<講 座>

스펙트럼解析

金 治 弘*

6. 定常性 엘코드性

지금까지 記述해 온 random 데이타 統計処理에 있어서는 random変動에 어떤 種類의 統計的性質을 暗々裡에 仮定해 왔다 그것은 "定常性"과 'ergodic'性인 것이다.

普通 우리들이 取扱하는 것이 大部分의 random変動은 이와같은 性質을 具備하고 있다. 그러나 이와같은 性質은 random変動으로서는 限定되어있다고 라고 말할 수 있을 것이다. 本章에서는 이點에 对하여 若干 詳細한것을 究明하여 確率過程論의 基礎를 明確히 하자.

6. 1. 엔센블平均 (ensemble meanl)

어떤 不規則変動 $f(t)$를 생각한다. t는 時間 또는 距離이다. 어떤 現象이 確率的이라는 것은 그 現象은 일어날때 마다 서로 相違하고 있다는 것이다. $f(t)$는 例를 들어 흐름의 変動과 같이 t의 모든 값에 恒常 0이라고는 할 수 없는 값을 갖는 連続的인 凾数인 경우도 있고 또 例를 들어 地震動과 같이 어떤 時刻에 始作하여 有限時内에 끝나는 것이다.

이와 같은 不規則変動을 観測順마다 番号k를 붙여 $f_k(t)$로 表示한다. (図 6. 1) 万若에 任意의 2個의 標本이 恒常 完全 一致한다면 $f_j(t) \equiv fk(t)$, 이現象은 決定論的이다.

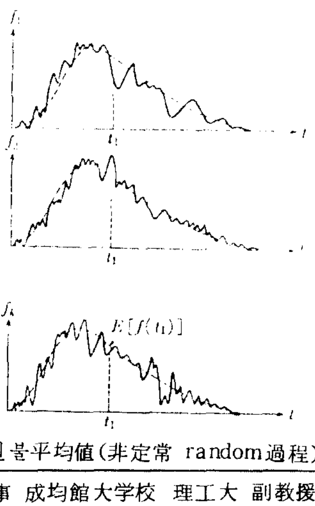


圖 6.1 엔센블平均値(非定常 random過程)인 경우

* 本学会 理事 成均館大学校 理工大 副教援 技術士

標本마다 現象이 相異한것만 가지고는 漠然해서 理論을 세울 수 없기 때문에 어느 程度의 性質을 仮定하고 或은 制約을 놓고 그 範囲에서 現象의 特性을 論할 必要가 있다. 그러나 그 制約이 厳格하고 特殊해서 그것을 満足하는 것이 例外的이면 안만 厳密한 理論을 展開해도 意味는 없다. 오히려 우리들이 가끔 取扱하는 不規則現象에 共通한 一般的인 性質을 抽出하고 그 範囲内에서 議論을 展開하여야 할 것이다. 多幸히 가장 자주 나타나는 radom変動으로부터 2個의 一般性質一定常性과 엘고드性一을 抽出할 수 있고 이것을 仮定할 때 統計的理論의 展開가 相当히 単純化된다.

観測例든가 샘플(sample)의 集合을 엔센불(ensemble)이라고 불리우고 이때 어떤 瞬間 $t=t_1$에서의 平均値$\mu(t_1)$을 各観測値의 平均으로서 定意할 수 있다.

$$E\{f(t)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k(t) \qquad (6.1\ a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, p(f)\, df \qquad (6.1\ b)$$

$$= \mu(t)$$

여기서 $p(t)$는 f의 確率分布密度函数이다. 이와같은 平均을 엔센블平均(ensemble mean)이라고 불리운다.

또 自己相関函数는 다음과 같이 定義된다.

$$C(t_1, \tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_k(t_1)\, f_k(t_1+\tau) \qquad (6.2)$$

或은 同時確率分布密度函数 $p(x, y)$에 依해

$$C(t_1, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p(x, y)\, dx\, dy \qquad (6.3)$$

여기서 $x=f(t_1)$, $y=f(t_1+\tau)$

一般으로 $\mu(t_1)$든가 $C(t_1, \tau)$는 t_1에 따라 相異하다(図. 6. 1)

6. 2. 定常性

万若에 이들이 時刻 t_1에 無関係로 μ는 一定, C는 τ만의 函数일 때 random変動은 弱한 定常性(weakly stationary)을 갖는다. 或은 넓은 意味에서 '定常이다(stationary in the wide sense)라고 불리운다.

$$\left.\begin{aligned} \mu(t_1) &= \mu(\text{一定}) \\ C(t_1,\tau) &= C(\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

$f(t)$가 모든 高次모멘트에 対하여 時刻 t_1에 無関係일 때 random変動은 強定常 或은 厳密히 定常이다(strongly stationary 或은 stationary in the statrict sense)라고 불리운다.

이와같은 性質을 안갖는 random変動을 非定常이라고 말한다. 非定常random変動의 알기쉬운 例는 地震動이다.

6. 3. 엘고드 性

不規則変動의 어떤 時刻에서의 平均値 및 모멘트(相関)는 上述한것처럼 엔센불平均로서 定義된다. 그러나 不規則変動이 定常確率過程에 属하고 어떤 샘플에 対해서의 時間平均値 $\mu(k)$, $C(\tau,k)$

$$\mu(k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_k(t)\,dt \qquad (6.5)$$

$$C(\tau,k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_k(t)\,f_k(t+\tau)\,dt \qquad (6.6)$$

이 샘플 k에 依하지 않고 엔센불平均 μ 및 $C(t)$와 一致할 때

即 $\mu(k) = \mu \qquad (6.7)$

$C(\tau,k) = C(\tau) \qquad (6.8)$

이 不規則変動은 엘고드性을 갖는다(ergodic)라고 불리운다. 많은 實際의 物理現象은 그것이 定常過程에 属할 때 엘고드性을 갖고 現象의 統計的特性은 任意의 観測例의 時間的平均에 依해 推定할 수 있다. 그리고 定常random変動만이 엘고드性을 가질수 있다는것에 注意하지 않으면 않된다.

非엘고드的인 定常確率過程이지만 엘고드性을 갖지 않는 例를 알아보자. $X(k)$및 $\phi(k)$를 k에 関한 不規則変動量으로 한다. 지금 이것들을 써서 正弦波 $fk(t)$

$$f_k(t) = X(k)\sin\left[\,2\pi f t + \phi(k)\,\right] + n_k(t) \qquad (6.9)$$

를 만든다. 여기서 $n_k(t)$는 自色雑音이다. $\phi(k)$가 同一分布라고 할 때 任意時刻에 있어 f_k의 統計量의 엔센불平均은 그 時刻의 無関係이다. 따라서 $f_k(t)$는 定常이다. 그러나 例를 들어 各 샘플 f_k에 対한 時間平均으로서의 自己相関函数는

$$C(\tau,k) = \frac{X^2(k)}{2}\sin 2\pi f\tau \qquad (6.10)$$

이고 샘플마다 다르므로 이 不規則変動은 엘고드性을 갖고 있지 않다. 信号 $f_k(t)$는 非엘고드的인 定常確率過程의 例이다(図. 6.3)

表 6.1 random変動의 分類

$$\text{random変動}\begin{cases}\text{定 常}\begin{cases}\text{엘고드的}\\ \text{非엘고드的}\end{cases}\\ \text{非定常}\end{cases}$$

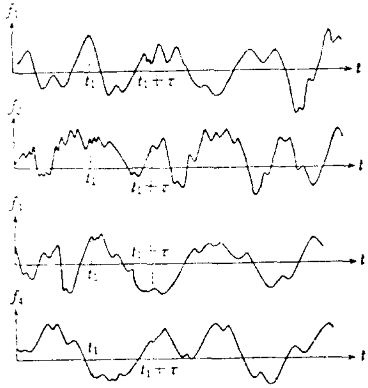


圖 6.2 定常이고 엘고드的인 random過程

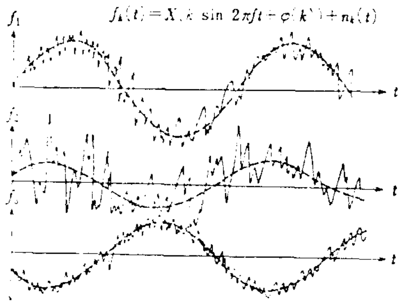


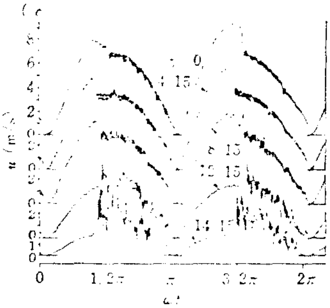
圖 6.3 非엘고드的인 定常確率過程

例 1. 振動乱流의 流速分布

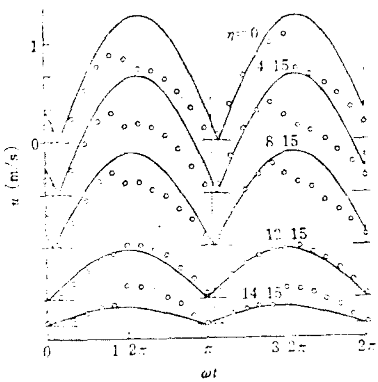
파이프의 一端을 開放하고 他端에는 피스톤을 往復시키면 파이프内에 振動流가 発生한다. 流速이 늦인(正確히는 레이놀즈数가 적다)경우의 흐름은 層流이고, 그 流速分布는 Navier-Stohes의 方程式과 連続의 方程式으로부터 理論的으로 求해지고 実験과의 一致도 認定되고 있다.

流速이 어떤 限界를 넘으면 一方向흐름의 경우와 마찬 가지로 流體粒子가 몹씨 不規則으로 撹乱하는 乱流状態가 된다. 그러나 一方向흐름인 경우와도 몹씨 相異해서 레이놀즈数가 相当이 크게되어도 全사이클에 걸쳐 乱流가 되는것이 아니고 流速의 絶対値가 最大値에 達한 後에 減速域에서 突然乱流가 되고 流速이 零부터 増加하는 加速域에서는 또다시 層流状態가 된다(図.6 4)(a)는 実験結果의 一例이다. 이와같은 흐름(conditional turbulence)에서도 流速分布도 엔센불平

均으로서 定義할 必要가 있다. 図 6.4(*b*)에 依하면 이와같이 해서 求해진 乱流域에서의 流速은 層流인 경우에 比하여 파이프의 中心部($\eta\approx0$)에서 보다 적고 壁面近方에서는 逆으로 層流時보다도 增加하고 있음을 안다. 이것은 흐터짐에 依한 混合作用때문에 파이프 断面 全體에 걸쳐 흐름이 平均化되기 때문이다.



(a) 振動流(円管)의 流連変化



(b) 엔센블平均한 流連分布(0)과 層流 理論解(実験)과의 比較

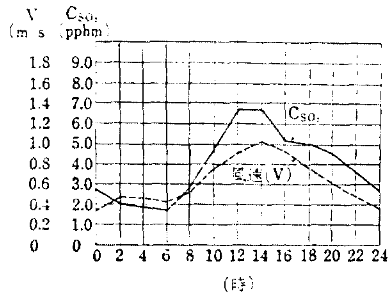
圖6.4 (Hino, Sawamoto, Takasu : J. Fluid Mech. 1976)

그리고 非定常흐름이 乱流가 되기 어려운 것은 脈動流인 血管流가 抵抗이 적은 層流状態에 있고(적어도完全한 乱流가 아님) 心臓에 걸리는 負担(血圧)이 同一한 흐름을 血管에 보내는 것보다도 적게되어 있는데도 関聯한다.

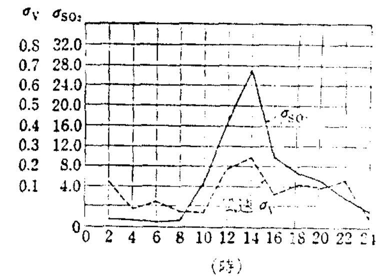
例2 大気汚染의 日変化

気象 및 人間의 社会活動(工場의 稼動, 交通등) 이 24時間을 単位로서 変動하기 때문에 이들의 相互作用의 結果인 大気汚染状況도 日変化를 한다.

図 6.5(*a*)(*b*)는 어떤 工業地帯의 亜硫酸가스 濃度와



(a) 凡速 및 SO_2 濃度의 日変化



(b) 凡速 및 SO_2 濃度変化의 r.m.s의 日変化

圖 6.5

風速의 各 時刻의 平均値 및 標準編差曲線이다. 一日分의 連続記録을 各各 하나의 標本이라고 看做하면 이것은 엔센블平均이다. 単純히 생각하면 汚染濃度는 風速에 逆比例하므로 風速이 큰 낮에 濃度가 低下할 것인데 이 例에서는 風速이 強할때에 濃度가 높아지고있다. 그 理由로서는

(i) 風速이 커지면 연기의 浮力에 依한 上昇高가 줄어 굴뚝의 有効高가 減少하고 따라서 연기의 地上濃度가 增加한다.

(ii) 이 工業地帯에서는 海陸風이 잘 発達한다. 日中은 海風이 発生하고 臨海工業地帯의 연기는 観測點이 있는 内陸으로 흘러들어가 그 影響을 받고 저녁부터 夜間은 逆으로 陸風으로 연기는 海側으로 흐르기 때문에 濃度는 低下한다.

(iii) 日中의 연기排出量이 크고, 風速增加의 影響을 妨害하고 있다. 등등이 생각된다. 形式的인 統計処理의 結果를 무턱대고 首肯하지 말고 잘 생각하여야 하는 例로서 図 6.5를 들었다.