Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 6, No. 2, December 1980

S-管理圖의 經濟的設計

(An Economic Design of s-Charts)

朱 相 潤*

Abstract

This paper proposes a very simple algorithm for determining the parameters in the economic design of s-charts. These parameters are the sample size, the factor determining the spread of the control limit and the sampling interval.

Several examples show that the parameters determined by this algorithm are very close to the exact optimal values.

1. 序 論

管理圖는 生產工程 內에 있어서 各種製品, 部品 등의 不良品 發生을 防止하기 위한 工程管理의 目的으로 使用되는 統計的 道具로서, Shewhart[10]에 의하여 創案된 이래 오늘에 이르기까지 使用目的 및 對象에 따라 여러가지 適合한 形態로 考案되어 活用되어 왔다.

一般的으로 管理圖를 作成하기 위해서는 먼저 管理限界의 幅과 크기 그리고 샘플링 間隔이 決定되어야 하는 바, Shewhart의 $\bar{X}$-R管理圖의 境遇 3σ管理限界와 4~5個의 샘플의 크기 그리고 適切히 定해진 샘플링 間隔이 通用되어 왔다. 이와같은 經驗的 方法으로 母數의 값을 決定하는 대신 最近에는 管理圖 使用에 따르는 전체 所要費用이 最小가 되도록 母數의 값을 決定하는 管理圖의 經濟的 設計(economic design)가 Duncan[3]에 의해 처음으로 $\bar{X}$-管理圖에 대하여 研究된 이후 Knappenberger[7], Gibra[5], Chiu와 Wetherill[2]등에 의해 持續되었고 한편으로는 Ladany[8], Chiu[1], Montgomery[9], Gibra[6], Duncan[4]등에 의하여 np 혹은 p-管理圖에 대하서도 研究가 進行되어 왔다.

그러나, 이러한 管理圖의 經濟的 設計에 대한 研究가 $\bar{X}$-管理圖, np 혹은 p 管理圖와는 달리 R管理圖나 s-管理圖에 있어서는 지금까지 提示된 바 없고, 이와 관련된 $\bar{X}$-R 管理圖나 $\bar{X}$-s管理圖에 대한 經濟的 設計 역시 研究된 바 없다.

本 研究에서는 s-管理圖의 經濟的 設計에 必要한 費用模型을 定立한 後, 簡便한 方法으로 母數의 값을 求할 수 있는 解法을 提示하고자 한다.

2. 費用模型

費用模型을 定立하기 위해 다음의 假定을 設定한다.

1) 管理하고자 하는 製品의 品質特性은 正規分布를 따른다.

2) 異常原因(assignable cause)은 平均 $1/\lambda$의 指數分布를 따라 發生하며 이때 生產된 製品은 平均의 變動없이 分散만이 σ_0^2에서 σ_1^2으로 增

* 蔚山工科大學

加한다.

3) 一定한 샘플링 間隔 h마다 크기 n의 샘플을 取하여 檢査한다. 이때 샘플을 取하는 途中에는 工程이 變化하지 않는다고 假定한다.

4) 샘플의 標準偏差 s가 管理限界 $UCL=k\sigma_0$를 超過하면 工程을 調査하고, 異常原因이 發見되면 生産을 中斷한다. 여기서, k는 管理限界의 範圍를 決定하는 係數이다.

이로부터 工程이 管理狀態下에 있는 境遇와 管理狀態을 벗어난 境遇 各各에 대해서 샘플의 값이 管理限界를 超過할 確率 α와 p를 求하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\alpha&=Pr\{S\geq k\sigma_0|\sigma^2=\sigma_0^2\}\\&=Pr\{Y\geq(n-1)k^2\}\end{aligned}\qquad(1)$$

$$\begin{aligned}p&=Pr\{S\geq k\sigma_0|\sigma^2=\sigma_1^2\}\\&=Pr\{Y\geq(n-1)k^2\sigma_0^2/\sigma_1^2\}\end{aligned}\qquad(2)$$

여기서 $S=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/(n-1)}$이며 Y는 自由度 $n-1$의 χ^2分布를 따른다.

5) 工程 修理에 所要되는 費用 및 時間은 最適解에 거의 影響을 주지 않으므로 費用模型을 簡潔하게 하기 위해 이들을 考慮하지 않는다.

이와같은 假定下에 定立된 費用模型 L은 Duncan[3, pp. 230~233]과 同一한 形態를 取하게 되므로 仔細한 定立過程은 피하고 結果만을 槪略的으로 살펴본다. 우선 費用函數에 必要한 費用 및 時間들을 다음과 같이 定義한다.

M: 異常原因이 發生했을 때, 不良品 增加에 따른 時間當 損失費用.

T: 그릇된 警報[1](false alarm)로 因한 平均費用.

W: 올바른 警報[2](true alarm)로 因한 工程調査에 所要되는 平均費用.

$b+cn$: 샘플을 取하여 檢査하고 그 結果를 計算한 後 打點하는데 所要되는 費用.

en: 샘플을 取하여 檢査하고 그 結果를 計算한 後 打點하는데 所要되는 時間.

D: 異常原因이 發生했을 때 工程調査에 必要한 時間.

이때 枚 生産週期(production cycle)마다 發生하는 費用成分들과 平均經過時間은 다음과 같다.

不良品 增加로 因한 損失費用 ; MB

그릇된 警報 調査로 因한 費用 ; $\alpha T/\lambda h$

올바른 警報 調査로 因한 費用 ; W

샘플링 檢査에 所要되는 費用

; $(b+cn)(1+\lambda B)/h$

平均 生産週期 ; $1/\lambda+B$

여기서 $B=h/p-(1-\lambda h/6)\ (h/2)+en+D$. 이들로 부터 單位 時間當 所要되는 費用 L은 다음과 같이 얻어진다.

$$L=\frac{\lambda MB+\alpha T/h+\lambda W}{1+\lambda B}+\frac{b+cn}{h}\qquad(3)$$

3. 最適 母數解의 近似的 決定

費用函數 L을 最小로 하는 母數(n,k,h)의 最適解는 試行錯誤(trial & error)方式으로 各各의 母數들을 一定한 區間의 크기[3]로 變化시키면서 그에 따른 費用을 比較하여 決定할 수 있다. 그러나 이와같은 方法은 많은 計算을 必要로 하게 되므로 보다 簡單한 方法으로 最適解에 近似한 母數解를 決定할 수 있는 解法을 開發하는 것이 바람직하다. 이러한 近似解法은 異常原因 發生時 샘플의 값이 管理限界를 超過할 確率 p를 固定시킬때 開發될 수 있는데, Chiu와 Wetherill [2] 그리고 Chiu[1]등도 $\bar{X}$管理圖 或은 np管理圖의 經濟的 設計에 대하여 各各 p의 값을 固定시킨 近似解法을 提示하고 있으며 그 結果 最適解에 매우 近似한 母數解를 얻을 수 있었다.

그런데 Duncan[3]이 $\bar{X}$-管理圖의 最適解와 近似解를 比較하기 위해 使用한 12개의 例[4]를 利用하여 s-管理圖의 最適解를 求해 보면 대부분의 境遇 最適解가 $p=0.75\sim0.85$에 存在하고 있다. (表 2參照)

한편 最適解가 $p=0.75\sim0.85$內에 存在하지 않는 4個의 例들로 부터 $p=0.80$을 固定시킬

1) 工程이 管理狀態 下에 있음에도 샘플의 값이 管理限界를 벗어나는 것을 말한다.

2) 工程이 變動했을 때 샘플의 값이 管理限界를 벗어나는 것을 말한다.

3) 本 硏究에서는 k와 h의 區間의 크기를 各各 0.01과 0.1로 取하였다.

4) Duncan[3]의 例들은 $\bar{X}$-管理圖에 대한 것이므로 이들을 s-管理圖에 使用할 境遇, 平均의 變化 δ 대신 分散의 變化 σ_1/σ_0가 必要하게 된다. 그러므로 $\delta=2.0,\ 1.0$은 工程變化의 크기에 따라 各各 $\sigma_1/\sigma_0=2.5,\ 2.0$으로 代替 使用하였다.

때 惹起되는 最適解 變化를 살펴보면 表 1 과 같다.

〈表 1〉 損失費用에 對한 p 의 效果

σ_1/σ_0	λ	M	e	D	T	W	b	c		n	k	h	100×L	p	차이(%)
2.5	.01	\$1.000	.05	2	\$50	\$25	\$.50	\$.10	최 적 해	5	2.01	0.3	2915.40	0.63	1.3
									p를 고정시킨 해	7	1.79	0.4	2952.79	0.80	
2.5	.01	10	.50	2	50	25	.50	.10	최 적 해	5	1.97	3.7	132.03	0.65	2.4
									p를 고정시킨 해	7	1.79	4.7	135.15	0.80	
2.5	.01	100	.05	2	50	25	5.00	.10	최 적 해	10	1.59	3.5	636.13	0.93	3.8
									p를고정시킨 해	7	1.79	2.9	660.60	0.80	
2.5	.01	1000	.05	2	50	25	.50	1.00	최 적 해	4	1.79	0.8	3622.88	0.67	1.0
									p를 고정시킨해	5	1.61	1.0	3658.63	0.80	

表 1 의 比較에서는 損失費用上에 3.8% 以內의 差異가 있을 뿐이므로 損失費用에 미치는 p 의 效果가 그다지 크지 않음을 알 수 있다. 그러므로 이들을 根據로 하여 $p=0.80$ 으로 固定시키고서 이 값을 (2)式에 代入하면 k를 決定할 수 있게 된다.

$$k=(\sigma_1/\sigma_0)\sqrt{\chi_{0.20}{}^2/(n-1)} \qquad (4)$$

여기서 $\chi^2_{0.20}$ 은 $Pr(Y\leq\chi^2_{0.20})=0.20$ 을 滿足시키는 臨界值이다.

이제 費用函數 L 을 簡單한 近似式으로 變形시켜 보자. 一般的으로 λ 는 0.01 程度의 작은 값을 取하므로 費用函數 內의 λB 와 $\lambda h/6$ 은 1 의 값에 比하여 無視될 수 있다. 그러므로 $1+\lambda B\doteqdot1$ 과 $1-\lambda h/6\doteqdot1$ 을 (3)式에 代入하여 얻은 새로운 費用函數 L' 는 다음과 같다.

$$L\doteqdot L'=\lambda M(h/p-h/2+en+D)+\alpha T/h$$
$$+\lambda W+(b+cn)/h \qquad (5)$$

그런데 L' 는 h 에 關한 오목函數이므로 $\partial L'/\partial h=0$ 으로 부터 L'를 最小로 하는 h를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$h\doteqdot\sqrt{\frac{\alpha T+b+cn}{\lambda M(1/p-1/2)}} \qquad (6)$$

이제 式(1)과 式(5)를 利用하여 다음의 增分量 (incremental quantity)들을 定義한다.

$$\Delta_n\alpha=\alpha(n+1)-\alpha(n) \qquad (7)$$

$$\Delta_nL'=L'(n+1)-L'(n)$$
$$=(\Delta_n\alpha T+\lambda Meh+c)/h \qquad (8)$$

위의 (8)式은 다음 條件을 滿足시킬 때 L'를 最小로 하는 n 을 얻게 된다.

$$\Delta_{n-1}L'<0\leq\Delta_nL' \qquad (9a)$$

(8)式을 (9a)式에 代入하면 다음과 같다.

$$\Delta_{n-1}\alpha T+\lambda Meh+c<0\leq\Delta_n\alpha T+\lambda Meh+c \quad (9b)$$

위의 (9b)式에서 λMeh 를 λMe 로 代替[5]하면 $\Delta_n\alpha<0$ 이므로 다음과 같이 된다.

$$\frac{-1}{\Delta_{n-1}\alpha}<\frac{T}{\lambda Me+c}<\frac{-1}{\Delta_n\alpha} \qquad (10)$$

그런데 n 의 變化에 따른 $-1/\Delta_n\alpha$, k 그리고 α 의 값을 計算하여 圖表로 나타내면 表 2 와 같게 된다. 그러므로 式(10)을 滿足시키는 n 과 그에 따른 k, α 를 表 2 로 부터 찾은 後, 式(6)에 代入하여 h 를 구하면 決定하고자 하는 近似解를 얻게 된다.

이제 Duncan[3]의 例[6]들을 利用하여 s-管理圖의 最適解와 本 解法으로 얻은 近似解를 比較하면 表 3 과 같다.

表 3 에서 損失費用의 差異는 4% 以內이며 대부분의 境遇 이보다 훨씬 작은 差異를 보여주고 있다.

마지막으로 表 3 의 첫번째 例를 利用하여 本 解法過程을 살펴본다.

1. 式(10)으로 부터 A 를 計算한다.

$$A=\frac{T}{\lambda Me+c}\doteqdot333.3$$

2. 表 2 로 부터 n 과 그에 따른 k, α 를 찾는다.

---

5) $h=1$ 을 代入한 것으로 훌륭한 調査方法은 아니지만 대부분의 境遇 h 가 0 보다 1 에 가까운 값을 取하므로 Duncan[3]과 같이 λMeh 를 無視하는方法보다는 훨씬 바람직한 結果를 期待할 수 있다. 더욱이 h 가 1 의 값에서 크게 벗어나 있는 境遇라도 本 方法으로 얻은 h 를 初期值 h_0로 利用하여 (10)式에 λMe 대신 λMeh_0 를 代入하면 쉽게 最適解에 接近한다.

6) 最適解와 近似解를 比較한 12 個의 例들을 利用하였다.

〈表 2〉 n에 따른 $-1/\Delta_n\alpha$, k, α의 크기($p=0.80$)

							σ_1/σ_0				
n	1.50	n	1.75	n	2.00	n	2.25	2.50	2.75	3.00	
10	41.2	6	20.6	4	12.2	3	6.3	6.7	7.7	9.5	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.16		1.20		1.16		1.06	1.18	1.30	1.42	k
	.2075		.2062		.2575		.3251	.2485	.1845	.1331	α
14	76.3	8	37.7	6	31.9	4	11.7	15.8	24.5	42.3	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.22		1.29		1.37		1.30	1.45	1.59	1.74	k
	.1105		.1127		.0947		.1667	.0976	.0554	.0282	α
18	143.2	10	71.0	8	71.9	5	23.3	42.4	92.1	234.6	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.26		1.35		1.48		1.44	1.61	1.77	1.93	k
	.0580		.0589		.0320		.0814	.0347	.0138	.0049	α
22	273.2	12	137.0	9	124.3	6	49.3	122.9	385.6	1493.3	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.29		1.39		1.52		1.54	1.71	1.88	2.05	k
	.0301		.0308		.0179		.0368	.0121	.0034	.0008	α
26	527.5	14	268.5	10	216.4	7	107.8	375.1	1735.0	10439.5	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.31		1.43		1.55		1.61	1.79	1.97	2.15	k
	.0154		.0142		.0102		.0164	.0038	.0007	.0001	α
30	1029.1	16	534.2	11	381.3	8	243.2	1195.8	8274.5	***	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.32		1.45		1.57		1.66	1.85	2.03		k
	.0078		.0074		.0061		.0073	.0012	.0002		α
34	2026.3	18	1074.6	12	680.4	9	564.6	3964.8	***	***	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.33		1.47		1.59		1.71	1.89			k
	.0040		.0036		.0035		.0029	.0004			α
38	4023.6	20	2188.3	13	1218.0	10	1331.4	13459.8	***	***	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.34		1.49		1.61		1.74	1.93			k
	.0020		.0018		.0019		.0013	.0001			α
42	8053.7	22	5247.7	14	2848.7	11	5196.4	***	***	***	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.35		1.50		1.63		1.77				k
	.0010		.0009		.0010		.0005				α
46	16195.1	25	15705.8	16	9544.6	12	7810.1	***	***	***	$-1/\Delta_n\alpha$
	1.36		1.52		1.66		1.79				k
	.0005		.0003		.0003		.0002				α

122.9($n=6$)<333.3<375.1($n=7$)이므로 $n=7$ $k=1.79$, $\alpha=0.00380$으로 決定된다.

3. 式(6)으로 부터 h를 求한다.

$$h=\sqrt{\frac{\alpha T+b+cn}{\lambda M(1/p-1/2)}}\doteqdot 1.4$$

4. $n=7$, $k=1.79$, $h=1.4$를 式(1)과 式(2) 그리고 式(3)에 代入하면 損失費用 $L=\$4.5214$을 얻는다.

〈表 3〉 s-管理圖에 대한 最適解 및 近似解

번호	σ_1/σ_0	λ	M	e	D	T	W	b	c		n	k	h	$100\times L$	p	차이(%)
1	2.5	.01	\$100	.05	2	\$50	\$25	\$.50	\$.10	최적해	7	1.81	1.4	451.85	0.79	0.1
										근사해	7	1.79	1.4	452.14	0.80	
2	2.5	.01	1000	.05	2	50	25	.50	.10	최적해	5	2.01	0.3	2915.40	0.63	1.3
										근사해	7) 7	1.79	0.4	2952.79	0.80	
8) 3	2.5	.01	10	.50	2	50	25	.50	.10	최적해	5	1.97	3.7	132.03	0.65	2.5
										근사해	7	1.79	4.3	135.38	0.80	
4	2.5	.01	100	.05	20	50	25	.50	.10	최적해	7	1.80	1.6	1878.47	0.79	0.1
										근사해	7	1.79	1.4	1879.88	0.80	
5	2.5	.01	100	.05	2	500	250	.50	.10	최적해	9	1.92	1.5	691.17	0.79	0.1
										근사해	9	1.89	1.5	691.68	0.80	
6	2.5	.01	100	.05	2	50	25	5.00	.10	최적해	10	1.59	3.5	636.13	0.93	3.9
										근사해	7	1.79	2.8	660.94	0.80	
7	2.5	.01	100	.05	2	50	25	.50	1.00	최적해	5	1.72	2.9	688.24	0.76	1.0
										근사해	6	1.71	3.1	694.82	0.80	
8	2.5	.01	1000	.05	2	50	25	.50	1.00	최적해	4	1.79	0.8	3622.88	0.67	1.0
										근사해	5	1.61	1.0	3658.63	0.80	
9	2.0	.01	12.87	.05	2	50	25	.50	.10	최적해	12	1.57	4.8	137.27	0.82	0.3
										근사해	12	1.59	4.4	137.62	6.80	
10	2.0	.01	128.70	.05	2	50	25	.50	.10	최적해	10	1.62	1.3	603.44	0.75	0.5
										근사해	11	1.57	1.4	606.32	0.80	
11	2.0	.01	12.87	.05	2	500	250	.50	.10	최적해	17	1.62	6.1	357.83	0.84	0.4
										근사해	16	1.66	4.8	359.20	0.80	
12	2.0	0.1	12.87	.05	2	50	25	.50	1.00	최적해	7	1.49	10.5	236.80	0.77	0.9
										근사해	8	1.48	10.2	238.91	0.80	

7) h가 0에 가까운 값이므로 처음 얻은 h를 初期値로 하여 反復하여 求하였다.

8) Duncan[3]의 14번째 例에 대한 最適解는 $n=3$, $k=2.3$, $h=0.8$이며 이 境遇 $en(=1.5)>h(=0.8)$이 되어 實際 使用이 不可能 해진다. 通常的으로 e가 크면 相對的으로 M이 작으므로 $M=100$을 $M=10$으로 代替하였다.

參考文獻

1. Chiu, W. K., "Economic Design of Attributes Control Charts," *Technometrics*, Vol. 17, No. 1, 81—87, 1975.
2. Chiu, W. K. and Wetherill, G. B., "A Simplified Scheme for the Economic Design of $\bar{X}$-Chart," *Journal of Quality Technology*, Vol. 6, No. 2, 63—69, 1974.
3. Duncan, A.J., "The Economic Design of $\bar{X}$-Charts Used to Maintain Current Control of a Process," *Journal of American Statistical Association*, Vol. 51, No. 274, 228—242, 1956.
4. __________, "The Economic Design of p-Charts to Maintain Current Control of a Process," *Technometrics*, Vol. 20, No. 3, 235—243, 1978.
5. Gibra, I. N., "Economically Optimal Determination of the Parameters of $\bar{X}$-Control Chart," *Management Science*, Vol. 17, No. 9, 635—646, 1971.
6. __________ "Economically Optimal Determination of the Parameters of np-Control Charts,"

Journal of Quality Technology Vol. 10, No. 1, 12—19, 1978.

7. Knappenberger, H. A., and Grandage, A. H., "Minimum Cost Quality Control Tests," *AIIE Transaction*, Vol. 1, No. 1, 24—32, 1969.
8. Ladany, S. P., "Optimal Use of Controlling Current Production," *Management Science*, Vol. 19, No. 7, 763-772, 1973.
9. Montgomery, D.C., Heiks, R. G. and Mance, J. F., "Economic Design of Fraction Defective Control Charts," *Management Science*, Vol. 21, No. 11, 1272-1284, 1975.
10. Shewhart, W.A., *Economic Design of Quality of Manufactured Product*, Van Nostrand Reinhold, Princeton, New Jersey, 1931.

要 約

本 研究는 s-管理圖의 經濟的 設計에 있어서 諸般 母數들을 決定하는 매우 간단한 解法過程을 提示하였다. 여기에서 이 母數들은 샘플의 크기, 管理限界의 幅을 決定하는 係數 그리고 샘플링 間隔을 가리킨다. 本 解法으로 부터 決定된 母數들이 損失費用에 있어서 最適解에 매우 近似하고 있음을 여러 例題들을 通해 살펴보았다.