〈論 文〉

Gamma 分布모델에 의한 河川流量의 Simulation에 關한 研究

Stochastic Simulation of Monthly Streamflow by Gamma Distribution Model

李 曾 錫*
Lee Jung Suk
李 舜 鐸**
Lee Sun Tak

ABSTRACT

The purposes of this study are the theoretical examination of Gamma distribution function and its application to hydraulic engineering, that is, studying the simulation of monthly streamflow by the Gamma distribution function model (Gamma Model) based on Monte Carlo technique.

In the analysis, monthly streamflow data in the Nak Dong River, the Han River, and the Keum River were used and the data were changed to modular coefficient in order to make the analysis convenient.

At first, the fitness of monthly streamflow to 2-Parameter Gamma distribution was tested by Chi-square and Kolmogrov-Smironov test, by which it was found the monthly streamflow were fit well to this Gamma distribution function.

Then, the Gamma Model based on the Gamma distribution and Monte Carlo Method was used in the simulation of monthly streamflow, and simulated data showed that all their stastical characteristics were preserved well in the simulation.

Consequently, it can be concluded that the Gamma Model is suitable for the simulation of monthly streamflow series directly by using the Mote Carlo technique.

要 旨

本 研究는 Gamma分布의 理論的 検討와 이의 水工学에의 適用, 즉 Gamma分布의 適合性 및 Gamma모델에 의한 河川流量의 Simulation에 대한 研究와 検討를 行하는 데 그 目的을 두고 있다. 分析에 있어서 우리나라 主要河川(洛東江, 漢江 및 錦江)의 月流量資料를 사용하였으며 分析을 簡単하게 하기 위하여 資料를 Modular coefficient로 変換시켰다. 먼저 二変数 Gamma分布形에 대한 月流量에의 適合性을 検定하였으며 이로부터 Gamma分布型과 Monto Carlo 技法을 기초로 한 Gamma 모델에 의하여 月流量의 Simulation을 行하였다. 그 결과 記録値와 매우 近接한 Simulation資料를 얻을 수 있었다.

I. 序 論

最近 合理的인 河川計劃을 수립하기 위해서, 예를 들면 治水計劃에 있어서 洪水의 尖頭水位, 尖頭流量, 総流量, 総雨量 혹은 潮位 등 治水機能에 관련된 많은 要因이 同時에 고려되지 않으면 안되기 때문에 多変量 統計論의 重要性이 널리 인식되고 있다.

이중 二変量의 統計論이 그 基礎的 역할을 하고 있으나 從来의 研究에 있어서는 正規分布에 입각한 것이었으며 非對称分布에 對한 研究는 많지 않다. 그러나 실제 水文量의 発生現象은 대개 非對称分布의 特性을

* 正會員・慶北工業專門大学 土木工学科 講師
** 本學會編輯委員 代議員・嶺南大学校 工科大学 教授・工博

갖고 있으며 多變数 問題에 관련되기 때문에 그 適用이 水工技術者들에게 큰 어려움을 주어왔다. 特히 流量이나 降雨量 등의 水文現象이 Gamma 分布에 유사한 경우가 많음이 一般的으로 알려지고 있으나[1] 실제의 適用에 있어서 不完全 Gamma函数(Incomplete Gamma function)表[2]를 使用하는 난점이 있기 때문에 지금까지 널리 使用되지 못하였다.

따라서 Kadoya 및 Nagao氏[3]는 Gamma分布를 二変数指数分布를 適用해서 해결하는 研究를 하여 実用하였으며, 井沢氏[4]는 気象統計의 입장에서 検討한 바 있다. 또한 W.F. Kibble氏[5]는 Gamma形의 二変数分布의 導出을 그 多項式 혹은 Bessel 函数에 依한 表現을 시도하였고, A.R.Krishnamoorthy는 多変量統計의 拡張을 시도한 바 있다. 또한 最近 널리 研究, 利用되고 있는 水文資料의 Simulation 技法의 발달로 이와같은 水文量은 確率分布形, 특히 Gamma 分布의 適用이 크게 중요시되게 되었다.

따라서 本 研究에서는 月流量의 非對称性에 對하여 이 Gamma 分布의 適用性을 不完全 Gamma 函数表를 使用하고 그 理論的 適用性을 밝히며, 이 Gamma 모델에 依한 月流量資料를 Simulation하는 手法을 설정하여 Gamma分布의 水工学에의 適用性을 보이고자 하였다.

Ⅱ. GAMMA 分布 理論

Gamma 分布(γ−分布)란 K.Pearson의 Type−Ⅲ 分布라고도 하는 것으로 그 母数의 선택에 따라 正規分布에 가까운 形으로부터 指数分布등의 非對 分布에 이르는 매우 廣範圍한 型을 이루고 있기 때문에 応用面에 있어서 極히 유효한 分布型이다.

一般的으로 母数 α의 Gamma函数는 다음과 같이 表示된다.

$$\gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \quad \cdots\cdots (1)$$

이 式에서 α가 陽의 整数인 경우 $(\alpha) = p(\alpha-1)!$ 이 되나, 整数가 아닌 경우 級数展開나 数値積分에 依해서 求해야 한다. 따라서 (1)式의 α代身에 $(p+1)$을 代入하여 0에서 $u\sqrt{p+1}$까지 積分하면

$$I(u,p) = \frac{1}{\gamma(p+1)} \int_0^{u\sqrt{p+1}} x^p e^{-x}\, dx \cdots (2)$$

이 된다. 이 式을 不完全 Gamma 函数(Incomplete Gamma function)라 하며 K.Pearson에 依해 소개되었으며[2], 그 性質은 確率分布函数(Probability mass function)이다. K.Pearson은 $I(u,p)$값을 容易하게 찾을 수 있도록 不完全 Gamma 函数表(Tables of Incomplete Gamma function)를 만들었다. 連續変量 x에 對한 Gamma 確率密度函数는

$$f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \quad \cdots\cdots (3)$$

($x \geqq 0$ 에 對하여)

$$f(x) = 0$$

($x < 0$ 에 對하여)

이 式에서 α는 Gamma分布 変数이므로 이 式型을 1変数 Gamma 分布의 確率密度函数라 하고 α의 값에 따른 그 分布型은 Fig 1과 같다.

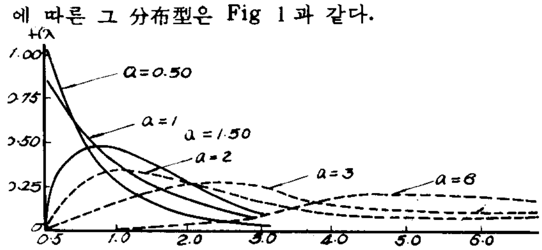


Fig. 1 One-Parameter Gamma Probability Density Curves for six Values of α(0.5, 1, 1.5, 2, 3 and 6).

即 $0 \leqq \alpha \leqq 1$ 間에서는 J−型 分布를 나타내고 $\alpha = 1$인 경우는 単純指数分布 $f(x) = e^{-x}/\gamma(\alpha) = e^{-x}$가 된다.

그리고 $1 < \alpha \leqq 2$인 경우는 $x=0$에서 $f(x)$軸에 接하고 x軸에 漸近하는 Bell 型의 分布를 갖는다.

$\alpha < 2$인 경우는 $x=0$에서 시작하여 x軸에 漸近하는 分布型을 이룬다.

여기서 変数α의 推定은 平均値, 分散 및 尖鋭度로부터 다음과 같이 求한다.

$$EX = \alpha$$
$$VAR = \alpha$$
$$S\cdot C = 2/\sqrt{\alpha} \quad \cdots\cdots (4)$$
$$K = 3 + 6/\alpha$$

EX = 平均値(Mean)

VAR = 分散(Variance)

$S\cdot C$ = 歪度係数(Skewness Coefficient)

K = 尖鋭度(Kurtosis)

위의 Gamma 分布型 가운데 一般的으로 2変数

Gamma 分布가 가장 水文現象에 많이 適用되는것으로 [1,7], 앞으로는 分析에서 이 2 變數 Gamma 分布에 對하여 檢討키로 하였다.

(3) 式에서 x 代身 x/β 를 代入하면

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\gamma(\alpha)}\ x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

와 같이 되며 이 式에서는 變數가 α, β 두개이므로 이것을 2變數 Gamma 分析의 確率密度函數라 하며 α 가 一定하고 β 가 變할때 그 分布型은 Fig. 2 와 같다.

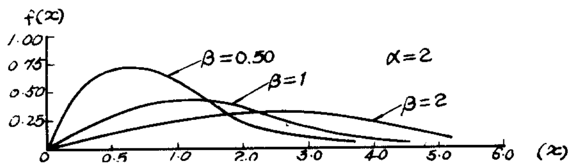


Fig. 2 Two-Parameter Gamma Probability density curves for $\alpha=2$ and three value of β (0.5, 1 and 2).

여기서 變量 x 는 $0 \leq x < \infty$ 이며, $x<0$ 에 對해서 $f(x)=0$ 이다. 變數 α, β 는 EX, VAR, $S{\cdot}C$, K 로부터 다음과 같이 求하며 β 는 Scale parameter 이다.

$$\left.\begin{array}{l} EX=\alpha\beta \\ VAR=\alpha\beta^2 \\ S{\cdot}C \text{ 및 } K\text{는 (4)式과 同一} \end{array}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

(3) 式에서 x 代身 $(x-\gamma)/\beta$ 를 代入하면

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\gamma(\alpha)}(x-\gamma)^{\alpha-1}\ e^{-(x-\gamma)/\beta}\cdots\cdots \quad (7)$$

와 같이되면 이 式에서는 變數가 α, β, γ, 3 개이므로 3變數 Gamma 分布의 確率密度函數라 한다. 이 式에서는 새로운 變數 γ 는 變量 x 의 下限界(lower boundary)를 나타내는 location parameter 이다. 變數 α, β, γ 는 EX, VAR, $S{\cdot}C$ 로 부터 다음과 같이 求한다.

$$\left.\begin{array}{l} EX=\gamma+\alpha\beta \\ VAR,\ S{\cdot}C,\ K\text{는 (5)式과 同一} \end{array}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

3變數 Gamma 分布에서 $\gamma+\beta^{\alpha}(\alpha-1)$ 는 mode 를 나타낸다.

Ⅲ. 月流量 GAMMA 分布型 分析

本 論文에서 使用한 資料는 우리나라 主要河川, 즉 洛東江, 錦江, 漢江에서 比較的長期間의 資料를 얻을 수 있는 8 個地點에서 觀測된 記錄値를 使用하였으므로 30 年以上의 記錄値를 얻을 수 있었다.

各 河川에서 選定된 地點으로서는 可用資料와 廣域的인 分布를 고려하여 漢江流域에서는 人道橋觀測所(1917～1971), 洛東江流域에서는 洛東觀測所(1924～1970), 倭舘觀測所(1925～1973), 玄風觀測所(1924～1968), 의 3 個地點과 錦江流域의 石花觀測所(1919～1967), 公州觀測所(1918～1966), 규암觀測所(1916～1968), 沃川觀測所(1916～1967) 등 4 個地點을 택하였다.

다음 分析을 위하여 原資料를 먼저 modular coefficient로 變換시켜 使用토록 하였으며 그 變換式은 다음과 같다.

$$\text{Modular Coefficient} = \frac{Qi}{QBAR}$$

Qi = 各 月流量 觀測資料

$QBAR$ = 各 月流量 觀測資料 平均

modular 시킨 資料를 級間(Class) 0.5 로 해서 各 級間의 觀測度數(Observed frequency), 相對度數(relative frequency)를 求하고 β 와 $\sqrt{\alpha}$ 를 求한다음 $u(=x/\beta/\sqrt{\alpha})$ 를 算定하여 不完全 Gamma Table에서 $I(u, p)$ 를 찾아서 超過確率(exceedance probability)와 期待度數(expected frequency)를 求했다.

즉 Table 1 과 같이 求하였으며, 觀測度를 histogram으로 하고 여기에 Gamma 分布의 理論的 曲線을 그려서 서로 比較했다. (Fig. 3 참조)

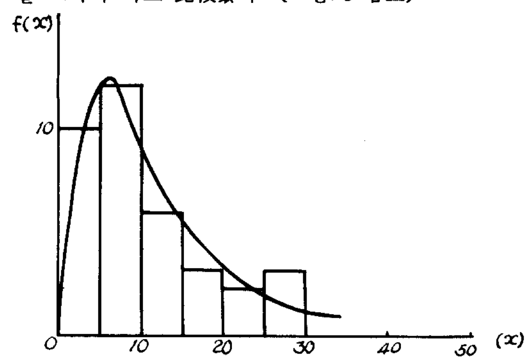


Fig. 3

앞에서 求한 觀測度數와 理論的 分布로부터 求한 期待度數의 適合性을 Fig. 3에 比較하여 본 結果 대체적으로 서로 잘 一致하고 있으나, 다시 그 適合性 檢定을 x^2 - Test 와 Smirnov - Kolmogerov - Test 에 依하여 Table 1 과 같이 행하여 보았다. 이 檢定에 있어서 記錄値의 各 月別의 檢定을 시행하였으며 양 檢定方法에서 대개의 月流量 資料가 Table 2 에서 보는 바와 같이 Gamma 分布에 적합하다는 가설이 有

Table 1. JULY $\alpha\beta = 1.000$ $\alpha\beta^2 = 0.583$ $\alpha = 1.715$ $\beta = 0.583$ $p = 0.715$ $\sqrt{\alpha} = 1.3094$

Class	Obs. Freq	Rel. Freq	Cumul. Rel. Fr	u	I(u,p)	Exc.P.	Exc. Freq.	x^2-Test	S.K-Test
0.0 ~0.5	12	0.333	0.333	0.655	0.293	0.293	10.548	0.200	0.040
0.5 ~ 1.0	9	0.250	0.583	1.310	0.603	0.310	11.160	0.418	0.020
1.0 ~ 1.5	5	0.139	0.722	1.966	0.794	0.191	6.876	0.512	0.072
1.5 ~ 2.0	7	0.194	0.916	2.621	0.897	0.103	3.708	2.923	0.019
2.0 ~ 2.5	1	0.028	0.944	3.276	0.951	0.054	1.944	0.458	0.007
2.5 ~ 3.0	2	0.056	1.000	3.931	0.977	0.026	0.026	1.210	0.023
Σ	36							5.721	
					Critical	Value of	0.05	7.81	0.232
							0.01	11.34	0.288
								ac	ac

GONG JU

OCT. $\alpha\beta = 1.000$ $\alpha\beta^2 = 1.563$ $\alpha^2 = 0.640$ $\beta = 1.563$ $p = -0.36\sqrt{\alpha} = 0.780$

Class	Obs. Freq	Rel. Freq	Cumul. Rel. Fr	u.	I(u,p)	Exc.P.	Exc. Freq.	x^2-Test	S.K-Test
0.0 ~0.5	18	0.500	0.500	0.410	0.415	0.415	14.940	0.627	0.085
0.5 ~ 1.0	6	0.167	0.667	0.820	0.665	0.250	9.000	1.000	0.002
1.0 ~ 1.5	3	0.083	0.750	1.230	0.781	0.116	4.176	0.331	0.031
1.5 ~ 2.0	1	0.028	0.778	1.641	0.583	0.072	2.592	0.978	0.075
2.0 ~ 2.5	2	0.056	0.834	2.051	0.900	0.047	1.692	0.056	0.066
2.5 ~ 3.0	3	0.083	0.917	2.461	0.931	0.031	1.116	3.181	0.014
3.0 ~ 5.0	3	0.083	1.000	4.101	0.984	0.053	1.908	0.625	0.017
Σ	36							6.235	
					Critical	Value of	0.05	9.49	0.232
							0.01	13.28	0.288
								ac	ac

GONG JU

意性 0.05 및 0.01 level 에서 인정되었다.

Ⅳ. Gamma 모델에 依한 Simulation

1. Gamma 모델 및 Simulation

앞에서 検討된 月流量의 2－変数 Gamma 分布에의 適合性으로부터 月流量의 Simulation을 위한 Gamma 모델을 설정코자 한다. 지금까지 Gamma 分布型을 하는 水文量의 Simulation에 對해서는 Markov 모델을 使用하는 Wilson－Hilferty[8] Fiering－Jackson 과 Matalas의 제안이 있으며 또한 Moran[10]의 多変量解析法등이 있으나 실제 技術者에게 사용이 까다롭고 실용하기에 여러 난점이 많기 때문에 여기서는 Gamma 分布의 変量을 직접 Simulation하는 Monte Carlo 技法에 依한 Gamma 모델을 다음과 같이 設定하도록 한다.

즉 앞의 (4)式으로 表示되는 2－変数 Gamma 分布로 부터 직접 積分에 依한 確率分布函数를 求하기가 어려우므로 Gamma 変量을 發生시켜 주는 다른 한 方法, 即 다음과 같은 数學的 모델에 依한 Erlang 変量을 發生시킴으로서 Erlang Gamma 分布의 変量을 Simulation 할 수 있다.[11]

$$X = \sum_{i=1}^{\alpha} X_i = -\beta \sum_{i=1}^{\alpha} \log \gamma_i \qquad (9)$$

FORTRAN PROGRAM으로 使用할 수 있도록 다시 고쳐 쓰면 위의 식은

$$X = -\beta\left(\log \prod_{i=1}^{\alpha} \gamma_i\right) \qquad (10)$$

와 같다.

여기서 X＝Gamma 分布의 変量

$$\frac{1}{\beta} = \frac{EX}{VX}$$

$$\alpha = \frac{(EX)^2}{VX}$$

EX＝期待値(平均値)

VX＝分散(標準偏差의 自乗)

γ_i＝(0,1)의 均等分布의 乱数(random nu－

Table 2. 월별 X^2 - Test 및 S.K. - Test 결과표

지점 / Month	통계치	낙동		왜관		현풍		공주		옥천		규암		석화		인도교	
	Critical Value of	X^2 Test Σ	S.K Test 최대치	X^2 Test Σ	S.K. Test 최대치	X^2 Test Σ	S.K Test 최대치	X^2 Test Σ	S.K. Test 최대치	X^2 Test Σ	S.K Test 최대치	X^2 Test Σ	S.K Test 최대치	X^2 Test Σ	S.K Test 최대치	X^2 Test Σ	S.K Test 최대치
JAN		1.29	0.054	8.14	0.200	6.38	0.052	7.58	0.056	1.13	0.053	18.53	0.195	7.86	0.107	8.42	0.103
	0.05	7.81	0.232	9,949	0.232	7.81	0.236	9.49	0.232	5.99	0.218	5.99	0.218	7.81	0.232	11.07	0.232
	0.01	11.34	0.288	13.28	0.274	11.34	0.288	9.21	13.28	9.21	0.258	9.21	0.258	11.34	0.288	15.09	0.288
FEB		2.54	0.058	12.51	0.107	1.45	0.103	3.63	0.043	9.78	0.129	4.24	0.088	7.37	0.088	6.12	0.048
	0.05	5.99	0.232	18.31	0.232	3.84	0.236	5.99	0.232	5.99	0.218	5.99	0.218	7.81	0.232	11.07	0.232
	0.01	9.21	0.288	21.70	0.274	6.630	0.288	9.21	0.288	9.21	0.258	9.21	0.258	9.21	0.288	15.09	0.288
MAR		2.96	0.090	4.08	0.048	11.25	0.126	4.75	0.037	14.92	0.118	4.67	0.100	4.46	0.048	1.790	0.054
	0.05	9.49	0.232	12.59	0.232	7.81	0.236	5.99	0.232	5.99	0.218	9.49	0.218	11.07	0.232	5.99	0.232
	0.01	13.28	0.288	16.81	0.274	11.34	0.288	9.21	0.288	9.21	0.258	13.28	0.258	15.09	0.288	9.21	0.288
APR		2.60	0.031	1.86	0.036	7.14	0.122	5.18	0.019	4.15	0.094	3.82	0.082	6.71	0.091	1.323	0.059
	0.05	5.99	0.232	11.07	0.232	11.07	0.236	9.49	0.332	5.99	0.218	3.84	0.218	9.49	0.232	7.81	0.232
	0.01	9.21	0.288	15.09	0.274	15.09	0.274	13.09	0.288	9.21	0.258	6.63	0.258	13.28	0.288	11.34	0.288
MAY		6.91	0.057	2.20	0.033	6.33	0.083	3.70	0.058	4.52	0.098	0.805	0.047	2.02	0.050	4.06	0.051
	0.05	11.07	0.232	9.49	0.232	5.99	0.236	9.49	0.232	7.81	0.218	9.49	0.218	7.81	0.234	5.99	0.232
	0.01	15.09	0.288	13.280	0.274	9.21	0.288	13.28	0.288	11.34	0.258	13.28	0.258	11.34	0.288	9.21	0.288
JUNE		1.18	0.034	2.61	0.083	6.71	0.092	0.56	0.032	5.56	0.047	1.189	0.075	11.89	0.113	10.27	0.075
	0.05	9.49	0.232	9.49	0.232	3.84	0.236	9.49	0.232	7.81	0.218	5.99	0.218	5.99	0.232	3.94	0.232
	0.01	13.28	0.288	13.28	0.274	6.63	0.288	13.28	0.288	11.34	0.258	9.21	0.258	9.21	0.288	6.63	0.288
JULY		5.69	0.043	4.74	0.088	6.92	0.069	5.72	0.072	2.02	0.021	1.64	0.042	4.04	0.048	1.54	0.023
	0.05	7.81	0.232	7.81	0.232	7.81	0.236	7.81	0.232	9.49	0.218	7.81	0.218	9.49	0.232	11.07	0.232
	0.01	11.34	0.288	11.34	0.274	11.34	0.288	11.34	0.288	13.28	0.258	1.34	0.258	11.34	0.288	15.09	0.288
AUG		5.78	0.062	3.039	0.052	3.90	0.069	4.42	0.064	11.188	0.107	8.48	0.117	1.68	0.058	1.91	0.061
	0.05	7.81	0.232	7.81	0.232	11.07	0.236	9.49	0.232	9.49	0.218	5.99	0.218	11.07	0.232	9.49	0.232
	0.01	11.34	0.288	11.34	0.274	15.09	0.288	13.3	0.288	13.28	0.258	9.21	0.258	15.09	0.288	13.28	0.288
SEP.		4.88	0.069	3.903	0.051	1.35	0.048	0.140	0.022	4.203	0.071	7.56	0.097	15.06	0.028	12.35	0.071
	0.05	9.49	0.232	7.81	0.232	7.81	0.236	5.99	0.232	9.49	0.218	9.47	0.218	7.81	0.232	7.81	0.232
	0.01	13.28	0.288	11.34	0.274	11.34	0.288	9.21	0.288	13.28	0.258	13.28	0.258	11.34	0.288	11.34	0.288
OCT.		2.80	0.044	4.30	0.085	3.84	0.074	6.24	0.085	9.80	0.152	8.54	0.142	4.43	0.070	1.33	0.071
	0.05	11.07	0.232	9.49	0.232	9.49	0.236	9.49	0.232	7.91	0.218	5.99	0.218	11.07	0.232	5.99	0.232
	0.01	15.09	0.288	13.28	0.274	13.28	0.288	13.28	0.288	11.34	0.258	9.21	0.258	15.09	0.288	9.21	0.288
NOV		7.34	0.083	5.01	0.082	12.81	0.137	2.32	0.057	19.85	0.198	6.07	0.109	7.69	0.095	7.05	0.046
	0.05	11.07	0.232	7.81	0.232	3.84	0.236	3.84	0.232	5.99	0.218	7.81	0.218	7.81	0.232	9.49	0.232
	0.01	15.09	0.288	11.34	0.274	6.63	0.288	6.63	0.288	9.21	0.258	11.34	0.258	11.34	0.288	13.28	0.288
DEC.		1.98	0.080	26.98	0.245	20.22	0.122	18.05	0.143	7.667	0.103	6.09	0.121	3.32	0.064	2.640	0.043
	0.05	11.07	0.232	5.99	0.232	9.49	0.236	11.07	0.232	3.84	0.218	5.99	0.218	5.99	0.232	5.99	0.232
	0.01	15.09	0.288	9.21	0.274	13.28	0.288	15.09	0.288	6.63	0.258	9.21	0.288	9.21	0.288	9.21	0.288
X^2 Test	Accepted Month	1,2,3,4,5 6,7,8,9,10,11,12		1,2,3,4,5 6,7,8,9,10,11,12		1,2,4,7,8, 9, 10		1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10,11,		1,4,5,6, 7,9		2,3,4,5, 6,7,9,11,		2,3,4,5, 7,8,10,11,12		1,2,3,4,5, 7,8,10,11, 12	
	Impossible Month					3,5				8,10		8,10,12		1			
	Rejected Month			12		6,11,12		12		2,3,11,12		1,9		6,9		6,9	
S.K Test	Accepted Month	1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10 11,12		1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10 11,12		1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10 11,12		1,2,3,4,5 6,7,8,9,10, 11,12		1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10, 11,12		1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10, 11,12		1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10, 11,12		1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10, 11,12	
	Impossible Month			12													
	Rejected Month																

mber)

(10)式을 使用하여 Gamma 變量을 Simulation 하는 순서는 Fig 4의 Flow chart에 表示된 바와 같다. 여기서 $A=1/\beta$, $K=\alpha$, R=random number 를 表示하며 K는 $K\geq 1$인 整數이다.

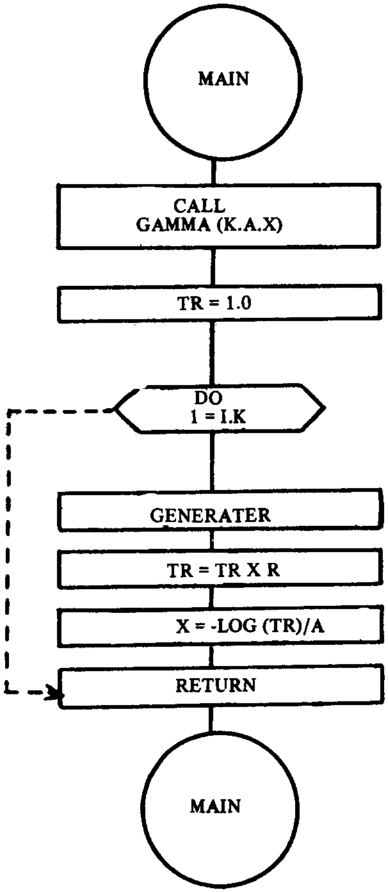


Fig. 4. Generation of Gamma Variates Flow Chart.

2. 結果의 檢討

앞의 (10)式과 Fig. 4의 순서에 의한 Gamma 모델을 使用하여 Gamma變量을 Simulation시킴으로써 Gamma分布의 特性을 갖는 月流量을 Simulation 하였으며 이때 Table 3에서 表示된 變量值 A 및 R을 을 使用하였다.

이 Simulation된 資料와 記錄值와의 適合性을 檢討하기 위하여 다음과 같이 몇가지의 特性을 比較 檢討하였다. 즉 Table 3에서와 같이 記錄值 및 Simulation資料의 基本統計值를 求하여 比較하여 본 結果 거의 一致한다고 볼 수 있으나 그 適合性의 精度는 크게 높다고 할 수 없다.

이것은 變數K가 1보다 큰 整數이어야 한다는 콤퓨터 프로그램상의 제약 때문에 K값을 가장 가까운 整數R로 變換시켜 Simulation 資料를 電算한 때문으로 생각되며, 이 값에 다시 K/R을 곱해 주어 값을 계산한 것이 Table 4에서 보는 바와 같이 精度가 훨씬 높았다.

다음 이들 統計值를 常流川에 對하여 이미 硏究된[12),13)] 모델-A, B및 C의 結果와 比較하여 본 結果, Table 4및 Fig. 5와 같으며 모델C의 結果와 記錄值의 값에 매우 가까운 값을 보여 주고 있음을 알 수 있다.

Table 3.(a) NAK DONG

Month	Mean		Stdev.		CsKw		Parameter		
	Historical Data	Gamma Data	Historical Data	Gamma Data	Historical Data	Gamma Data	A	K	R
Jan.	1095.2	1924.4	1462.7	1726.6	2.202	1.1264	0.000510	0.561	1
Feb.	1125.8	1487.7	1214.2	1509.9	1.847	2.0149	0.000760	0.859	1
Mar.	2634.9	3705.2	3068.8	3619.8	1.989	1.9139	0.000280	0.737	1
apr.	4967.2	5292.9	5469.2	5361.3	1.553	1.9867	0.000170	0.824	1
May	3938.5	4824.9	4009.9	4744.8	1.245	1.4432	0.000240	0.964	1
June.	3470.0	5060.1	4307.4	4915.7	1.827	1.5075	0.000190	0.648	1
July.	20810.0	19992.0	15336.0	11516.0	0.756	0.9144	0.000090	1.841	2
Aug.	15392.0	21454.0	17696.0	23060.0	2.163	1.7508	0.000050	0.756	1
Sep.	11843.0	12839.0	9481.9	9303.5	0.842	0.9366	0.000130	1.560	2
Oct	4024.0	4272.6	4281.9	4755.9	1.170	1.4560	0.000220	0.883	1
Nov.	1735.9	1381.3	1664.2	1356.2	1.130	1.1944	0.000670	1.088	1
Dec.	1554.6	1518.5	1562.6	1303.0	0.704	1.1505	0.000640	0.989	

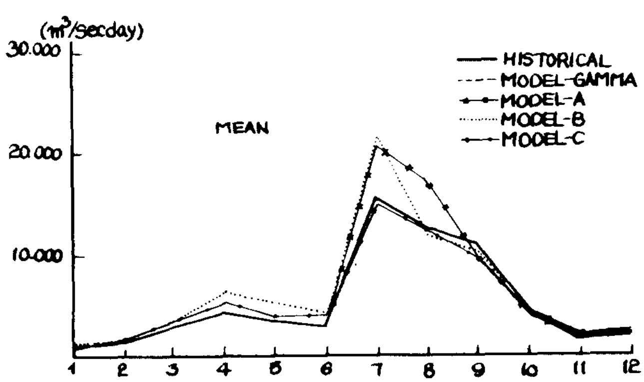
Table 3. (b) WAE GWAN

Month	Mean		Stdev.		CsKw		Parameter		
	Historical Data	Gamma Data	Historical Data	Gamma Data	Historical Data	Gamma Data	A	K	R
Jan.	996.61	1206.1	1088.5	1103.0	2.503	1.3060	0.000841	0.838	1
Feb.	1114.6	1405.0	1285.5	1431.0	2.027	1.6439	0.000703	0.784	1
Mar.	2688.8	3267.8	3236.5	3067.7	1.663	1.5474	0.000256	0.690	1
Apr.	4505.4	4073.8	4707.1	3680.3	1.557	1.1184	0.000203	0.916	1
May.	3389.7	4218.4	2611.1	3276.3	0.765	1.1580	0.000497	1.685	2
June.	3205.1	6280.5	4612.7	5760.9	2.215	1.1318	0.000150	0.482	1
July.	16186.0	17307.0	11952.0	11739.0	0.450	1.0434	0.000113	1.833	2
Aug.	12889.0	12641.0	12324.0	12804.0	1.830	2.1886	0.000084	1.093	1
Sep.	10898.0	10841.0	10782.0	10553.0	2.198	1.4832	0.000093	1.021	1
Oct.	2845.9	3069.9	2159.5	2057.8	1.364	1.0093	0.000610	1.736	2
Nov.	1480.8	1781.8	1149.8	1438.7	1.820	1.8061	0.001119	1.657	2
Dec.	1490.2	3189.7	2161.7	3600.3	4.381	1.8262	0.000319	0.475	1

Table 4. Statistics of Historical and Synthetic Streamflow at WAEGWAN G.S. in the NAKDONG River.

Month	Statistics / Models	Mean		Standard Deviation		Sekewness	
Jan.	Historical	996.61	%	1,088.50	%	2.5028	%
	Model-Gamma	1,010.70	1.41	924.33	15.08	1.3060	47.82
	Model-A	962.29	3.44	1,228.60	12.87	5.5048	101.97
	Model-B	944.56	5.22	1,052.50	3.31	2.8328	13.19
	Model-C	751.65	24.57	1,006.70	7.51	4.5964	83.65
Feb.	Historical	1,114.60	%	1,258.50	%	2.0269	%
	Model-Gamma	1,102.40	1.09	1,121.90	10.85	1.6439	18.90
	Model-A	1,096.80	1.60	1,563.60	24.24	4.3821	116.20
	Model-B	1,148.60	3.05	1,426.50	13.35	3.4939	72.38
	Model-C	1,194.80	7.20	1,193.30	5.02	1.4548	28.22
Mar.	Historical	2,688.80	%	3,236.80	%	1.6634	%
	Model-Gamma	2,254.80	16.14	2,116.70	34.60	1.5474	6.97
	Model-A	3,111.00	15.70	5,015.00	54.95	5.2134	213.42
	Model-B	3,087.90	14.84	4,247.70	31.24	2.5428	52.87
	Model-C	3,020.60	12.34	3,759.60	16.16	2.4997	50.28
Apr.	Historical	4,505.40	%	4,707.10	%	1.5570	%
	Model-Gamma	3,731.60	17.17	3,371.10	28.38	1.1184	28.17
	Model-A	4,256.00	5.54	4,606.40	2.14	2,1312	36.94
	Model-B	6,032.90	33.90	12,916.00	174.39	7,0252	351.20
	Model-C	5,161.20	12.71	4,954.90	5.26	1.8693	20.03
May	Historical	3,380.70	%	2,661.10	%	0.7655	%
	Model-Gamma	3,554.00	4.85	2,760.30	5.71	1.1580	51.27
	Model-A	4,437.60	30.91	5,699.50	118.28	3.4363	348.91
	Model-B	4,987.90	47.15	6,412.50	145.59	2.3431	260.10
	Model-C	3,783.40	11.61	2,834.70	8.50	1.1176	46.10

June	Historical	3,205.10	%	4,612.70	%	2.1520	%
	Model-Gamma	3,027.20	5.55	2,776.80	39.38	1.1318	47.41
	Model-A	3,777.50	17.86	11,628.00	152.11	7.9410	258.51
	Model-B	4,473,90	39.59	9,612.60	108.39	5.0372	127.41
	Model-C	3,650.40	13.89	4,309.40	6.58	1.7160	22.53
July	Historical	16,186.00	%	11,952.00	%	0.4505	%
	Model-Gamma	15,862.00	2.00	10,759.00	9.98	1.0434	131.61
	Model-A	20,754.00	28.22	36,099.00	202.03	5.2223	1059.30
	Model-B	22,027.00	36.09	45,504.00	280.72	5.7508	1176.62
	Model-C	16,033.00	0.95	1,310.70	89.03	2.3964	411.98
Aug.	Historical	12,889.00	%	12,3243.00	%	1.8295	%
	Model-Gamma	13,817.00	7.20	13,995.00	13.56	2.1886	19.63
	Model-A	16,942.00	31.45	26,190.00	112.51	5.3620	193.09
	Model-B	11,440.29	11.24	13,886.00	12.67	3.0174	64.93
	Model-C	11,905.00	7.63	9,541.60	22.58	0.7431	59.38
Sep.	Historical	10,898.00	%	10,782.00	%	2.9183	%
	Model-Gamma	11,069.00	1.57	10,775.00	0.00	1.4832	35.23
	Model-A	9,753.90	10.50	9,243.30	14.27	1.9823	9.83
	Model-B	9,873.70	9.40	8,570.90	20.51	1.5018	31.68
	Model-C	10,324.00	5.27	9,541.00	11.51	1.1645	47.03
Oct.	Historical	2,845.90	%	2,159.50	%	1.3639	%
	Model-Gamma	2,664.70	6.37	1,786.20	17.29	1.0093	26.00
	Model-A	3,134.00	10.12	2,384.30	10.41	2.2172	62.59
	Model-B	2,785.80	3.06	2,125.50	1.55	1.7923	31.43
	Model-C	2,777.80	2.39	1,925.10	10.85	1.4693	7.74
Nov.	Historical	1,480.30	%	1,149.80	%	1.8201	%
	Model-Gamma	1,476.30	0.27	1,192.20	3.67	1.8062	0.77
	Model-A	1,426.20	3.65	1,316.50	14.50	3.6917	102.83
	Model-B	1,390.30	6.08	901,25	21.62	1.7157	5.74
	Model-C	1,440.00	2.66	1,009.25	12.20	1.3290	26.98
Dec.	Historical	1,490.20	%	2,160.75	%	4,3814	%
	Model-Gamma	1,515.10	1.67	1,710.10	20.85	1.8262	58.32
	Model-A	1,468.50	1.46	1,385.50	35.88	3.1479	28.15
	Model-B	1,365.00	8.40	980.29	54.63	1.1313	76.18
	Model-C	1,589.10	6.60	2,012.10	6.88	2.0724	52.70



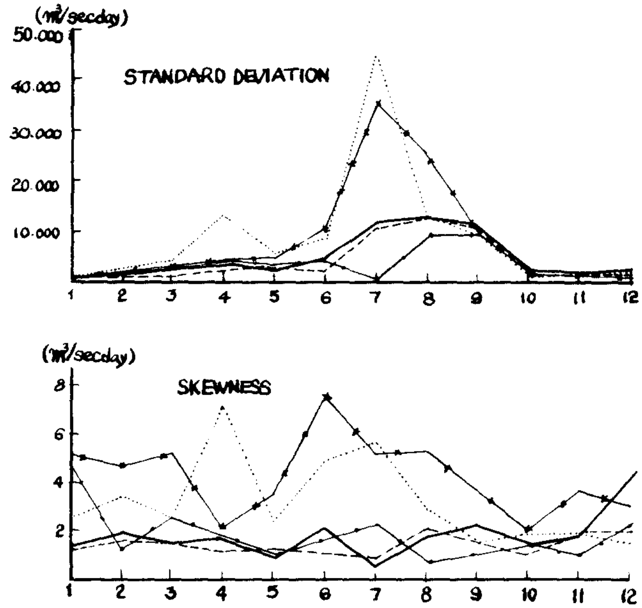


Fig. 5. Comparison of Basic Statistics of Each Model.

Ⅴ. 結 論

지금까지 Gamma分布의 理論的 檢討와 이의 月流量에의 適合性分析 및 Gamma 모델에 의한 Simulation에 對해서 檢討하였다. 그 結果를 보면 다음과 같다.

(1) 不完全 Gamma函數表를 使用하므로서 Gamma函數를 직접 積分하거나 他의 分布型으로 變形치 않고 직접 水文量의 發生確率이나 頻度의 결정에 適用할 수 있음을 발견하였다.

(2) 2-變數 Gamma分布가 月流量의 確率分布型으로 適合함이 檢定한 結果 判明되었다.

(3) Gamma分布型과 Monte Carlo 技法에 基礎를 둔 Gamma모델이 月流量의 Simulation 모델로 適合함이 結果値 比較로 밝혀졌으며, 모델의 단순성과 콤퓨터 소요시간의 절약으로 쉽게 실용될 수 있는 모델이다.

參 考 文 獻

1. Chow, V.T.; *"Statistical and Probability Analysis of Hydrologic Data"*, Handbook of Applied Hydrology, 1968.
2. Pearson K.: Table of the Incomplete r-Function Computed by the State of the Department of Applied Stastics, University of London, University College, 1965.
3. Kadoya and Nagao; 二変数 Gamma 分布및 이의 適用에 関한 研究 ①②③④⑤, 京都大学 防災研究所 年報, 第 13 号, 1970.
4. 井沢龍夫；二変数 Gamma 分布에 대해 (降水量의 分布 第2報) 気象과 統計, 第4巻, 第1号, 第2号
5. Kibble, W.F.; A Two-Variate Gamma Type Distribution, SANKHYA (The Indian Journal of Statistics), Vol. 5, 1941.
6. Krishnamoorthy A.S. and M. Parthasathy; A Multivariate Gamma Type Distribution, Annal of Mathematical Statistics, Vol. 22, 1951.
7. Yevjevich, V.; Stochastic Process in Hydrology, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 1972.
8. Fiering, M.B. and B.B. Jackson; Synthetic Streamflows, American Geophysical Union, Washington, D.C., 1971.
9. Matalas, N.C.; Mathematical Assesment of Synthetic Hydrology, Water Resources Research, Vol. 3, No. 9, 1967.
10. Moran, P.A.P.; Simulation and Evaluation of Complex Water Systems Operations Water Resources Research, Vol. 6, No. 6, 1970.
11. Naylor, T.H. et alii; Computer Simulation Techniques, pp. 43-122, John Wiley and Sons, Inc., N.Y, 1966.

12. Lee, Soon tak; A Stochastic Model to Simulate Monthly Rainfall and Streamflow Sequences, Proceeding, UNESCO International Symposium on Specific Aspects of Hydrological Computations for Water Projects, Leningrad, U.S.S.R. September, 1979.

11. 李舜鐸; 常流川 月流量의 推計学的 模擬発生모델 大韓土木学會誌, 第 23 卷, 第 4 号, 1975.