

<論 文>

흡수-방사하는 회가스를 지닌 평행평판 사이의 복사열전달의  
Monte Carlo방법에 의한 해석†

임 용 택\* · 이 택 식\*\*

(1981년 5월 19일 접수)

Monte Carlo Analysis of Radiation Heat Transfer through an  
Absorbing-Emitting Gray Gas between Parallel Plates

Yong Taek Im and Taik Sik Lee

Abstract

The radiant heat transfer and temperature distribution between infinite parallel gray plates at different temperatures separated by an absorbing and emitting gray gas with or without a sinusoidal heat source in the gas are analyzed by Monte Carlo method.

The Monte Carlo results were compared with the numerical solution by Usiskin and Sparrow and the exact solution by Hottel in the case of similar problem limited black walls and gas optical thickness is less than two. For gray walls and large optical thickness the results were compared with the modified diffusion approximate solution by Deissler.

기 호 설 명

$e$  방사능  
 $f$  확률밀도함수, pdf  
 $g$  확률밀도함수, pdf  
 $L$  최대경로길이  
 $L^+$   $S$ 로 무차원화된 최대경로길이  
 $l$  실제경로길이  
 $l^+$   $S$ 로 무차원화된 실제경로길이  
 $N, N^+$  단위면적당 총 시행수  
 $Q$  단위체적당 발생열량  
 $q$  단위면적당 전열량  
 $R$  0~1 사이에서 발생한 난수

$S$  평행판사이의 거리  
 $T$  판의 절대온도  
 $x, y, z$  좌표  
 $z^+$  무차원화된 좌표  
 $\beta$  원추각  
 $\epsilon$  반구 전 방사율  
 $\kappa$  가스 흡수 계수  
 $\sigma$  Stefan-Boltzmann 상수  
 $\tau$  광학적 두께 ( $=\kappa S$ )  
 $\theta$  방위각  
 $\omega$  입체각

<하첨자>

$b$  흑체  
 $g, z^+$  가스에서 방사되어  $z^+$ 에 흡수된  
 $g-1$  가스에서 방사되어 판 1에서 흡수된  
 $g-2$  가스에서 방사되어 판 2에서 흡수된

† 대한기계학회 1979년도 추계학술대회 발표

\* 서울대학교 대학원, 현재 Northwestern 대학교 대학원

\*\* 정회원, 서울대학교 공과대학

- p 가스 중분 비수
- 1 판 1
- 2 판 2
- 1-2 판 1 부터 방사되어 판 2 에 흡수된
- 2-1 판 2 부터 방사되어 판 1 에 흡수된

1. 서 론

복사 에너지를 흡수 하거나 방사하고 동시에 산란시킬 수 있는 복사매체를 통하는 복사열전달에 관심이 근래 인공위성의 개발과 병행하여 증대되어 왔다. 이를테면 핵폭발 또는 로켓추진, 핵융합에 사용되는 플라즈마 발생기 등과 관련된 복잡하고 난해한 현상들을 해석하기 위하여 많은 연구가 행해지고 있다.

특히 산업용 복사 보일러에서는 연소과정의 부산물인 2산화탄소 가스나 수증기들이 복사에너지를 흡수하거나 방사하는 데 중요한 역할을 하는데 이 때 가스내의 흡수계수는 파장에 따라 변하는 것이 알려져 있다. 그러나 가스내에 탄소입자나 다른 입자들을 증가시켜 줄으로서 파장과는 무관한 가스흡수계수를 가지는 회가스로 실제가스를 가정하여 해석할 수 있고 실제가스에 대한 많은 특성들을 쉽게 얻을 수 있다.

본 논문에서는 중성자 산란이나 회박 공기 역학에 이용되어 온 통계적 해석방법인 Monte Carlo 방법<sup>1)</sup>을 이용하여 평행평판사이에 걸쳐서 정현(sine)상으로 분포된 열원을 가지는 회가스를 포함하는 온도가 다른 두 평행한 무한평판 사이의 열전달량과 가스내의 온도 분포를 계산하였다.

계산은 최절, 전광, 간섭, 불평형복사 전도의 효과들을 무시하여 수행하였으며, 흑체인 경우에는 Hottel 에 의한 완전해<sup>2)</sup>와 비교하였고 회색평판일 경우는 Usiskin 과 Sparrow 에 의한 수치해<sup>3)</sup>와 비교 검토하였고 Deissler 에 의한 도약경계 조건을 가진 확산근사해<sup>4)</sup>와도 비교 검토하였다.

2. Monte Carlo 방법의 적용

본 논문에서는 여러가지 Monte Carlo 기법 중의 하나인 다음에 약술하는 기작법(rejection technique)을 선택하여 계산하였다.

이를 테면 Fig. 1 과 같이 식 (1)로 표시되는 입체각에 대한 임의 분포의 복사에너지량을 생각하자.

$$\begin{aligned}
 q &= f(\omega) & 0 < \omega < \omega_{\max} \\
 q &= 0 & \omega \leq 0, \omega \geq \omega_{\max}
 \end{aligned} \tag{1}$$

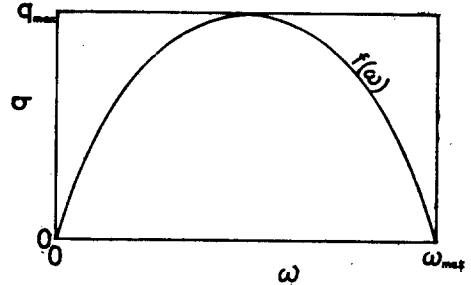


Fig. 1 Distribution of f(omega).

임의의  $\omega$  에 대하여 방출되는 에너지량은 분포함수에 의하여 만들어지는 임의의 미소  $\omega$  구간의 면적과 비례한다는 것을 알 수 있다. 따라서 모든 입체각에 걸친 에너지량 분포함수의 전체 면적과 일치하며 이를 동일한 에너지량을 가지는  $N'$ 개의 에너지 꾸러미들의 모임으로 생각하여도 무방하다. 만일 임의의 수들을 무작위하게 추출하여 그들의 분포가 균일하게 나타난다면 이를 난수라 하며 주어지는 균일분포로부터 임의 구간의 난수들을 만들 수 있다.

따라서 무작위하게  $(\omega, q)$ 를 나타내는 난수들을 택하여 이 점의 좌표가 주어진 분포함수 곡선 아래에 있는지 없는지에 따라서 전체 시행횟수  $N$ 을 무한히 크게 하면 식 (2)가 성립한다.

$$\frac{N'}{N} = \frac{\text{분포곡선 아래의 면적}}{\omega_{\max} q_{\max}} \tag{2}$$

만일 분포곡선아래의 면적이 적 4 각형  $(0-\omega_{\max}$ 과  $0-q_{\max}$ 로 이루어지는)의 면적에 비하여 매우 작은 경우에는 선택된 많은 점들이 기각되므로 따라서 주어진 분포함수로부터 누적분포함수(cumulative distribution function) cdf 를 구함으로써 이를 피할 수 있다.

누적분포함수  $Q(\omega)$ 를 식(3)과 같이 정의하고  $0-Q_{\max}$ 에 이르는 난수들을 균일하게 분포된 함수로부터 무작위하게 선택한다.

$$Q(\omega) = \int_0^{\omega} f(\omega') d\omega' \tag{3}$$

따라서  $Q(\omega)$ 는 0 부터  $\omega$ 까지의 입체각이 가지는 에너지량으로 간주할 수 있고 임의의 구간  $\omega_1-\omega_2$ 에서 방출되는 에너지량은 식 (4)와 같이 정의된다.

$$Q(\omega_2) - Q(\omega_1) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega') d\omega' \tag{4}$$

식 (3)을  $Q(\omega_{\max})$ 에 의하여 규준화(normalizing)하면 식 (5)와 같이 된다.

$$R_{\omega} = \frac{Q(\omega)}{Q(\omega_{\max})} \tag{5}$$

이 경우의  $R_{\omega}$ 는 균일 분포를 가지는 0 과 1 사이의 난수들이다. 이와같은 결과들이 통계학적으로 믿을만 하기 위하여는 식 (5)에서 얻는 난수들의 무작위도

(randomness)가 좋아야하며 전체의 시행횟수  $N$ 이 커야 한다.

만약 분포함수  $f$ 가 2개 이상의 변수들의 함수로 주어지면 각각의 공동확률 밀도함수(joint probability density function)로부터 난변수들을 택할 수 있다. 즉  $f$ 가  $\beta$ 와  $\theta$ 의 함수이라면

$$R_\beta = \frac{\int_0^\beta \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\beta', \theta') d\beta' d\theta'}{\int_0^{\beta_{\max}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\beta', \theta') d\beta' d\theta'} \quad (6)$$

$$R_\theta = \frac{\int_{\theta_1}^\theta f(\beta, \theta') d\theta'}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\beta, \theta') d\theta'} \quad (7)$$

로 주어지고  $\beta$ 와  $\theta$ 가 서로 독립적이라면 즉  $f(\beta, \theta) = g(\beta) \cdot \bar{g}(\theta)$  이라면 다음으로 주어진다.

$$R_\beta = \frac{\int_0^\beta g(\beta') d\beta'}{\int_0^{\beta_{\max}} g(\beta') d\beta'} \quad (8)$$

$$R_\theta = \frac{\int_{\theta_1}^\theta \bar{g}(\theta') d\theta'}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{g}(\theta') d\theta'} \quad (9)$$

여기서  $\theta_1, \theta_2, \beta_{\max}$ 는 각각 문제에 따라서 정할 수 있다. <sup>11, 5)</sup>

### 3. 해석

Fig. 2와 같이 정현(sine)상으로 분포된 열원을 가지는 흡수·방사할 수 있는 회색가스(gray gas)를 포함하는 온도가 다른 두 평행한 회색 무한 평판으로 이루어진 계를 생각한다.

해석은 다음과 같은 가정 하에서 행하였다.

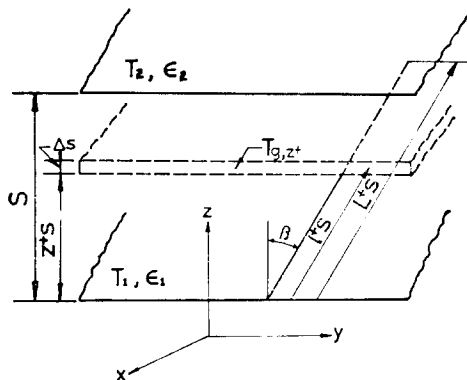


Fig. 2 System for absorbing-emitting gray gas between infinite parallel gray plates.

- (1) 모든 해석에 있어서 복사에 의한 열전달만을 고려하고 전도나 대류에 의한 열전달은 무시한다.
- (2) 양 평행판은 회색면(gray surface)이고 복사에너지를 방사하거나 반사할 때 난사면(diffuse surface)이다.
- (3) 평행판사이에 존재하는 복사매체는 균질 회색가스(isotropic gray gas)이고 또한 복사 매체의 가스 흡수계수  $\kappa$ 는 일정하다.
- (4) 가스와 평행판에서 일어나는 산란효과는 무시하고 회절, 편광, 간섭등도 무시한다.
- (5) 정상 상태에서 복사 매체내의 국소 평형이 이루어져 있다.

이와같은 가정 아래 에너지의 전달이 임의의 에너지 꾸러미들에 의하여 일어난다고 생각하여 임의의 에너지 꾸러미가 한쪽 평행판이나 복사매체에 포함되어 있는 열원부터 방출된다면 방출된 에너지 꾸러미가 어느 곳에서 흡수 될 것이다. 이 때의 계책을 무작위하게 추적하고 구하고자 하는 흡수에너지 꾸러미들의 위치의 평균을 구한다. 따라서 구하고자하는 열전달량은 한쪽 평행판을 떠나 다른 쪽 평행판에 흡수되는 에너지 꾸러미들의 평균수효와 관련되며 가스 내의 온도 분포는 가스내에서 방출, 흡수되는 에너지 꾸러미

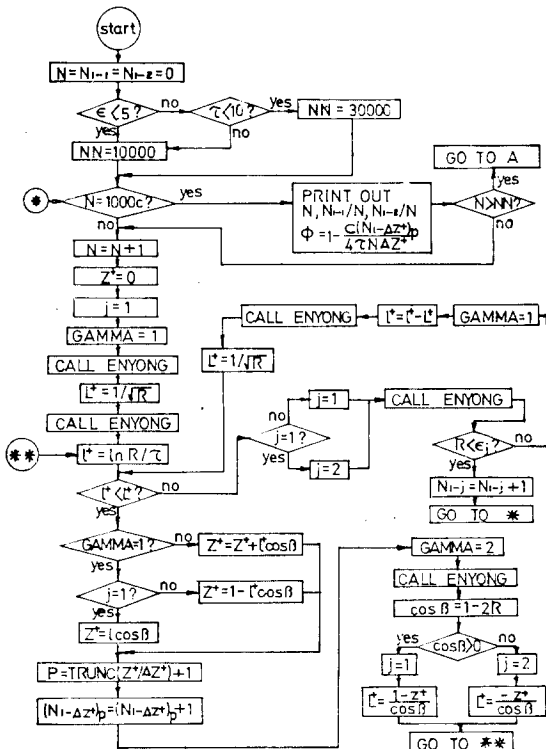


Fig. 3 Flow chart for one wall at zero temperature with no heat source in the gray gas.

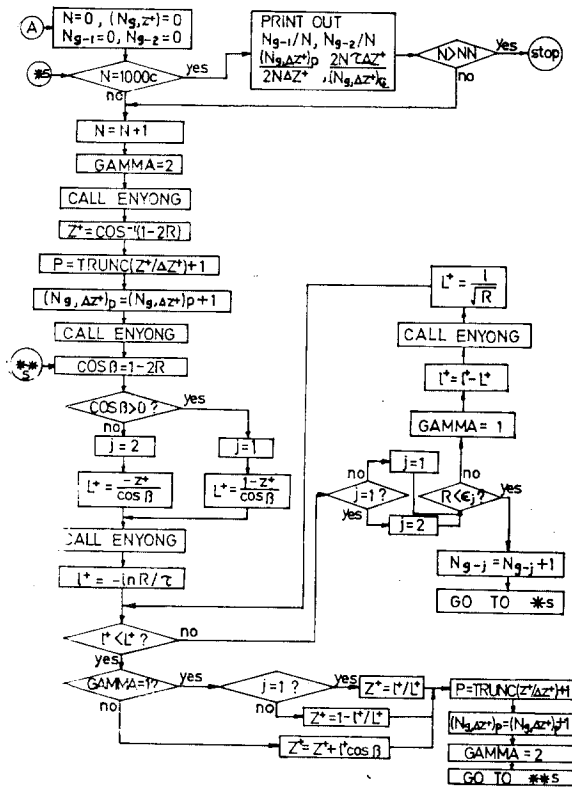


Fig. 4 Flow chart for gas with a sinusoidal heat source and both walls at zero temperature.

들의 평균수효에 역시 관련된다. 그런데 이 두가지는 모두 선형적으로 비례하기 때문에 각각의 해를 구하여 중첩하면 구하는 해가 얻어진다.

해석과정은 Fig. 3에 표시된 열원이 없고 한쪽 평행판의 온도 ( $T_2$ )가 0인 경우의 Monte Carlo에 대한 유통도와 Fig. 4에 표시된  $Q = Q_{max} \sin \pi z^+$ 의 열원을 가지며 양쪽 평행판온도가 모두 0인 경우의 Monte Carlo에 대한 유통도를 보면 알 수 있다.

평판 1에서의 방출 에너지는 회벽이므로 식 (10)으로 주어지며 단위 면적당 단위 시간당 평판 1을 떠나는 에너지 꾸러미의 수  $N_1$ 은 식 (11)로 얻어진다.

$$e_1 = \epsilon_1 e_b(T_1) = \epsilon_1 \sigma T_1^4 = C_1 N_1 \quad (10)$$

$$N_1 = \frac{\epsilon_1}{C_1} \sigma T_1^4 \quad (11)$$

여기서  $\sigma$ 는 Stefan-Boltzmann 상수이고  $C_1$ 은 단위 에너지 꾸러미가 가지는 에너지량이다.

단위 체적당 회가스로 부터 방출되는 에너지 꾸러미 수를  $N_e$ 라고 하면 방출위치  $z^+$ 와 단위 에너지 꾸러미

가 가지는 에너지량은 각각 식 (12)와 (13)으로 주어진다.

$$z^+ = \frac{1}{\pi} \cos^{-1}(1-2R) \quad (12)$$

$$C_e = \frac{S \int_0^1 Q_{max} \sin \pi S' dS'}{N_e} = \frac{2SQ_{max}}{\pi N_e} \quad (13)$$

여기서  $z^+$ 는 평행판 사이의 위치를 거리  $S$ 로 무차원화한 것이다.

평행판 사이의 열전달량  $q$ 는  $N_{1-2}$ ,  $N_{2-1}$ ,  $N_{e-1}$ 에 의하여 식 (14)로 결정되고 회가스 내의 방사능(emissive power)  $e_e$ 는 회가스 내에 흡수된 에너지 꾸러미들의 갯수로부터 식 (15)에 의하여 구한다.<sup>6),7)</sup>

$$q_{net} = q_{2-1} + q_{e-1} - q_{1-2} = N_{2-1} C_2 + N_{e-1} C_e - N_{1-2} C_1 \quad (14)$$

$$4\tau \Delta z^+ e_{e,z^+} = C_e (N_{e, \Delta z^+})_p + C_1 (N_{1- \Delta z^+})_p + C_2 (N_{2- \Delta z^+})_p \quad (15)$$

여기서  $\tau = \kappa S$ 는 광학적 두께(optical thickness)로 불리워지는 무차원수이며  $\kappa$ 는 가스흡수계수이다.

만일 가스 내에 열원이 없고 평행판의 방사율이 같다고 하면  $N_{1-2}/N_1 = N_{2-1}/N_2$ 인 것을 알 수 있고 이를 이용하면 식 (14)는 식 (16)으로 주어지며 식(15)는 식 (17)로 주어진다.

$$\frac{(q_{2-1})_{net}}{e_{b,2} - e_{b,1}} = \epsilon \frac{N_{1-2}}{N_1} \quad (16)$$

$$\frac{e_{b,z^+} - e_{b,1}}{e_{b,2} - e_{b,1}} = 1 - \frac{\epsilon(N_{1-z^+})_p}{4\tau N \Delta z^+} \quad (17)$$

정현(sine)상의 열원을 가지고 평판의 온도가 동일하다면 식 (15)는 식 (18)로 되어 가스내의 온도분포를 구할 수 있다.<sup>8)</sup>

$$\frac{e_{e,z^+} - e_{b,1}}{\frac{SQ_{max}}{\pi \tau}} = \frac{(N_{e, \Delta z^+})_p}{2Ng \Delta z^+} \quad (18)$$

#### 4. 결과 및 고찰

Fig. 5부터 Fig. 12에 계산 결과를 표시하였으며 계산은 IBM 370 system을 이용하여 수행하였다.<sup>8)</sup>

Fig. 5부터 Fig. 8까지는 열원이 없는 경우에 대한 것이고 Fig. 9부터 Fig. 12까지는 열원이 존재하는 경우에 대한 것이다.

Fig. 5에 의하면 열원이 없는 경우 평행판사이의 열전달량  $q$ 는 광학적 두께  $\tau$ 가 증가함에 따라 감소하는 것을 알 수 있다. 실제로 주어진 가스 흡수계수에 대하여 평행판사이의 거리가 커지면 복사열교환이 감소하는 것은 당연하며 흑체인 경우는 Hottel의 해<sup>9)</sup>와 비

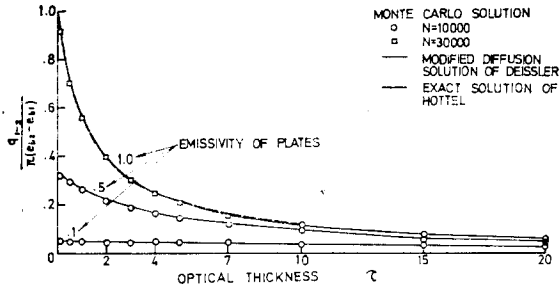


Fig. 5 Heat transfer between infinite parallel plates including a gray gas.

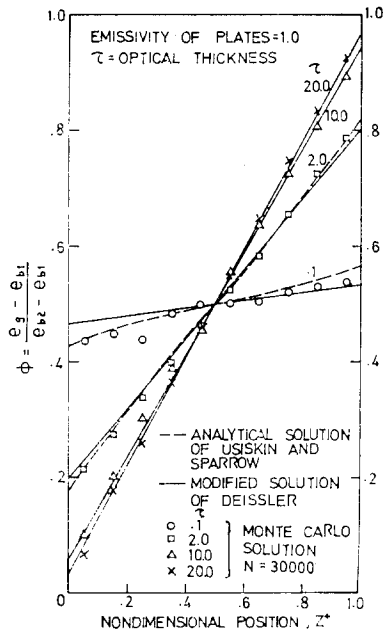


Fig. 6 Emissive power distribution in a gray gas without heat source for  $\epsilon=1.0$ .

교하였고  $\tau$ 가 큰 경우에는 Deissler의 근사해<sup>4)</sup>와 비교하였는데 저자들의 Monte Carlo 해와 잘 일치하였다.

Fig. 6~Fig. 8에는 가스방사능(gas emissive power)의 분포가 표시되어 있다. 결과치들을 Deissler의 근사해<sup>4)</sup>와 흑체인 경우에 한하여는 Usiskin과 Sparrow의 해<sup>3)</sup>와 비교하였다. 광학적 두께  $\tau$ 가 증가 할수록 분포곡선의 경사가 커지며 또한 평행판 근처에서 온도의 차이가 존재하고 이 차이는  $\tau$ 의 증가에 따라 감소함을 알 수 있다. 따라서 가스내의 온도가 같아지는 적절한 값이 존재한다. 흡수하고 방사하는 가스에 대하여는  $\tau$ 값의 감소는 평행판 사이의 거리에 대하여 평균자유경로가 증가하는 것을 의미하므로  $\tau$ 값의 결

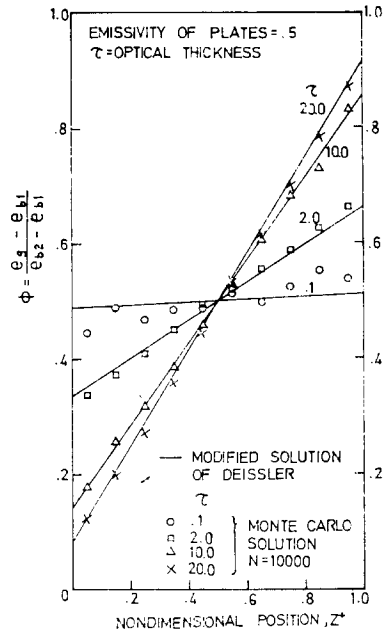


Fig. 7 Emissive power distribution in a gray gas without heat source for  $\epsilon=0.5$ .

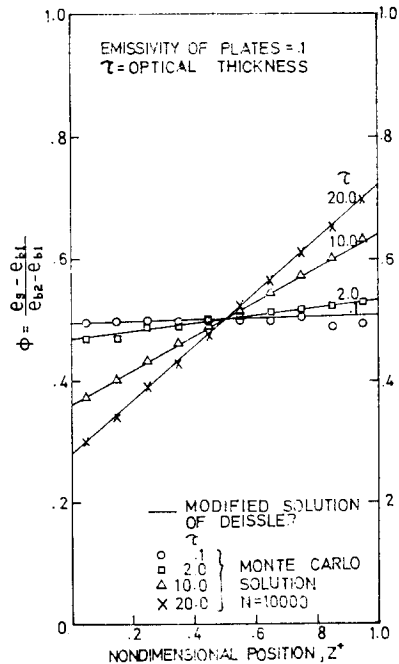


Fig. 8 Emissive power distribution in a gray gas without heat source for  $\epsilon=0.1$ .

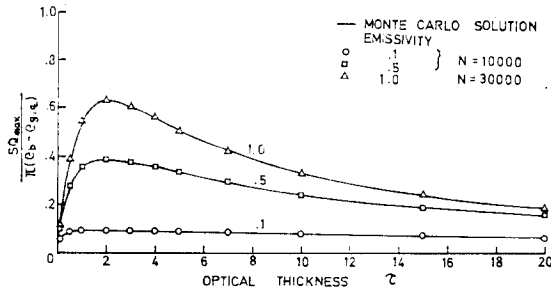


Fig. 9 Thermal radiation from a gray gas with sinusoidal heat source to infinite parallel plates.

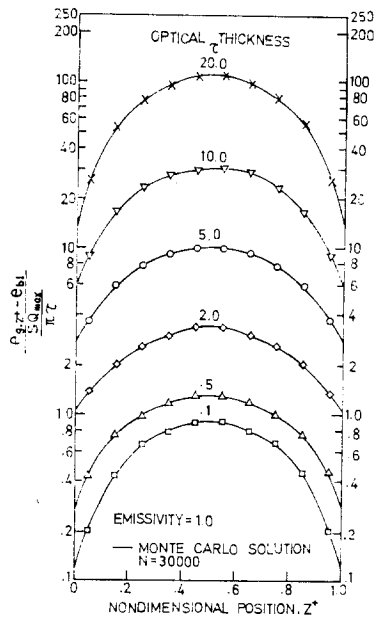


Fig. 10 Emissive power distribution in a gray gas with sinusoidal heat source for  $\epsilon=1.0$ .

과치들이 근사해와 잘 일치하는 데 이는 에너지 꾸러미가 가스내에서 흡수될 가능성이 많기 때문이다. 평판의 방사율이 작은 경우에도 동일한 효과를 나타내므로  $\epsilon=1$ 인 경우에 전체 시행횟수를 30,000으로 선택하여 계산하였다.

Fig. 9에는 평행판사이의 회가스가 정현(sine)상의 열원을 가질 때의 열전달량이 표시되어 있는데 열전달량은 방사율이 작아질수록 감소하며 점점 평탄해지고 흑체인 경우에 최대값을 가지는 것을 알 수 있다.

Fig.10~Fig. 12에는 가스의 방사능(emissive power)을 각각의 방사율에 대하여 표시하였다. 이에 의하면 가스내의 방사능은  $\tau$ 가 감소함에 따라 평탄해지며 낮

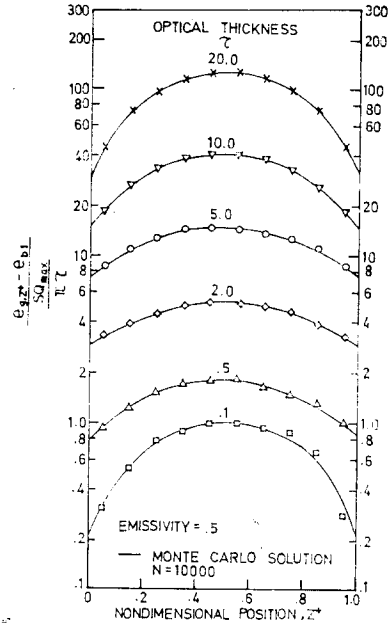


Fig. 11 Emissive power distribution in a gray gas with sinusoidal heat source for  $\epsilon=0.5$ .

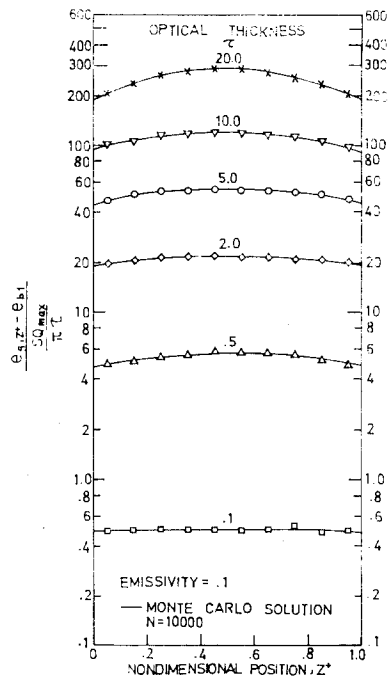


Fig. 12 Emissive power distribution in a gray gas with sinusoidal heat source for  $\epsilon=0.1$ .

아지고 방사율이 감소함에 따라 곡선이 평탄해지며 열 유동이 증가한다. 따라서 적절한  $\tau$  값에 대하여 가스내의 온도가 거의 균일해지는 경우가 존재한다.

계산치들의 오차를  $\pm 5\%$ 로 취하고 총시행 횟수를 10,000으로 계산하였을 때 결과치들이 오차의 범위에 포함될 확률은 99.99% 이상이다.<sup>5)</sup>

## 5. 결 론

평행한 무한평판사이에 흡수하거나 방사할 수 있는 회가스를 포함하는 평판의 열전달을 광학적 두께  $\tau$ , 무차원 위치  $z^*$ , 평판의 방사율  $\epsilon$  과 같은 변수들에 대하여 Monte Carlo 법을 이용하여 해석하였다. 계산 결과는 광학적 두께가 작은 경우를 제외하고는 Deissler의 근사해와 Usiskin 과 Sparrow의 해와 비교 하였으나 잘 일치하였다.

취급한 문제에 대한 Monte Carlo 결과치들은 간편한 컴퓨터 계산으로 정확한 것이었고 유한차분법에 의한 수치해석에서 일어날 수 있는 오차 또는 안정성에 대한 우려가 없다. 적분 방정식을 계산하는 데 있어서는 Monte Carlo 법이 더욱 강력한 수단이 될 수 있다.

계산 결과에 의하면 전장에 걸쳐 온도가 균일하게 되는 광학적 두께를 결정할 수 있으며, 이 경우에는 가스의 흡수 계수가 온도에 무관하다고 취급할 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. J. M. Hammersley and D. C. Handscomb, *Monte Carlo Methods*, Methuen & Co. Ltd., 1975.
2. H. C. Hottel, Radiation as a Diffusion Process, *Int. J. Heat Mass Transfee*, Vol. 5, 129.
3. C. M. Usiskin and E. M. Sparrow, Thermal Radiation between Parallel Plates Separated by Absorbing-Emitting Nonisothermal Gas, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 1, No.1, 1960.
4. R. G. Deissler, Diffusion Approximation for Thermal Radiation in Gases with Jump Boundary Condition *J. Heat Transfer*, Vol. 86, No. 2, 1964.
5. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Application*, Vol. 1, John Wiley & Sons.
6. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1949.
7. R. Siegel & J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, McGraw-Hill, 1972.
8. 임용택, Monte Carlo Analysis of Thermal Radiation through an Absorbing-Emitting Gray Gas between Parallel Plates, 공학석사논문, 서울대학교, 1980.