韓國數學敎育學會誌 <數學敎育>
1980. 12. Vol. XIX No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1980. Vol. XIX No. 1

數學科에서의 發見學習의 指導

서울敎大 沈 敬 輔

1. 序 論

創造力의 伸張과 創造性의開發을 위한 學習指導가 擧論됨에 따라 創造性 開發學習의 指導가 强調 되었다. 敎科書의 構成에서도 兒童들의 心理發達과 自發性을 重視하고 있는데 이처럼 發見的 學習이 强調되게 된 데는 그만한 理由가 있다.

그 첫째는 最近의 文化技術의 發達이 急速度로 이루어진다는 것이다. 技術革新의 흐름이 빨라 兒童들이 學校를 卒業하고 社會에 나올 때는 學校에서 배운 知識이나 技術은 이미 낡은 것이 되고 새로운 情報나 技術이 기다리고 있으며 더욱 새로운 技術의 開發이 要請되고 있다. 이와 같은 時代에 適應하고 새로운 社會를 建設하기 위하여는 더욱 豊富한 創造性을 갖고 더욱 새로운 情報를 收集하여 새로운 技術을 開發할 수 있는 創造力을 必要로 하게 된다. 따라서 敎育에 있어서도 知識이나 技能을 가르치는 것 보다는 이것을 만드는 創造性을 높여 發明, 發見의 能力을 기르자는 것이다. 數學敎育에서 知識과 技能의 授業을 줄이고 數學的 思考力을 키우는 것을 重視하는 것도 바로 이 理由 때문이다.

둘째는 "理解"(1)라는 精神活動에서 오는 必然的 要請이다. 數學에서 말한다면 單純히 計算法이라던가 數의 處理方法만 외우면 되는 것이 아니다. 理解를 시켜야 하고 理解를 굳혀야 하는 것이다. 理解를 한다는 精神活動은 새로운 事件에 直面할 때 그것을 分析하고 抽象하며 이미 알고 있는 知識이나 理解事項과의 關係를 洞察하고 그것을 統合한 調和된 世界를 만들어야 하므로 必然的으로 創造 및 發見의 性格을 內包한다.

"말을 물가에 끌고 갈 수는 있으나 물을 억지로 먹일 수는 없다."

는 俗談처럼 兒童의 自發的 學習意欲이 있고 스스로 理解하고 納得하지 않는다면 아무리 敎師가 妙하게 說明해도 理解가 어려울 것이다. 發見的 學習은 兒童 스스로를 自發的으로 發見的으로 學習해 나가도록 하는 것이지만, 그냥 放任하면 兒童은 意欲을 일으키지 않고 學習方法을 모르므로 敎師가 適當한 刺戟을 주어 兒童의 學習을 도와 주는 것이다.(2) 처음부터 끝까지 敎師가 읽고 說明하는 것이 아니고 適當한 힌트나 손짓 등 흉내를 내어 兒童 스스로의 힘으로 原理나 法則을 찾고 處理方法을 發見하여 理解를 굳히도록 誘導하는 것이다. 따라서 發見學習은 學生의 立場에서 본다면 自己 힘으로 發見하고 理解했다는 滿足感을 주지만 敎師의 立場에서 보면 이 指導法으로 學生의 理解를 깊게하고 創造力이나 應用力을 높이려는 目的이므로 恒常 敎師의 도움이 必要하다.

그렇다면 어떤 도움이 必要한가?

例를 들어 發見學習의 指導方法을 研究해 볼까 한다.

2. 發見(的) 學習指導方法

數學에서의 發見學習은 어떻게 行해져야 하며

어떻게 指導해야 하는가를 위하여 發見學習의 構造를 ① 思考의 場 ② 思考의 內容 ③ 思考의 形式으로 分析하고 思考의 內容을 여러개의 基本的 思考로 分析하고 있다.[3]

數學의 學習은 單純히 머리로만 行해지는 것이 아니고 全身的 活動이 必要하다. 더욱 더 發見的 學習에서는 손, 눈, 머리, 즉 doing, seeing thinking의 三者가 統合的으로 움직여야 한다.[4] 數學은 생각하는 敎科이므로 머리의 活動을 주로 하는 것이 當然하지만 實驗, 實測, 工作 等 손을 위주로 하는 活動이 있고 표나 graph를 그려 直觀的 觀察을 하는, 눈을 주로 하는 活動이 있다. 또 數學에서는 記號를 使用한 式의 表示가 많이 있는데 이는 槪念을 限定하여 明確하게 나타내는 目的도 있지만 表現을 單純化 시켜 觀察하기 쉽게 하는 데도 目的이 있다. 百聞이 不如一見이다. 數學에서는 눈으로 본다는 것이 重要하다. 勿論 "行한다" "본다" "생각한다"는 活動은 서로 獨立的인 것이 아니고 統合的 相關的 活動이고 問題의 場所나 그 構造에 있어서 그 總合하는 方法은 다르지만 어느 하나라도 빠지면 數學의 學習은 잘 이루어지지 않는다.

例 1.

「圓周上의 n個의 點중 2個를 擇하여 만들어지는 모든 弦은 圓의 內部를 몇 個의 部分으로 나누는가? 단 弦은 어느 3個도 한 點에서 만나지 않는 것으로 한다.」

$n=1, 2, 3\cdots\cdots$로 잡아 歸納的으로 法則을 찾을 수도 있지만 다음과 같이 指導해 본다. 그림(1)처럼 圓周上에 5個의 點을 잡고 모든 弦을 그으면 圓의 內部가 16個의 部分으로 나눠진다.

다음에 圓周上의 6번째의 點 A_6을 잡았다면 A_6을 $A_1A_2A_3\cdots\cdots$와 연결할 때 面이 얼마나 늘어나는 가를 살펴 보자. A_6과 A_1 사이에는 點이 없으므로 線分 A_6A_1은 다른 弦과 만나지 않는다. 따라서 활꼴 $A_6A_1A_5$는 두 個로 分割될 뿐이다. 즉 面이 1個 늘 뿐이다. 다음 線分 A_6A_2를 이으면 A_6와 A_2 사이에는 A_1이 있고 반대쪽에는 A_3, A_4, A_5가 있으므로 線分 A_6A_2는 弦 A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5와 만난다. 즉, 線分

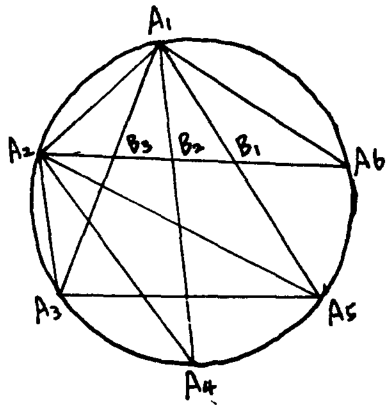

그림 (1)

A_6A_2上에 3개의 交點이 생기므로 4個의 部分으로 나누어져 結局 4個의 面이 늘어난다. 또 A_6와 A_3 사이에는 A_1, A_2가 있고 반대쪽에 A_4, A_5가 있으므로 弦 A_6A_3은 線分 A_1A_4, A_1A_5, A_2A_4, A_2A_5와 4點에서 만나 5個의 面이 늘어난다. 線分 A_6A_4는 線分 A_6A_1, 또 線分 A_6A_5는 線分 A_6A_1과 같은 立場이므로 結局 A_6을 다른 點과 이어서 늘어나는 面의 數는 $1+4+5+4+1=15$이다. 따라서 點이 5個인 경우 16에다 15를 더하여 面의 數는 31個이다. 지금까지의 方法은 歸納法으로 解決하려는 方法이고 여기 다른 方法으로 試圖해 보자.

A_6에서 A_2로 弦을 그을때 線分 A_1A_5과의 交點 B_1이 생길때 까지는 圓의 內部가 分割되지 않지만 B_1에서 線分 A_1A_5가 만날때 부채꼴 $A_1A_5A_6$가 두 個로 分割된다. 따라서 交點 B_1에 對應하여 한 個의 面이 늘어 나는 셈이다. 마찬가지로 B_2까지 그을때 1個가 늘고 B_3까지 그을때 1個가 늘어나 마지막 A_2까지 그을 때 즉 弦 A_6A_2가 完成될 때 1個가 늘어난다. 따라서 交點의 數 3과 弦의 數 1을 더한 4個가 늘어난다. 다른 弦에서도 같은 方法으로 생각하면 面의 數는 弦이 1個 그어질 때 마다 1個씩 늘어나고 다른 弦과 만날 때 마다 1個씩 늘어나므로

$$(\text{面의 數})=1+(\text{弦의 數})+(\text{弦의 交點의 數})$$

윗式에서 1은 弦을 한개도 긋지 않을때 圓의 內部는 1個의 面임을 나타내고 있다. 그런데 圓

周上에 n個의 點이 있을때 弦의 數는 組合의 定義에서 ${}_nC_2$이고 弦의 交點의 數는 ${}_nC_4$이다.

따라서

$$(\text{面의 數}) = 1+{}_nC_2+{}_nC_4$$

이 問題가 中學生에게는 무리지만 高等學生에게는 hint를 주는 程度에 따라 發見시킬 수 있는 例이다. 點과 弦은 이미 알고 있는 것으로 하고 作圖하는 過程에서 그 하나 하나의 操作에 따라 面이 늘어나는 것을 考察시키고 그속에서 法則을 찾게 할 수 있다. 法則의 發見은 "doing" "seeing" "thinking"의 總合的 活動의 所產이다.

例 2.

所謂 Königsberg의 다리 問題이다.

「그림(2) 처럼 都市가운데를 시내가 흐르고 다리가 7個 놓여 있다. 이 다리를 한번만 지나고 모두 건널 수 있는가?」

이 問題를 보고 中學生이면 대개 그림 따라 試行錯誤로 여러번 試圖해보고 "안된다"고 말할 것이다.

이 問題를 解決하기 위하여 다음과 같은 hint를 차례로 주어 본다.

힌트 1. B地는 섬이고 다른 地는 陸地지만 섬이건 아니건 이 問題 풀이에는 無關함으로 그림 (3) 처럼 그림을 바꿔 그리도록 한다.

힌트 2. 섬의 크기나 모양이 이 問題를 푸는데 關係 있는가 없는가를 생각하게 하고 다리의 크기나 幅이 無關함을 認知시킨다. 그러나 다리의 個數는 바꿀 수 없음을 안다.

힌트 3. 섬은 點으로 다리는 線分으로 나타낼 수 있는가를 생각하게 하고 그림 (4) 처럼 그림 (2)의 問題를 그림 (4)가 一筆的인가를 묻는 問題로 보도록 한다.

힌트 4. A에서 出發하여 ①의 다리를 건너 B에 가고 다리 ②를 건너 A에 돌아 왔다면 그림

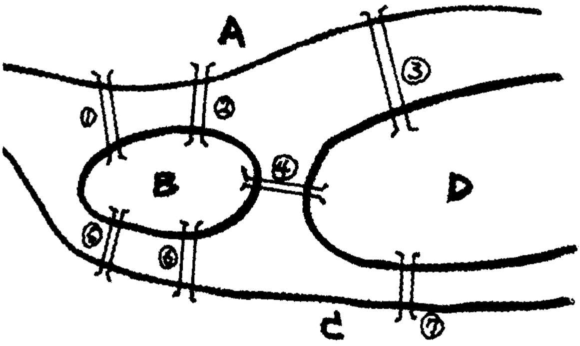

그림 (2)

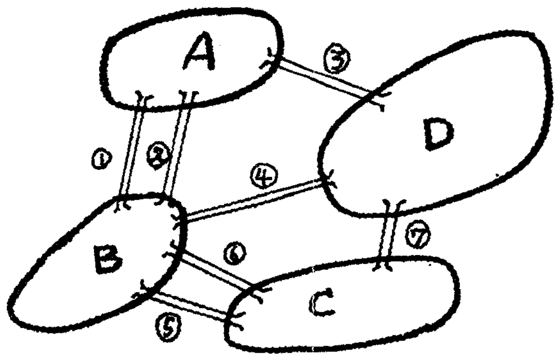

그림 (3)

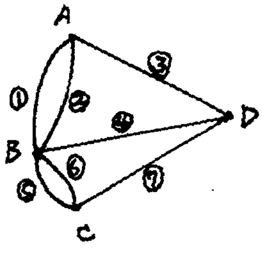

그림 (4)

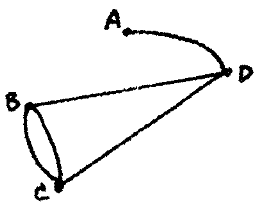

그림 (5)

그림 (6)

(5)에서 一筆的인가를 생각하면 된다.

힌트 5. 가고 오는 環狀線을 떼어 버리거나 더 추가하던간에 一筆的인 것에는 관계 없음을 認知하게 한다.

힌트 6. 그림 (5)에서 環狀線 BC를 除去해도 一筆的인가 아닌가는 無關하므로 結局 그림 (6) 처럼 간단한 圖形이 一筆的인가 아닌가를 묻는 것이 됨으로 一筆的일 수 없음을 直觀的으로 自明하다. 그림 (4)가 一筆的이 아니므로 그림 (2)에서 7個의 다리를 한번씩만 지나다 건널 수 없음을 알 수 있다. 그러므로 一筆의 問題에서는 언제나 環狀線은 除去해도 無關함을 反省시켜 圖形의 어느 部分을 除去해야 無關하는가를 認知시킨다. 따라서 한 點에서 나가는 線의 數가 홀수냐 짝수냐에는 變化가 없다는 것도 理解시켜 "奇點·偶點"이란 用語를 導入시킨다.[5] 奇點과 偶點의 定義에서 奇點을 始發點으로 하면 그 奇點은 終點이 될 수 없고 偶點을 始發點으로 하면 그 點이 終點이 되어야 함을 理解시킨다. 나아가 奇點의 數가 0 또는 2면 一筆的이지만 그외의 경우는 一筆的일 수 없다는 것도 發見시킨다. 또 奇點의 數는 언제나 짝수個이고 奇點의 數가 $2n$면 n筆이 되는 것도 發見시킬 수 있다.

以上과 같이 適當한 hint를 줌으로써 問題를 單純化하거나 一般化하여 理解를 깊게하고 創造的 思考力을 키우는 것이 發見的 學習指導의 方法이다. 勿論 思考의 分析도 必要하지만 兒童의 槪念形成이나 問題解決에서의 思考의 形相을 더 詳細히 더 具體的으로 把握하는 硏究가 必要하다. 素材는 發展性있고 兒童의 能力에 適合한 것을 擇해야 한다.

現在의 發見學習이 從前의 問題解決學習과 다른 것은 "發見法"을 重視하고 있는 點이다. 發見에 이르기까지의 有效한 質問이나 暗示를 列擧하면……

1) 未知數는 무엇인가? 주어진 것은 무엇인가? 條件은 무엇인가?

2) 條件을 만족하는가? 條件은 未知事項을 決定하는 데 充分한가? 不足한가? 너무 많은가? 矛盾인가?

3) 그림을 그려라. 適當한 記號를 써 넣어라.

4) 條件이 모두 몇 개이며 그것을 나타낼 수 있는가?

5) 전에 본 문제인가?

6) 비슷한 問題를 알고 있는가? 必要한 定義를 알고 있는가?

7) 未知數를 잘 보고 같은 것인지 비슷한지를 생각해 내라.

8) 이미 푼 類似問題가 있다면 그 方法과 結果를 利用하라.

9) 問題를 바꾸어 말할 수 없는가?

10) 問題가 풀리지 않으면 關連된 問題를 풀어라. 가장 쉽고 類似한, 一般的인 것을 찾아라.

11) data를 다 使用하였는가? 條件은 다 使用하였는가? 問題에 包含되는 本質的 槪念을 다 생각했는가?

12) 解答을 企劃할 때 各 스탭을 檢討하라. 各 스탭이 옳다는 것이 認定 되는가?

13) 結果와 過程을 吟味할 수 있는가?

14) 結果를 다른 方法으로 誘導할 수 있는가? 그것을 곧 把握할 수 있는가?

15) 다른 問題에 이 結果나 方法을 應用할 수 있는가?

1)~4)는 問題把握에 關한 것이고

5)~11)은 解決法의 探究에 關한 것이고

12)는 實行에 관한 것이고

13)~15)는 結果의 檢討에 關한 것이다.

問題解決의 各段階에서 위와 같은 事項을 念頭에 두는 것은 퍽 有益한 것이다. 그러나 이것은 어디 까지나 一般的 問題解決을 위한 事項이고, 數學의 發見學習이란 立場에서 보면 不充分하다. 위의 事項들은 旣知의 知識의 想起나 歸納이요, 類比推理이고, 必然的으로 數學이 나타나게 하는 基礎原理가 아니다.

數學科에서 發見學習이라 하면 「數學을 創造하는 學習[6]」이라 말하는데 數學이 創造되는 獨特한 무엇을 생각해 보자. 數學科 敎材의 基本에 存在하며 차츰 發達하여 轉移하는 核이 되는 重要한 槪念인 中心槪念이 있다. 이 中心槪念에

着眼한 것은 發見學習 硏究의 한 進步를 意味한다. 中心概念의 具體的 例를 들어 보자.

中學校의 例는「三角形의 한 邊을 지나 다른 邊에 平行인 直數을 그을때 이 直數과 남은 邊과의 關係를 數的으로 본다」,「圓의 接線과 弦이 이루는 角이나 圓周角을 어떤 原則 아래 移動시키는 論理的 判斷」등이다.

國民學校에서는「시계를 볼 때는 큰 바늘과 작은 바늘의 2가지로 결정된다」,「問題를 푸는데 必要한 公式은 小數라도 整數때와 마찬가지로 使用할 수 있다」등이다.

中學校의 例는 思考하는 方向이고, 小學校의 例는 事實에 關한 것이다. 이와 같이 思考하거나 事實을 나타내는 것보다 더 根源的인 것이 中心概念이다.

이 數學 特有의 概念을 要約하면

1) 概念을 記號化 한다.

2) 概念이나 法則을 擴張하거나 一般化 한다.

3) 演繹이나 推論에 의하여 知識을 體系化 한다.

4) 對應關係 依存關係를 取한다.

5) 式이나 圖形의 不變性을 取한다.

6) 解析的 方法과 圖形的 方法의 關連性을 維持한다.

以上에서 發見學習의 指導는 要約하여 다음 3가지 目標를 갖고 實施 해 왔는데 그 評價는 바로 이 目標가 達成되었는지 아닌지를 確認하는 것이다.

① 概念이나 原理 法則의 理解를 보다 깊게 發展性 있게 한다.

② 關係把握이나 法則性發見의 能力을 기르고 問題解決力을 높인다.

③ 統合的 發展的으로 考察하는 態度와 能力을 育成하여 創造的 思考力을 伸張시킨다.

評價하는 方法으로써 ①②의 理解力이나 問題解決力을 評價하는 問題를 만드는 것을 比較的 쉬운 일이나 ③과 같은 創造的 思考力이 어떻게 伸張되었는지? 統合的, 發展的으로 考察하는 態度가 育成되었는지 아닌지를 評價하는 問題를 만들기에는 힘이 많이 들 것이다. 이와 같은 思考나 態度는 短時日 內에 큰 變化를 가지고 올 것이라고 期待하기에는 무리이므로 이의 評價問題도 앞으로 硏究課題의 하나로 볼 수 있다.

3. 結 論

數學科에서의 發見學習이란 要는 授業이 어떻게 進行되어 나가는가가 重要하므로 特別한 理論이 없어도 發見學習은 이루어짐을 알 수 있다. 現場의 發想으로는 역시 問題의 提示가 어떻게 주어져야 하는가? 學生의 質問이 어떻게 始作되어야 하는가? 어떻게 誘導해야 學生이 自主的으로 學習하는 環境을 만들 수 있을까 하는 것이다.

따라서 單元이나 數學 全體의 指導內容을 分析하고 精選된 敎材를 갖고 系統的으로 計劃된 授業에서 비로소 發見學習이 이루어진다고 본다. 즉 發見學習이란 어려운 理論이나 方法에 依하여야만 이루어지는 것이 아니고, 問題에 對한 學生의 思考를 重視한다면 누구나 可能하다고 본다.

參 考 文 獻

1. Phillip. S. Tones "Discovey Teaching from Socrates to Modernity" (1970)
2. 阿部八代太郎 "數學敎授法" (1931)
3. 伊藤武 "敎育科學 數學敎育" (1973)
4. T. W. A. young "The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Seconday school"
5. 中村勝彦 "Topology" (明治圖書)
6. 李晶容 "敎授—學習의 理論과 實際(敎育科學社)"