

論 文

大韓造船學會誌
第18卷 第2號 1981年 6月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 18, No. 2, June 1981

補剛板의 挫屈解析

任 尙 鎭* · 梁박달치**

Buckling Analysis of Stiffened Plates

S.J. Yim*, P. Yang**

Abstract

The buckling of stiffened plates is considered using a finite element method.

In this paper stiffened plates are treated as orthotropic plates and by applying Mindlin's plate theory the effects of shear deformation to buckling loads are considered.

In general, it is found that for moderately thick plates Mindlin's plate theory gives lower buckling loads than those obtained using classical thin plate theory.

挫屈問題에 Mindlin의 平板理論이 폭넓게 適用됨을 보여 주었다.

1. 緒 言

船體構造의 基本的인 要素는 平板과 補剛板의 結合構造인 補剛된 平板이라고 할 수 있다.

이러한 補剛板의 平面內에 荷重이 作用할때는 挫屈問題가 대두되게 된다. 補剛板의 挫屈問題는 補剛板을 그대로 解析하기는 거의 不可能 하기 때문에 補剛된 平板을 直交異方性 平板으로 置換하거나 有效幅 概念을 使用하여 Grillage로 置換하여 다루고 있다.

두께가 얇은 平板의 挫屈問題에 對해서는 文獻 [1], [2], [3]에서 解析的인 方法으로 다루었고, 두께가 얇거나 비교적 두꺼운 平板에 對해서는 Mindlin의 平板理論을 使用하여 E. Hinton이 有限帶板法으로 다루었고 [4], [5], S. Srinivas와 A.K. Rao가 3次元要素를 使用하여 有限要素法으로 다루었다 [7].

本 論文에서는 補剛板을 直交異方性 平板으로 置換하고, Mindlin의 平板理論을 適用하여 補剛된 平板의 挫屈荷重을 有限要素法을 使用하여 구하므로써 平板의

2. 비교적 두꺼운 直交異方性 平板으로 置換한 補剛된 平板의 挫屈解析

2.1 假 定

그림 1에서 보인 것과 같이 荷重을 받는 두께가 비교적 두꺼운 直交異方性 平板을 2次元構造로 解析하기 위하여 다음과 같은 假定을 하였다.

① 平板은 完全彈性體로서 Hooke의 法則이 適用되며 直交異方性을 가진다.

② 平板의 midplane에 對한 stretching은 무시하고 bending에 의한 變位만을 고려한다.

③ 平板의 두께方向으로의 stretching은 무시한다.

2.2 變形度와 應力成分

그림 2에서 보인 것과 같이 座標係를 定하면 平面內의 任意點에서의 x, y, z 方向의 變位 u, v, w 는 2.1節의 假定下에 그림 3에서 보인 것과 같은 midplane에

接受日字: 1981年 3月 28日, 再接受日字: 1981年 5月 25日, 1981年 4月 18日 蔚山에서 開催된 本學會의 春季 學術講演會에서 發表된 論文임. 本 論文에 對한 書面討論은 1981年 12月 15日까지 接受함.

* 正會員, 서울大學校 工科大學

** 正會員, 蔚山工大

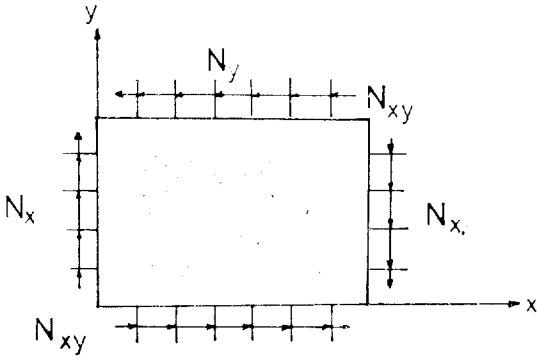


그림 1. 平面内の 荷重

서의 변위 w, θ_x, θ_y 로 (1)식과 같이 나타내어 질 수 있다.

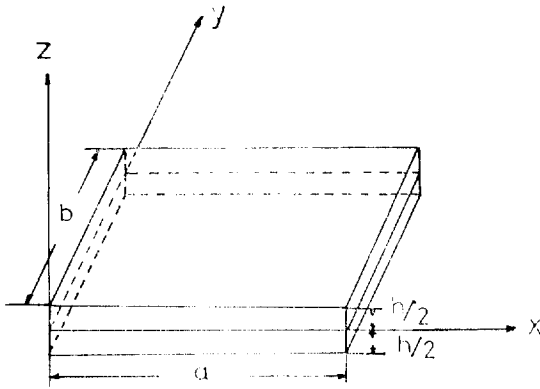


그림 2. 平板의 座標

$$\begin{aligned} u &= -Z\theta_x(x, y) = -Z\theta_x \\ v &= -Z\theta_y(x, y) = -Z\theta_y \\ w &= w(x, y) = w \end{aligned} \quad (1)$$

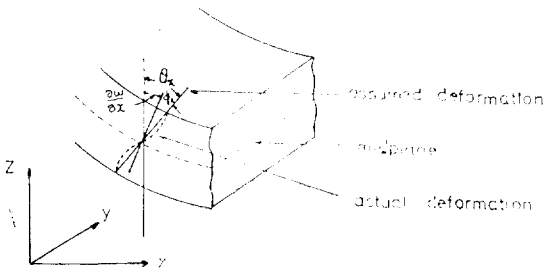


그림 3. 平板斷面の 變形 및 midplane에서의 變位 定義

여기서 θ_x 는 굽힘에 의한 midplane에 垂直한 斷面の 回轉角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 에 그림 3에서 보인 것과 같이 假定된 剪斷變形에 의한 變形角 ϕ_x 를 더한 角이다.

(1) 式으로 表示된 變位成分으로 부터 微小變形理論을 適用하여 變形度成分을 求하면 (2)式과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -Z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -Z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} &= 0 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{Z}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2) \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \end{aligned}$$

한편 直交異方性 平板에 對한 應力變形度의 關係式은 (2)式과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} (\epsilon_{xx} + \nu_y\epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} (\epsilon_{yy} + \nu_x\epsilon_{xx}) \quad (3) \\ \tau_{xy} &= 2G_{xy} \epsilon_{xy} \\ \tau_{yz} &= 2G_{yz} \epsilon_{yz} \\ \tau_{zx} &= 2G_{zx} \epsilon_{xz} \end{aligned}$$

여기서 $E_x, E_y, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$ 는 탄성계수와 전단 탄성계수이고, ν_x, ν_y 는 x, y 方向으로의 Poisson's Ratio이다.

2.3. 平面內 荷重에 依한 變形에너지

그림 1에서 보인 것과 같은 직사각형의 直交異方性 平板에 平面內 荷重이 가해지는 경우, 彈性限度內에서 中立平衡을 이루는 狀態의 板에 저장된 變形에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \iiint [\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\tau_{xy}\epsilon_{xy} + 2\tau_{yz}\epsilon_{yz} + 2\tau_{zx}\epsilon_{xz}] dx dy dz \quad (4)$$

(4)式에서 應力成分을 (2)式, (3)式을 使用하여 變位成分으로 直換하고 Z 方向에 對해서 積分을 수행하면 U는 (5)式과 같이 된다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint \left[D_x \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad + (\nu_x D_y + \nu_y D_x) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{xy} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad \left. + D_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^2 \right] dx dy \quad (5) \end{aligned}$$

여기서 $D_x, D_y, D_{xy}, D_1, D_2$ 는 剛性係數로서

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} \\ D_y &= \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} \\ D_{xy} &= \frac{G_{xy} h^3}{12} \end{aligned} \quad (6)$$

$$D_1 = \alpha_1 G_{xz} h$$

$$D_3 = \alpha_2 G_{yz} h$$

와 같이 되고, α_1, α_2 는 平均剪斷應力의 그림 3에서와 같이 假定된 剪斷變形角 ϕ_x, ϕ_y 에 對한 剪斷應力의 比로서 等方性平板의 경우에 一般的으로 5/6를 使用한다.

한편, 그림 1에서 보인 바와 같이 평판에 平面內의 荷重 N_x, N_y, N_{xy} 가 걸릴때 이에 의한 potential 에너지는 (7)式과 같이 된다.

$$V = -\frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (7)$$

여기서 N_x, N_y, N_{xy} 는 단위 길이당의 하중의 세기로 표시된다.

(5)式과 (7)式을 綜合하여 全 potential 에너지를 구하면 (8)式과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \pi &= U + V \\ &= \frac{1}{2} \iint \left[D_x \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + (\nu_x D_y + \nu_y D_x) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{xy} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + D_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

2.4 有限要素法の 定式化

2.4.1 B-Matrix의 誘導

本 論文에서는 直交異方性平板의 挫屈을 有限要素法

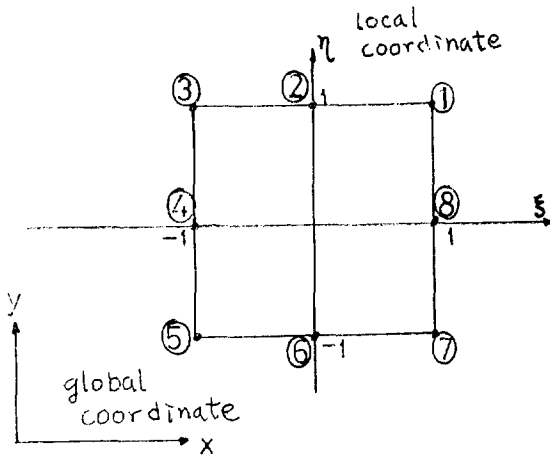


그림 4. Isoparametric element 및 節點의 번호

으로 解析하는 過程에서 그림 4에서 보인 것과 같은 8개의 節點을 가지는 isoparametric element를 使用하였다.

各 節點에서의 變位는 그림 5에서와 같이 定義하였다.

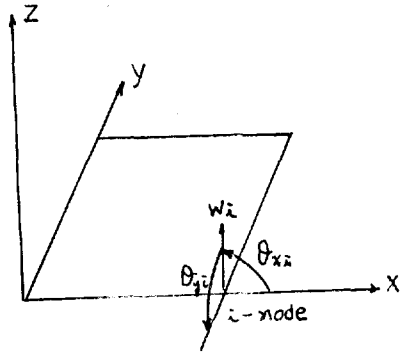


그림 5. 節點의 變位

i -node에 對한 變位를 (9)式과 같이 matrix 形式으로 表示한다.

$$\{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} \omega \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i \quad (9)$$

要素內의 變數 $\omega, \theta_x, \theta_y$ 를 節點에서의 變位로 表示하면 (10)式과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \omega \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \{\delta\}_i \quad (10)$$

여기서 N_i 는 要素의 形狀函數로서 要素의 座標係 (ξ, η) 로서 表示하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ N_4 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \\ N_5 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\ N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_7 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_8 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \end{aligned}$$

(8)式의 積分에 들어 있는 變數를 節點의 變位로 表示하면 (11)式, (12)式과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\delta} \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\delta} [B]_i \{\delta\}_i = [B] \{\delta\} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\delta} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\delta} [C]_i \{\delta\}_i = [C] \{\delta\} \quad (12)$$

2.4.2 剛性行列

여기서 (8)式으로 表示되는 한 要素의 全 potential 에너지 $\pi^{(e)}$ 를 (10), (11), (12)式을 利用하여 節點變位로 表示하면 (13)式이 得어 된다.

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{2} \iint \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dx dy - \frac{1}{2} \iint \{\delta\}^T [C]^T [P] [C] \{\delta\} dx dy \quad (13)$$

(13)式에서 $[D]$ 는 要素의 剛性係數行列로서

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & \nu_y D_x & 0 & 0 & 0 \\ \nu_x D_y & D_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

으로 表示되고, 2면의 積分の $[P]$ 는

$$[P] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (15)$$

로 $N_x = \lambda N_{x0}$, $N_y = \lambda N_{y0}$, $N_{xy} = \lambda N_{xy0}$ 로 平面内の 荷重에 對한 荷重係數 N_{x0} , N_{y0} , N_{xy0} 를 도입하면

$$[P] = \lambda \begin{bmatrix} N_{x0} & N_{xy0} \\ N_{xy0} & N_{y0} \end{bmatrix} \quad (16)$$

와 같이 된다.

(13)式을 다시 表示하면

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]^{(e)} \{\delta\} - \frac{1}{2} \lambda \{\delta\}^T [K^G]^{(e)} \{\delta\} \quad (17)$$

로 되는데 여기서 $[K]^{(e)}$ 는

$$[K]^{(e)} = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (18)$$

로서 要素의 剛性行列이고 $[K^G]^{(e)}$ 는

$$[K^G]^{(e)} = \iint [C]^T [P_0] [C] dx dy \quad (19)$$

로서 要素의 剛性度에는 關係가 없고 기하학적 형상과 荷重狀態에 의해서 決定되므로 기하학적 강성행렬 (Geometrical Stiffness Matrix), 또는 초기 응력에 의한 강성행렬 (Initial stress stiffness matrix)이라고 한다.

2.4.3 挫屈荷重

(17)式으로 表示되는 한 要素에 對한 全 potential 에너지를 모든 要素에 對해 구하여 이를 疊하면 平板에 대한 全 potential 에너지가 구해진다.

$$\pi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} - \frac{1}{2} \lambda \{\delta\}^T [K^G] \{\delta\} \quad (20)$$

中立平衡인 狀態는 $\frac{\partial \pi}{\partial \delta_i} = 0$ 이므로 結局

$$[K] \{\delta\} - \lambda [K^G] \{\delta\} = 0 \quad (21)$$

인 固有值問題로 귀착된다.

(21)式의 解인 固有值, λ , 中에서 제일 작은 값이 挫屈荷重을 決定하는 挫屈係數가 되므로 (21)式과 같이 대안히 높은 次數의 行列式으로 表示되는 固有值問題를 最低次 固有值란 求하는 效果의인 解法이 要求된다.

剛性行列 $[K]$ 와 $[K^G]$ 의 Band 特性을 고려하면 固有值問題의 解法中에서 Determinant Search Method와 Subspace Iteration Method가 效果的이다. (6) 특히 $[K]$ 와 $[K^G]$ 의 Band폭이 比較的 크기 때문에 Subspace Iteration Method가 効率的이므로 本 論文에서는 Subspace Iteration Method를 使用하여 挫屈係數를 求하였다.

3. 補剛된 平板의 直交異方性 平板으로의 置換

補剛된 平板과 異方性 平板은 기하학적인 형상과 탄성특성이 다르므로해서 보강된 平板을 直交異方性 平板으로 치환하여 다루는데에는 많은 문제점이 있다.

補剛板은 (6)式으로 表示된 대등한 異方性板의 剛性

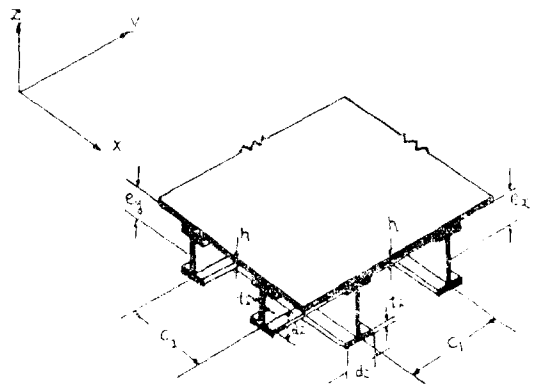


그림 6. 補剛板의 要素

補剛板의 挫屈解析

도를 구하여 置換하는데 많은 연구가 되어 왔다(2), (3).

本論文에서는 문헌(2)에서 도입한 式을 使用하여 補剛板을 異方性板으로 置換하였다.

그림 6과 같은 補剛板의 剛性係數는 (22)式과 같다.

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} + \frac{Ehe_x^2}{1-\nu_x\nu_y} + \frac{EI_{ox}}{C_1}$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} + \frac{Ehe_y^2}{1-\nu_x\nu_y} + \frac{EI_{oy}}{C_2} \quad (22)$$

$$H = \nu_x D_x + \nu_y D_y + D_{xy}$$

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} + \frac{G_{xy}}{6} \left(\frac{\sum d_i t_i^3}{C_1} + \frac{\sum d_i t_i^3}{C_2} \right)$$

여기서 e_x, e_y 는 補剛板의 板의 中心線으로 부터 偏心된 거리이고, I_{ox}, I_{oy} 는 補剛材斷面의 補剛材의 도심에 관한 2차 모멘트이다.

4. 解析例

먼저 單純支持 狀態에서의 얇은 平板이 1-軸壓縮, 2-軸壓縮을 받는 경우에 對한 挫屈荷重을 구하여 文獻 [4], [8], [9]에서 解析한 結果와 比較하여 表 1에 나타냈다. Program의 精度를 보기 위하여 剪斷變形에 依한 影響을 무시할 수 있는 板의 두께가 얇은 경우 ($a/h=100$)를 다루었다.

表 1. 單純支持 狀態에서 等方性平板의 挫屈荷重係數

$$K = \frac{N_{cr} b^2}{\pi^2 D} \quad a=b=8, \nu=0.3 \text{인 경우}$$

저 자	요소 의 갯 수	1軸壓縮	2軸壓縮	備 考
K.K. Kapur and J. Hartz	16	3.77		
	64	3.693		
D.J. Allman	16	4.031	2.016	
	64	4.006	2.003	
本論文의 解析	4	3.9113	2.0192	$a/h=100$ 인 경우
	16	4.0244		
Timoshenko		4.00	2.00	

板의 두께에 따른 剪斷變形이 挫屈荷重에 미치는 影響을 h/b 를 變化시키면서 解析하여 그 結果를 表 2에서 보였다. 解析結果의 精度를 보기 위하여 文獻(5)의 結果와 比較하여 그림 7에서 보였다. 이 結果, 剪斷變形을 고려하지 않은 경우에 對해서 $h/b=0.1$ 인 경우는 5%, $h/b=0.05$ 인 경우에는 2.5%程度 挫屈荷重이 적

게 나왔다.

表 2. 두께가 비교적 두꺼운 等方性平板의 挫屈荷重

$$K = \frac{N_{cr} b^2}{\pi^2 D}, \quad a=b=8, \nu=0.3$$

h/b	0.125	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
K	3.6962	3.7886	3.8590	3.8894	3.9052	3.9113

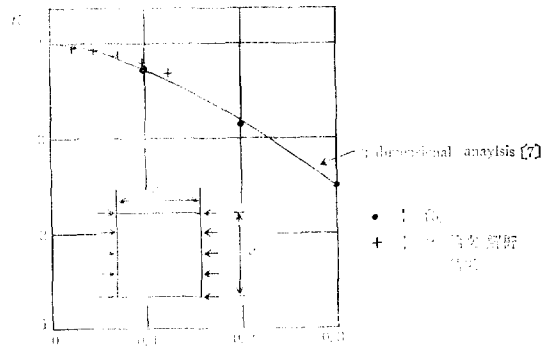
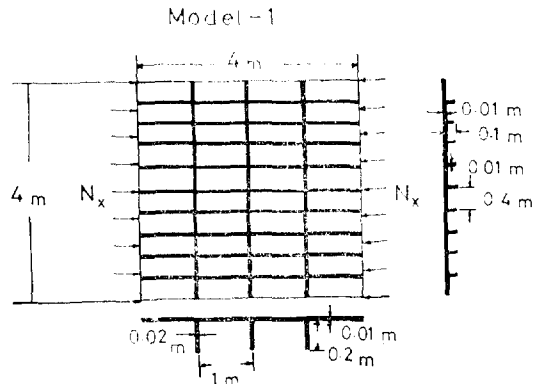


그림 7. 좌굴하중에 대한 전단변형의 영향비교

補剛板에 對해서는 그림 8과 같은 3개의 model을 택하여 解析하였는데, 補剛板의 特性値와 挫屈荷重係數는 表 3과 같다.

여기서 model 1은 船體構造에서 橫隔壁間區劃의 全體의인 挫屈問題에 해당하는 것으로 文獻(12)의 解析的인 方法과 比較하여 3.3%程度의 오차가 나왔다.

Model 2는 船體構造의 縱助骨構造 方式에 對한 것이고 model 3는 船體構造의 橫助骨構造 方式에 對한 것으로 獻(12)의 解析的인 方法과 比較하여 0.9%, 14%程度의 오차가 나왔다.



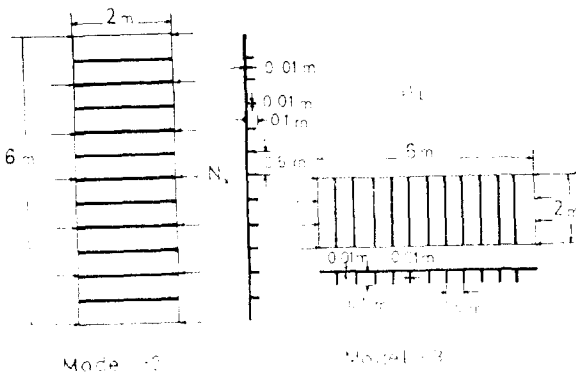


그림 8. 모델의 형상

表 3. 直交異方性板으로 置換된 Model의 特性值 및 挫屈荷重係數 $K=N_c b^2 / 4\pi^2 \sqrt{D_x D_y}$

	Model-1	Model-2	Model-3	
補剛 平板	E (kg/m ²)	2.1×10^{10}	2.1×10^{10}	2.1×10^{10}
	ν	0.3	0.3	
直交 異方 性板	D_x	7.438×10^5	7.35×10^5	1.92×10^3
	D_y	28.266×10^5	1.92×10^5	7.35×10^5
	D_{xy}	1.92×10^3	0.808×10^3	0.808×10^3
	H	3.072×10^3	1.962×10^3	1.962×10^3
	ν_x	0.6063×10^{-3}	0.3	0.7849×10^{-3}
	ν_y	0.1596×10^{-3}	0.7849×10^{-3}	0.3
挫屈係數 (本 論文의 解析)	0.6072	19.38	7.252	
Analytic solution	0.6279	19.57	8.417	

5. 結 言

本 論文에서 比較的 두꺼운 等方性 平板과 補剛板에 對해서 挫屈解析을 하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 두꺼운 等方性 平板의 解析에 依하면 b/t 가 20 以上이면 挫屈荷重에 對한 剪斷變形的 影響을 무시할 수 있다.

(2) 置換된 直交異方性 平板에 對한 挫屈荷重은 解析的인 方法의 解와 잘 맞으나 補剛板을 直交異方性板

으로 置換하는 過程에서 대응한 剛性係數의 決定에 檢證이 必要하다.

參 考 文 獻

- [1] S.P. Timoshenko and J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Ltd., 1961.
- [2] Szilard, Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall Inc., 1974.
- [3] M.S. Troitsky, Stiffened Plates Bending, Stability and Vibration, Elsevier Scientific Publishing Co., 1976.
- [4] E. Hinton, A Thick Finite Strip Solution for Static, Free Vibration and Stability Problem, I.J.N.M.E., Vol. 10, 1976.
- [5] E. Hinton, Buckling of Initially Stressed Mindlin Plates Using F.S.M., Computers and Structures, Vol. 8, 1978.
- [6] Klaus-Jurgen Bathe and Edward, L. Wilson, Numerical Method in Finite Element Analysis Prentice-Hall Inc., 1976.
- [7] G.V. Rao, J. Venkataramana and K. Kanaka Raju, Stability of Moderately Thick Rectangular Plates Using a High Precision Triangular Element, Computers and Structures, Vol. 15, 1975.
- [8] Kanwar K, Kapur and B.J. Hartz, Stability of Plates Using the Finite Element Method, ASCE. Engineering Mechanics Div., 1966.
- [9] D.J. Allman, Calculation of the Elastic Buckling Loads of Thin Flat Reinforced-Plates Using Triangular Finite Elements, I.J.N.M.E., Vol. 9, 1975.
- [10] 任尙鎮, 鄭紀臺, “補剛材가 붙은 平板의 解析”, 공학석사학위논문, 서울大學校, 1977.
- [11] C.L. Dym and I.H. Shames, Solid Mechanics, a Variational Approach, McGraw-Hill Ltd. 1973.
- [12] 服部堅一, “船體構造設計における挫屈基準”, 佐友重機械技報, Vol. 24, No. 72, 1976.