

自動車용 추진축의 위험회전속도와 Balancing 문제 小考

On the Study of the Critical Revolution Speed and Balancing Problems in the Automobile Drive Axle

徐 龍 權

(現代自動車 生産技術三部)

1. 序 言

자동차용 추진축의 위험회전속도를 원심력에 의한 탄성변형의 관계로부터 유도하여 보았다. 회전체의 unbalance량은 보통 회전속도에 관계없이 거의 일정하나 자동차용 추진축과 같이 外徑에 비하여 全長이 길고 高速회전하는 경우에는 축의 탄성변형에 의하여 unbalance량이 커진다. 회전속도에 따른 unbalance 변화량을 역시 원심력-탄성변형관계로부터 구하고 balancing을 위한 最適회전속도, tube의 편심도 기타 balancing 作業을 어렵게 하는 요소들에 대하여 정리하여 보았다.

2. 위험회전속도

물체의 회전중심과 질량중심이 完全히 일치하고 어떤 외부의 힘도 作用하지 않는다고 하면 그 회전체는 無限히 큰 속도로 회전해도 위험하지 않다. 그러나 微小한 量이나마 이 가상적인 상태에서부터 벗어나면 그 어떤 회전속도에서 파손하거나 적어도 파손할 위험이 있다. 회전체가 추진축과 같이 긴 tube의 탄성체이고 兩端支持이며 최초로 어떤 量의 편심이 있다고 생각해 보자. tube는 회전함에 따라 中心으로부터 멀리 떨어지려는 힘(원심력)이 있을 것이며 이 힘에 의하여 tube는 탄성변형을 일으킬 것이다. 물체가 저속에서 회전할 때는 원심력이 탄성력을 쉽게 이길 수 없으나 高速에서 회전할 때는 쉽게 이겨 변형이 急히 증가하여 마침내 어떤 속도에서는 無限히 커지는, 즉 tube가 파손하는 結果를 가져온다. 이것이 위험회전

속도이다.

初期의 tube의 영구변형량 y_0 가 축을 따라

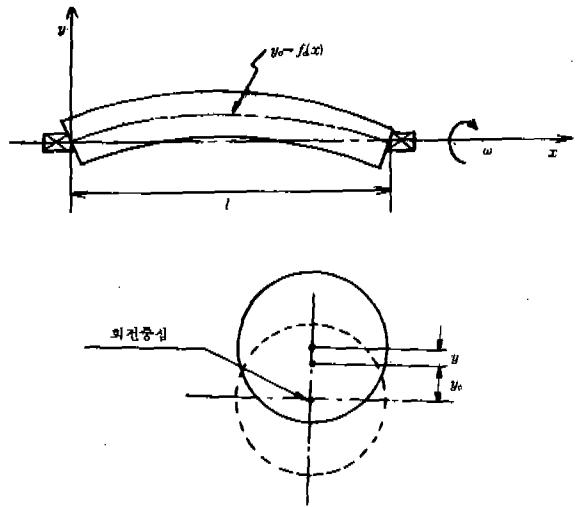
$$y_0 = f_0(x) \dots \dots \dots (1)$$

의 상태로 분포되어 있다고 가정하자(그림1.). 그리고 원심력에 의하여 축이 일으킨 탄성변형량을 y 라 하면 원심력 $F_c(x)$ 는

$$F_c(x) = m(y + y_0) \omega^2 = oA(y + y_0) \omega^2$$

여기서,

- m : 단위길이당 tube 질량
- ω : 추진축의 회전각속도
- o : 재료의 밀도
- A : 추진축의 단면적



(그림 1)

한편 고체역학에서 beam의 하중분포에 따른 탄성변형의 一般의인 관계를 나타내는 공식은,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI} \dots\dots\dots (2)$$

E : 종탄성 계수

I : 단면 2차 moment

q : 단위 길이당 하중분포

(2)식의 q 대신에 $F_c(x)$ 를 代入하면,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} (y + y_0)$$

$$\frac{\rho A \omega^2}{EI} = a^4 \text{으로 두면,}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - a^4 y = a^4 y_0 \dots\dots\dots (3)$$

(3)식은 4차 線微分方程式이다.

$$y = y_p + y_c$$

$$y_c = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \sin ax + C_4 \cos ax$$

boundary condition은,

$$x = 0, l \text{에서 } y = 0, y' = 0$$

이것을 적용하면,

$$y = y_p + \frac{Q_1 e^{ax} + Q_2 e^{-ax} + Q_3 \sin ax + Q_4 \cos ax}{\sin al (e^{-al} - e^{al})} \dots\dots\dots (4)$$

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 는 y_p 가 정해지면 구할 수 있다. (4)식에서 $al = n\pi (n=1, 2, 3, \dots)$ 일 때 y 의 값은 無限大가 된다. 1차 위험회전속도는 $n=1$, 즉 $al = \pi$ 일 때이다.

$$al = \pi$$

$$\frac{\rho A \omega^2}{EI} - l^4 = \pi^4$$

$$\omega_c = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

$$N_c = \frac{60\omega_c}{2\pi} = \frac{60\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

추진축의 외경이 d_1 cm, 내경이 d_2 cm, u/joint間 거리가 l cm 이고 재료가 鋼이면,

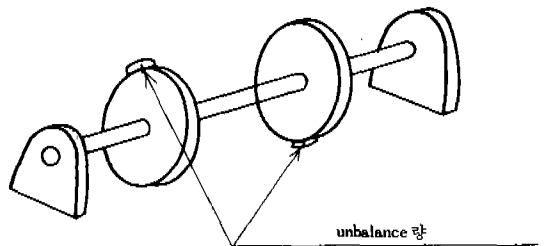
$$N_c = 1.2348 \times 10^7 \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{l^2}} (rpm) \dots\dots\dots (5)$$

(5)식을 보면 추진축의 위험회전속도는 외경에 거의 비례하고 u/joint間 거리의 제곱에 반비례함을 알 수 있다.

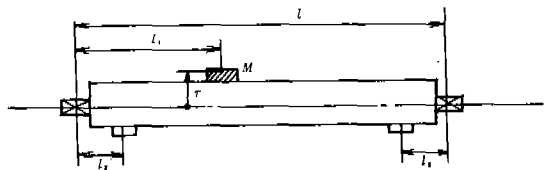
3. 추진축의 balancing 문제

(1) balancing 기초

회전물체의 unbalance에는 靜的 unbalance와 動的 unbalance가 있다. 그림 2와 같이 두개의 disc를 가진 축이 兩 bearing에 의하여 支持되어 있는 경우 各各의 disc에서 서로 反對되는 위치에 크기가 같은 unbalance량이 存在한다고 할 때 이 축은 어떠한 회전 위치에서도 均衡을 잡고 静止해 있을 수 있다 (statically balanced). 그러나 이것을 회전시키면 원심력에 의한 moment 差로 인하여 兩 bearing에 힘이 加해진다. 즉 動的으로 unbalance를 이루고 있는 것이다 (dynamically balanced).



(그림 2)



(그림 3)

一般的으로, 어떠한 system에서 動的으로 均衡을 이루고 있으면 靜的으로도 역시 均衡을 이룬다. 그러나 그 逆은 成立하지 않는다.

Unbalance량은 unbalance된 質量에다 그것이 회전중심으로부터 떨어진 거리를 곱한 값으로 표시된다. 그림 3과 같이 全長 l 인 추진축에 質量 M 이 中心으로부터 r 떨어진 위치에 있어 이 축의 unbalance를 일으킨다고 할 때 bearing 양단으로부터 l_2 떨어진 위치에다 얼마만한 質量을 붙여야 動的 均衡을 잡을 수 있을까?

$$\sum F = 0, \sum M_o = 0 \text{에서}$$

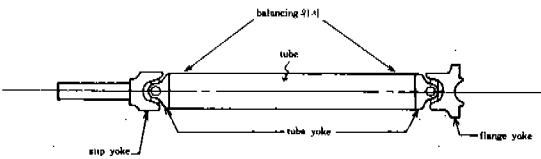
$$m_2 = \frac{l - l_1 - l_2}{l - 2l_2} M$$

$$m_3 = \frac{l_1 - l_2}{l - 2l_2} M$$

즉 m_2, m_3 를上記式에 해당하는 질량으로 하여 취부하면 動的균형을 잡을 수 있다. 그런데 이 축의 鋼性이 無限히 커서 完全히 단단한 재질이면 회전속도 ω 에 관계없이 動的균형을 이룰 수 있으나 자동차용 추진축과 같이 外徑에 비하여 全長이 긴 鋼管으로 되어 있는 경우에는 中央部の 質量(그림 3의 M)의 원심력으로 인하여 tube가 휘어지고 따라서 회전속도에 따라 unbalance 량의 變化가 생긴다.

(2) 추진축의 unbalance 變化

추진축의 unbalance를 일으키는 要素를 보면 그림 4에서 나와 있듯이 우선 지지점 부근의 yoke類에 있어서 형상불균일 또는 회전중심과의 편심으로 인한 unbalance가 있겠으나 이러한 요소들은 회전중 탄성변형을 거의 일으키지 않는다. 그 다음, tube 자체가 이미 휘어져 있다든가 tube 中心이 회전중심으로부터 편심된 위치에 있어 생기는 unbalance가 있다. 이러한 경우는 앞에서 언급한 것처럼 회전중의 tube 휨에 의하여 unbalance 크기가 變한다.



(그림 4)

Tube의 中心(엄격히 표현하여 質量中心)이 수학적으로 표현 가능한 간단한 直線으로 되어 있다고 가정하고 다음 두가지 경우에 있어서의 unbalance 문제를 생각해 보기로 한다.

(CASE 1)

初期질량중심분포 y_0 가

$$y_0 = z_1 - \frac{z_1 + z_2}{l} x \dots \dots \dots (6)$$

일 때(그림 5) y_0 를 (3)式에 대입하여 풀면,

$$y + y_0 = \frac{z_1}{2} \cos ax - \frac{z_1 + z_2 \cos al}{2 \sin al} \sin ax$$

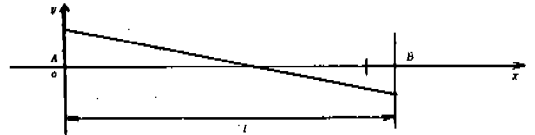
$$+ \frac{(z_1 e^{at} + z_2) e^{-ax} - (z_1 e^{-at} + z_2) e^{ax}}{2(e^{at} - e^{-at})} \dots (7)$$

($y + y_0$)의 변형에 의하여 지지점 A, B에서 感知되는 unbalance 량 U_a, U_b 는,

$$U_a = \frac{1}{l} \int_0^l \rho A dx (y + y_0) (l - x)$$

$$= \frac{\rho A}{2a} \left[\frac{z_1 (e^{at} + e^{-at}) + 2z_2}{e^{at} - e^{-at}} - \frac{(z_1 \cos al + z_2)}{\sin al} \right]$$

$$U_b = \frac{\rho A}{2a} \left[\frac{-z_2 (e^{at} + e^{-at}) - 2z_1}{e^{at} - e^{-at}} + \frac{(z_2 \cos al + z_1)}{\sin al} \right]$$



(그림 5)

순전히 초기질량분포 y_0 만에 의한 unbalance 량 U_a', U_b' 는,

$$U_a' = \frac{1}{6} (2z_1 - z_2) \rho A l = \frac{M}{6} (2z_1 - z_2)$$

$$U_b' = \frac{1}{6} (z_1 - 2z_2) \rho A l = \frac{M}{6} (z_1 - 2z_2)$$

M : tube의 총질량

지지점 A, B에서의 unbalance는 서로 類似한 상태이므로 U_a 및 U_a' 만 생각하기로 한다.

$z_1 = \delta, z_2 = m\delta, al = t$ 로 두면,

$$U_a = \frac{M\delta}{2t} \left[\frac{e^t + e^{-t} + 2m}{e^t - e^{-t}} - \frac{\cos t + m}{\sin t} \right] \dots \dots (8)$$

$$U_b = \frac{1}{6} M\delta (2 - m) \dots \dots \dots (9)$$

$$U_a - U_a' = \frac{M\delta}{2t} \left[\frac{e^t + e^{-t} + 2m}{e^t - e^{-t}} - \frac{\cos t + m}{\sin t} - \frac{(2 - m)t}{3} \right] \dots \dots \dots (10)$$

(9)式을 보면 초기질량분포만에 의한 unbalance U_a' 는 추진축의 총질량 M 에 비례하고 편심량 δ 에 비례한다. 또한 U_b' 까지 고려하면 축이 편심이되 지지점 A, B에서 서로 反對方向일수록 unbalance 량이 적다. (10)式은 tube의 회전중의 탄성변형 y 만에 의한 unbalance 變化량을 나타내는데 역시 편심량 δ 에 비례한다. 그러나 언뜻 보면 추진축의 총질량 M 에도 比例할 것 같으나 變數 t 内部에 총질량에 관계하는 A, l, l 을 포함하고 있기 때문에 더 구체적인 分析을 要한다. 구체적인 例로

$l = 100\text{cm}$

$d_1 = 7\text{cm}, d_2 = 6.7\text{cm}$

$\delta = 0.05\text{cm}$

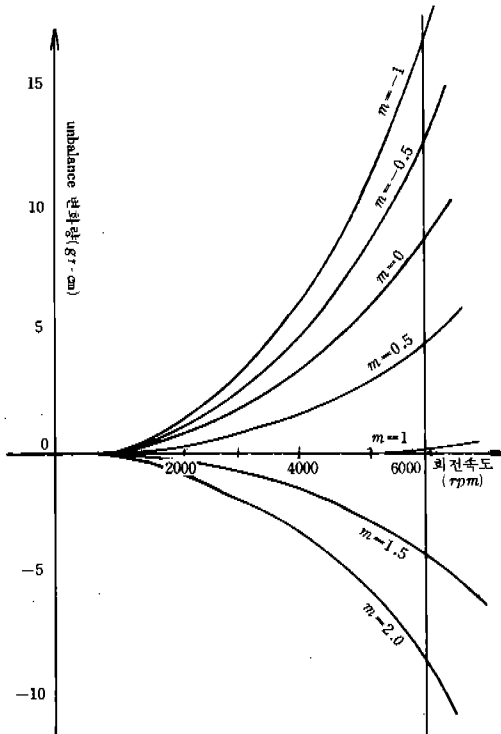
재료는 鋼이면,

$$t = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot l \cdot \sqrt{\omega} = 8.875 \times 10^{-2} \sqrt{\omega}$$

$$U_a - U'_a = \frac{126.7}{2t} \left[\frac{2m + e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} - \frac{m + \cos t}{\sin t} - \frac{(2-m)t}{3} \right]$$

이것을 m 值별로 graph로 그리면 그림 6과 같다. 여기서 $m=1$ 일 때 變化量은 거의 없으나 $m=-1$ 일 때 즉, tube가 회전중심과 나란히 편심되어 있을 때는 상당한 變化량을 보인다.

$m=-1$ 인 경우 추진축의 balancing을 4000rpm에서 正確히 해 준다면 6000rpm에서는 10.5gr-cm의 잔류 unbalance가, 1000rpm에서는 7gr-cm의 잔류 unbalance가 서로 반대되는 위치에서 생긴다.



(그림 6)

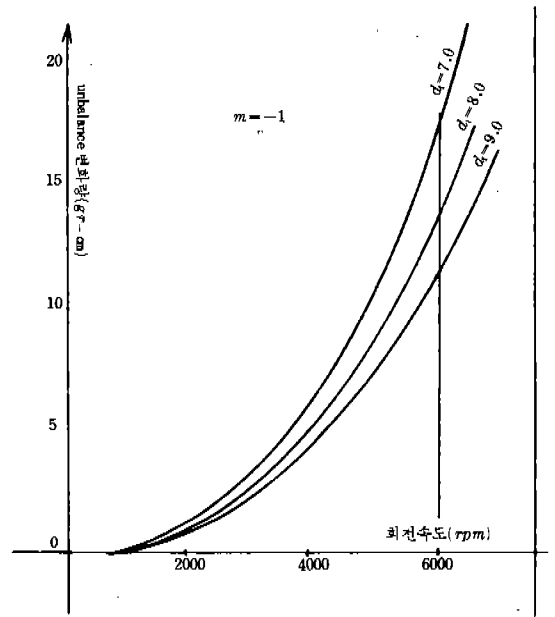
중요사용회전속도를 1000~5500 rpm으로 하고 각 rpm에서의 사용빈도 또는 重要度를 문제삼지 않는다면 balancing 機械에 무리가 없는 限 4000 rpm 부근에서 balancing 작업하는 것이 有利할 것이다.

그림 7은 tube의 직경만을 크게 했을때의 unbalance 變化량을 보여 준다. 직경이 크면 클수록 變化량이 오려져 적음을 알 수 있다.

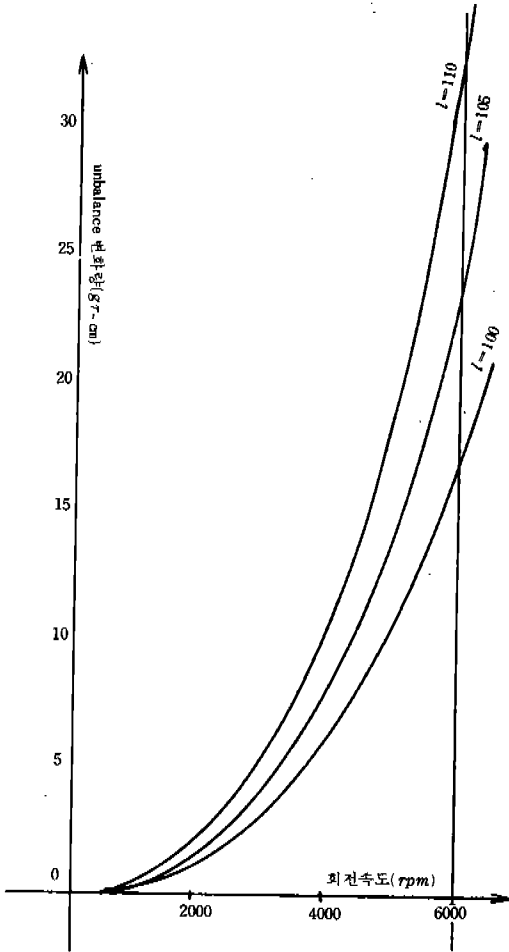
그림 8은 추진축의 u/joint間 거리만을 크게 했을 때의 變化량을 보여준다. 길면 길수록 變化량이 커진다. 직경에 의한 變化량의 變化보다 훨씬 더 민감한 變化를 하고 있음을 알 수 있다.

(CASE 2)

이번에는 그림 9와 같이 추진축의 질량 중심선이 직선이되 회전중심과 비평행 비교차인 일반적 인 경우를 생각해 보자. 모든 가능한 공간상의 어떤 직선이 xy 평면에서 AB 에 평행하게 놓이도록 y z 축을 定할 수 있을 것이다. 계산은 (xy) 평면과 (yz) 평면을 別個로 하고 후에 다시 종합하기로 한다.



(그림 7)



(그림 8)

$$Uay = \frac{M\delta}{2t} \left[\tan h \frac{1}{2} t + \tan \frac{1}{2} t \right]$$

$$Uay' = \frac{1}{2} M\delta$$

$$Uaz = \frac{M\epsilon}{2t} \left[\frac{e^t + e^{-t} + 2m}{e^t - e^{-t}} - \frac{\cos t + m}{\sin t} \right]$$

$$Uaz' = \frac{1}{6} M\epsilon(2 - m)$$

구체적인 例로,

$$l = 100 \text{ cm}$$

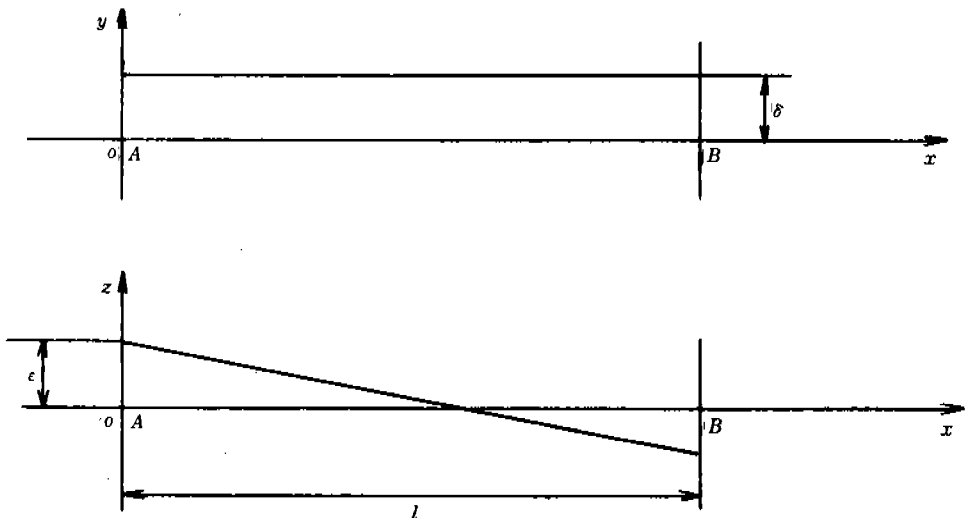
$$d_1 = 7 \text{ cm}, d_2 = 6.7 \text{ cm}$$

$$\delta = 0.02 \text{ cm}, \epsilon = 0.05 \text{ cm}$$

$m = 2$ 인 경우에는 그림 10과 같다.

그림 10을 보면 회전속도에 따라 unbalance 크기만 변하는 것이 아니라 unbalance 方向도 같이 변하는 것이다. 4000 rpm에서 unbalance 량이 28 gr-cm (\overline{OR}) 이나 balancing 작업時 그림과 같이 35 gr-cm (\overline{OT}) 만큼 balancing 하였다고 하면 잔류 unbalance는 \overline{TR} (7 gr-cm)가 될 것이다. 이렇게 한 뒤 추진축을 다시 회전시켜 검사를 하면 정지상태에서 \overline{TP} , 2000 rpm에서는 \overline{TQ} , ..., 6000 rpm에서는 \overline{TS} 만큼의 잔류 unbalance가 存在할 것이다. 각도 변화는 $\angle STP \approx 84^\circ$.

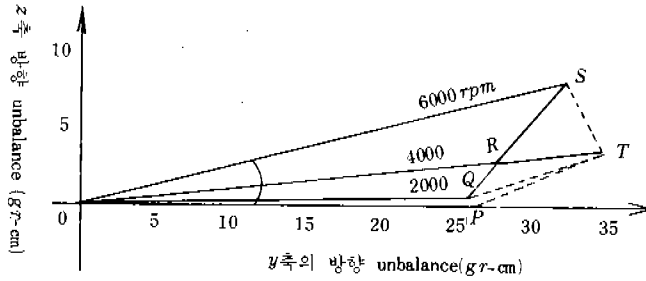
실제에 있어서 추진축의 unbalance는 이렇게 크기 및 方向이 同時に 변하여 balancing 작업을 어렵게 한다. balancing을 어렵게 하는 요소는 이것 외에 u/joint 内の 유격이나 u/joint 구성 부품의 탄



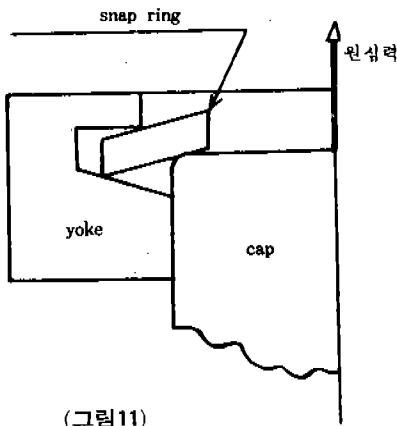
(그림 9)

성변형을 들 수 있다. 특히 snap ring 조립方式의 u/joint는 아무리 心血을 기울여 高精度加工을 하여도 조립후 유격발생 여지가 다분히 많다. 그리고 그림 11과 같이 잔류 unbalance의 원심력으로

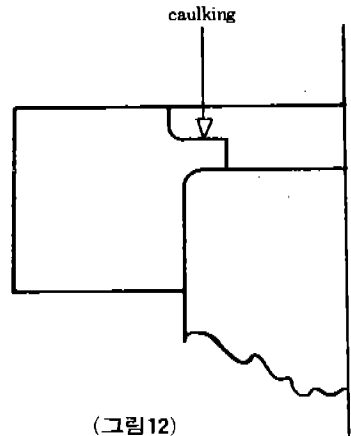
snap ring 자체가 탄성변화를 일으켜 더 큰 잔류 unbalance를 發生시킨다. 그림 12는 이 문제를 해결해 주는 caulking 方式이나 A/S의 어려움이 뒤따른다.



(그림 10)



(그림 11)



(그림 12)

4. 結 言

自動車用 추진축의 위험속도면에서 보면 외경은 갈수록 길이는 짧을 수록 유리하다.

Unbalance를 일으키는 요소에는 yoke류의 형상 불균일과 같이 쉽게 잡을 수 있는 것이 있고 tube의 편심과 같이 쉽게 잡을 수 없는 것이 있다. tube의 편심에 의한 unbalance는 회전속도에 따라

그 크기와 방향이 同時に 변화하므로 balance 맞추는 회전속도 선정시 이를 고려할 필요가 있으며 tube의 편심도 관리는 balancing 작업의 편이 및 良質의 제품생산을 위하여 매우 중요하다.

Balancing을 어렵게 하는 요소에는 이것 외에도 snap ring type u/joint에 있어서의 유격이나 탄성 변형이 있고 적절한 조치로 이러한 문제점을 해결할 수 있을 것이다. <끝>