安定性의 精度

安定性의 評價를 위하여 線形化(Lineanize)된 方程式에 對하여 Spectral analysis를 適用하였다. 卽 解析의 便利를 위하여 側方向 流入과 기타 常數項들을 除去시키면 다음과 같은 線形微分方程式 (19)式으로

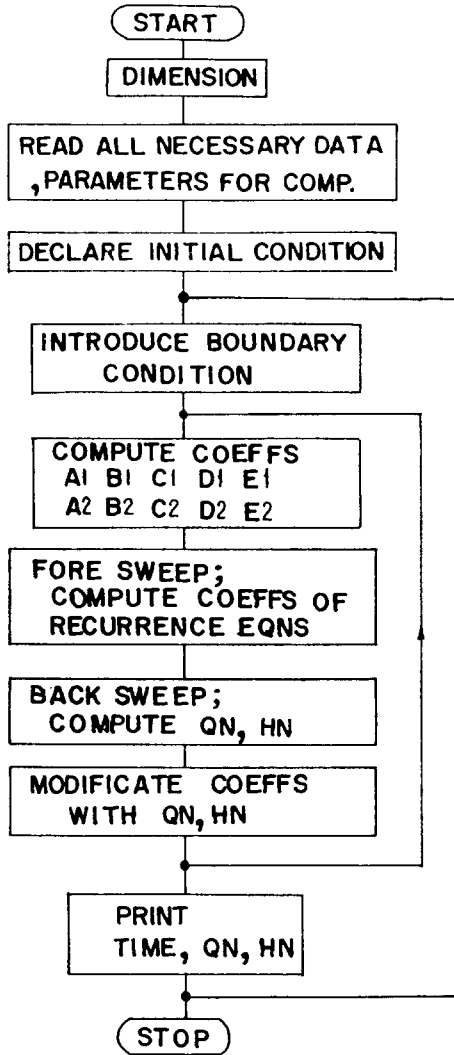


Fig. 2 Flow diagram.

나타나는 바 가장 간단한 不定流 基礎方程式의 한 形態이다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

Preissmann形의 差分方程式으로 表現하면

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n + u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} + \frac{\theta \left(h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1} \right) + (1-\theta) \left(h_{j+1}^n - h_j^n \right)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n + h_j^{n+1} - h_j^n}{2\Delta t} + \frac{\theta(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + (1-\theta)(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x} = 0 \dots\dots\dots(20)$$

(20)式의 解를 Fourier series의 成分으로 表現하여 (式(21)(22)) (20)式에 代入하면 (23式)이 얻어진다. (Mahmood, 1975)

$$h_j^n = \bar{h} e^{i(\beta n \Delta t + \sigma j \Delta x)} \dots\dots\dots(21)$$

$$u_j^n = \bar{u} e^{i(\beta n \Delta t + \sigma j \Delta x)} \dots\dots\dots(22)$$

$$e^{i\beta \Delta t} - 1 = -\frac{4QR^2}{1+4\theta^2 R^2} \pm i \frac{2R}{1+4\theta^2 R^2} \dots\dots\dots(23)$$

여기서, $R = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan\left(\frac{\sigma \Delta x}{2}\right)$

$\beta = \beta^R + i\beta^I$ 로하면 式(23)은

$$e^{-\beta^I \Delta t} \cos \beta^R \Delta t - 1 = -\frac{4\theta^2 R^2}{1+4\theta^2 R^2} \dots\dots\dots(24)$$

$$e^{-\beta^I \Delta t} \sin \beta^R \Delta t = \pm \frac{2R}{1+4\theta^2 R^2} \dots\dots\dots(25)$$

式(24), (25)를 $\beta^R \Delta t$, $\beta^I \Delta t$ 에 對해 各各 풀면 (26)式이 된다.

$\tan \beta^R \Delta t =$

$$\pm \frac{2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan\left(\frac{\sigma \Delta x}{2}\right)}{\left[1 - 4\theta(1-\theta)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \tan^2\left(\frac{\sigma \Delta x}{2}\right)\right]} \dots\dots\dots(26)$$

$$e^{-\beta^I \Delta t} = \frac{1 + 4\theta^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \tan^2\left(\frac{\sigma \Delta x}{2}\right)}{\sqrt{4R^2 + \left[1 - 4\theta(1-\theta)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \tan^2\left(\frac{\sigma \Delta x}{2}\right)\right]^2}} \dots\dots\dots(27)$$

(27)式에서 $\theta = 0.5$ 일 때 $e^{-\beta^I \Delta t}$, 即 時間에 따른 解의 減衰(Damping)는 일어나지 않는다. $\theta < 0.5$ 일 때 $e^{-\beta^I \Delta t} > 1$, 即 不安定하다. 또한 $\theta > 0.5$ 이면 $e^{-\beta^I \Delta t} < 1$ 即 解의 人爲的 減衰現象이 생긴다. 따라서 振幅(amplitude)에 關해서는 $\theta = 0.5$ 로 함이 最適이라 할 수 있으나 波速(celerity)에 對하여는 그렇지 못하다. 即 $\theta = 0.5$ 일 때 式(26)은

$$\tan^2\left(\frac{\beta^R \Delta t}{2}\right) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \tan^2\left(\frac{\sigma \Delta x}{2}\right) \dots\dots\dots(28)$$

波速의 數值解析解 c^* 는 $\Delta t/\Delta x = 1$ 이 되는 특수한 경우를 제외하고는

$$c^* = \frac{\beta^R}{\sigma} \neq c = 1$$

(28)式에서 임의의 $\sigma \Delta x$ 에 對한 β^R 을 구하면 $c^* = f(\sigma \Delta x)$ 의 曲線(Fig.3)을 얻게 되는 바 數值解析值 c^* 와 $c=1$ 과는 差異가 있음을 보여준다. 또한 $\theta = 2/3$ 일 때 式(26)으로부터 Fig.4의 結果를 얻었다. Fig.3, Fig.4에서 볼 수 있는 바와 같이 Fourier series 成分計算值에 의한 波速은 $\Delta x/L$, Δt , θ 에 좌우된다. 또한 成分(component)이 길 때 ($\Delta x/L$ 이 작을 때) 波速은 解析的 解와 큰 差異가 없으며 특히 $\Delta t/\Delta x = 1$ 일 때는 거의 같은 값을 가진다. 한편 Short wave이고 $\Delta t/\Delta x \ll 1$ 일 때 혹은 $\Delta t/\Delta x \gg 1$ 일 때는 그 正反對가 된다. 따라서 成分들의 分散은 $\Delta t/\Delta x$ 가 매우 작거나 또는 매우 클 때 增大된다.

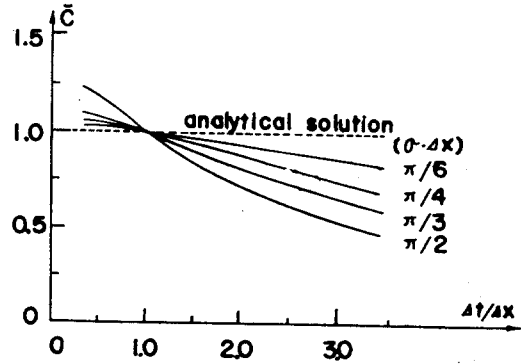


Fig.3 Comparison of computational and analytical celerities for $\theta = 1/2$

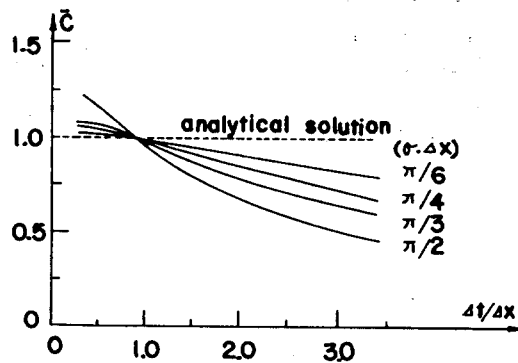


Fig.4 Comparison of computational and analytical celerities for $\theta = 2/3$

2. 數值實驗

安定性과 精度의 解析理論을 확실하게 하기 위하여 다음과 같이 數值實驗을 實施하였다.

2.1 基礎方程式의 境遇

(1) 初期條件

$$u(j\Delta x, 0) = 0$$

$$h(j\Delta x, 0) = 1.0$$

여기서, $j=0, 1, 2, \dots, N$

(2) 境界條件

$$h(0, t) = 1.0 + \frac{t}{60}, \quad 0 < t < 60 \text{ sec}$$

上流: $h(0, t) = 2.0, \quad t > 60 \text{ sec}$

下流: $u(n\Delta x, t) = 0$

上記 (1), (2)의 條件을 사용하여 數值實驗이 實施되었는 바 Fig. 5, Fig. 6은 그 結果이다. 卽 $\Delta t/\Delta x = 1.0$ 일 때 $\theta = 0.5$ 인 경우의 數值解析의 結果는 解析의 解와 一致되었다. $\theta \neq 0.5$ 인 경우에는 간섭(attenuation)과 減衰現象은 크게 나타났었다. 卽 $\Delta t = 20 \text{ sec}$ 이고 $\Delta t/\Delta x = 2.0$ 일 때 分散(dispersion)이 나타났으며 특히 $\theta = 0.5$, $\theta = 0.55$ 일 때 더욱 뚜렷하였다. 그러나 θ 의 값이 점차로 증가함에 따라 人爲的 減衰가 나타났고 分散의 形態가 완만(Smoothing out)해 졌다.

또한 θ 가 0.5일 때 振動이 나타났는 바 $\theta > 0.66$ 이 되면 소멸되었다. 따라서 理論的으로는 最適值인 $\theta = 0.5$ 가 實際的으로는 결함이 있다고 볼 수 있는 바 振動을 억제시키고 에너지의 減衰現象을 고려하기 위해서는 $\theta > 0.5$ 를 취하거나 摩擦抵抗을 導入하게 된다. 그러나 摩擦抵抗이 작고 $\theta = 0.5$ 일 때 振動發生이 역시

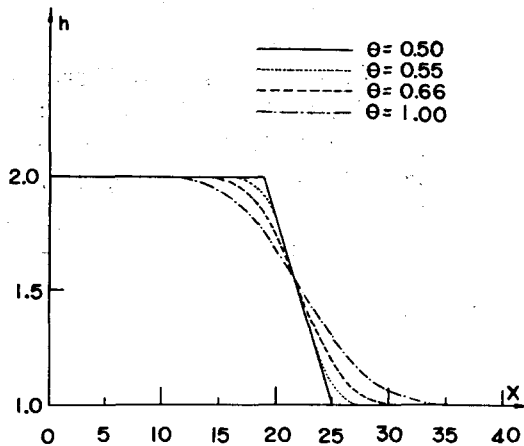


Fig. 5 Comparison of analytical and numerical solutions of water elevation profile for various values of parameter ϕ and for $\Delta t/\Delta x = 1$.

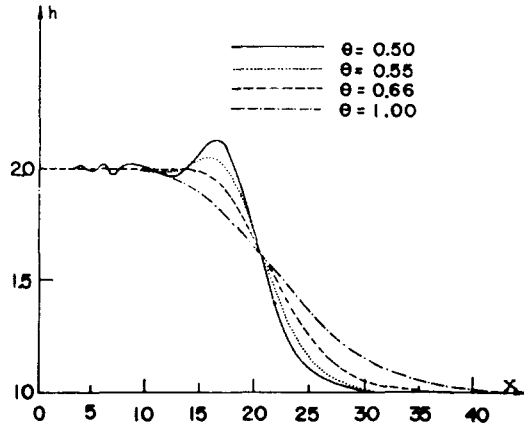


Fig. 6 Comparison of analytical and numerical solutions of water elevation profile for various values of parameter ϕ and for $\Delta t/\Delta x = 2$.

우려되므로 $0.6 < \theta < 1.0$ 으로써 無條件 安定사킴이 有利하다.

2.2 Saint Venant式의 境遇

(1) 初期條件

$$Q(j\Delta x, 0) = 3162 \text{ (m}^3/\text{S)}$$

$$h(j\Delta x, 0) = 10.0 \text{ (m)}$$

여기서, $j=0, 1, 2, \dots, jj$

(2) 境界條件

上流: Fig. 7.의 水文曲線

下流: $h(jj\Delta x, t) = 10 \text{ (m)}$

上記 (1), (2)의 條件은 上流에 降雨 또는 水門造作에 의해 任意의 水文曲線으로 나타났을 때 下流方向으로의 長波의 傳播를 解析하는 경우인 바 이 때 下流는 바다와 接해 있으며 潮汐의 影響은 거의 없라고 보았다.

Chezy의 係數를 매우 크게 하였을 때 θ 值의 變化에 따른 結果值은 Fig. 5, 6과 같아서 θ 의 影響이 매우 重大함을 알 수 있었다. Fig. 8.은 chezy의 값이 實際自然狀態의 값인 $50 \text{ m}^{1/2}/\text{sec}$, $\theta = 0.6$, 傾斜도가 0.0001인 短形斷面 흐름에서의 24時間의 數值實驗 結果이며 長波는 傳播되는 過程에서 摩擦項과 θ 의 影響으로 減衰現象을 보였고 安定性있게 수렴함을 알 수 있었다.

따라서 chezy係數와 θ 值를 適切히 구사함으로써 本方法是 不定流 흐름의 一次元的 解析에 使用할 수 있는 有用한 技法임을 確認할 수 있었다.

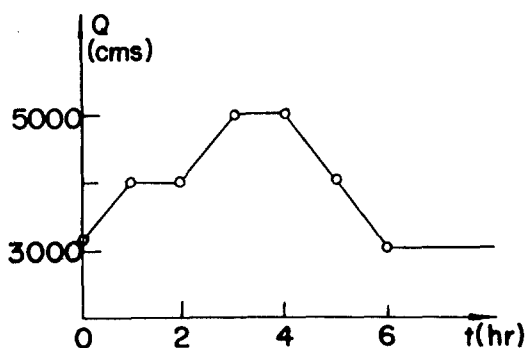


Fig. 7 Hydrograph for upstream boundary condition.

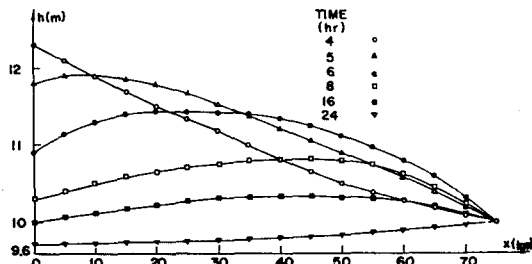


Fig. 8 Model test for propagation of long wave (after peak time at upstream boundary)

記 號

- A Cross-Sectional area
- C Coefficient of Chezy
- L Wave length
- Q Discharge
- I_b Bottom slope (I : Imaginary quantity)
- R Hydraulic radius or Real quantity
- S_f Frictional term
- T Wave period
- b_s Width
- c Wave celerity
- g acceleration of gravity
- h Water depth
- n Manning's coefficient of roughness
- q Lateral inflow
- t Time
- u velocity
- u_q Lateral inflow velocity
- β ($=2\pi/T$), corresponds to the wave frequency
- η Momentum correction factor
- σ ($=2\pi/L$) corresponding to the wave number

要 約

一次元 不定流 解析의 數值解析模型을 만들기 위하여 Preissmann型的 Implicit法을 Saint Venant式에 導入하였으며 模型의 安定性과 精度에 關하여 檢討하였고 數值實驗을 實施하였다.

1. 補助關係式을 導入함으로써 Double Sweep알고리즘을 使用할 수 있었다.

2. 計算結果의 安定性과 精度에 큰 影響을 주는 因子는 $\Delta t/\Delta x$ 및 θ 인 바 $\Delta t/\Delta x$ 은 1보다 너무크거나 작은 경우를 피해야 하며 $0.6 < \theta < 1.0$ 일 때 無條件 安定이다.

3. 摩擦係數와 θ 值를 適切히 調節하여 實際흐름에서의 에너지 消滅과 같은 效果를 얻게 됨으로써 이 模型은 一次元 不定流흐름의 解析에 있어 매우 有用함을 確認할 수 있었다.

4. 앞으로 實測資料에 의한 補正과 더불어 支流와 合流가 있는 河川 水系에 對한 System解析模型 또는 海岸에서의 長波에 對한 一次元 解析模型 등의 開發에 應用될 수 있다.

文 獻

Yevjevich, V. M. (1964): Bibliography and discussion of flood routing methods and unsteady flow in channels, U.S. Govt. print. off., Washington, D.C., 235pp.

Richtmyer, R. D., and Morton, K. W. (1957): Difference methods for initial value problems, Interscience publishers, New York, 2nd edition, 1967

Preissmann, A. (1960): Propagation des intumescences dans les canaux et rivières, 1st Congrès de l'Assoc. Française de calcul, Grenoble, p. 433-442

Abbott, M. B. (1977): Numerical methods, Fifth revised edition, IHE, Delft, pp. 96

Mahmood, K. and Yevjevich, V. (Editors) (1975): Unsteady flow in open channels, Vol 1, Fort Collins, pp. 484.