

활주형 고속정의 횡파중에서의 순항시의 운동성능 계산 프로그램의 개발

황 중 흘* · 이 기 표*

On a Computer Program to Calculate the Responses of a Ship in Lateral Regular Waves.

by

J.H. Hwang* · K.P. Rhee*

요 약

내항성이 우수한 선형을 개발하기 위해서는 초기설계단계에서 이미 그 배의 해상에서의 거동을 예측할 수 있어야만 한다. 이 보고서에서는 임의의 입사각을 갖는 횡파중을 항주하는 선박이 겪게 되는 동요중에서 횡동요, 수평동요 그리고 선수동요의 연성운동방정식의 해를 Tasai-Takaki가 수정한 스트림이론을 적용하여 해석하였다.

제15차 ITTC의 내항성 위원회의 보고서에 발표된 컨테이너선형에 대한 결과와 똑같은 선형에 대해 본프로그램을 사용하여 계산한 수평동요, 횡동요 그리고 선수동요의 운동응답을 비교하여 보았으며, 상당히 만족스러운 결과를 얻었다.

1. 서 론

어뢰정, 유도탄 경비정을 비롯한 각종 소형 고속함정들은 그 속도뿐 아니라 해상에서의 내항성능도 이들 함정의 우열을 판가름하는 중요한 인자로 되어 있다. 따라서 작곡에서는 소형 고속함정의 초기설계시에 고속에인수조에서 모형선 실험결과에 의거한 내항성능이 우수한 선형을 개발하고 있으며, 또한 모형선 실험보다 경제적이고 짧은 시간내에 내항성을 판가름할 수 있는 프로그램의 개발에 박차를 가하고 있는 실정이다. 일본의 경우에는 방위대학교와 방위성이 공동으로 고속정연구위원회를 조직하여 1970년경부터 활주형 고속정의 종규칙파중에서의 운동성능을 해석하기 위한 연구를 하고 있으며 미국의 경우에는 1968년경부터 스티븐스공과대학과 미국 해군함정연구 및 개발센터(DTNSRDC)에서 고속정의 파랑중에서의 내항성에 관한 연구를 하고 있으나 아직 완전한 해결을 보지 못하고 있다.

국내에 있어서는 1977년도 한국과학재단의 사업으로

서울대학교와 코티아타코마조선주식회사의 공동연구로써 활주형 고속정의 종규칙파중에서의 운동성능계산프로그램을 개발한 바 있다.

횡규칙파중에서의 선체의 내항성능에 관해서는 횡동요때의 유체의 점성저항으로 인한 비선형항이 상당한 영향을 주고 있으며, 따라서 이 비선형항에 관한 연구가 각 나라에서 진행중이다.

본 연구에서는 임의의 각을 갖고 입사하는 종규칙파중에서의 선체운동응답을 계산할 수 있게끔, 먼저 임의의 2차원 단면이 좌우동요할 때의 부가질량과 감쇠력을, 횡동요할 때의 부가관성모우먼트와 감쇠모우먼트를 구하는 프로그램과 또 이 2차원 유체력을 스트림이론에 의해서 고속정의 순항시의 좌우동요, 횡동요 및 선수동요의 진폭과 위상차를 계산할 수 있는 프로그램을 개발하였다.

2. 선체 운동 방정식

횡규칙파중을 항해하는 선박은 좌우동요, 횡동요 및 선수동요의 3가지 동요의 연성운동을 하게되며, 이론적으로 이러한 운동의 응답을 구하기 위해서는 스트림

* 接受日字 : 1980年 11月 14日

* 정회원, 서울대학교 공과대학 조선공학과

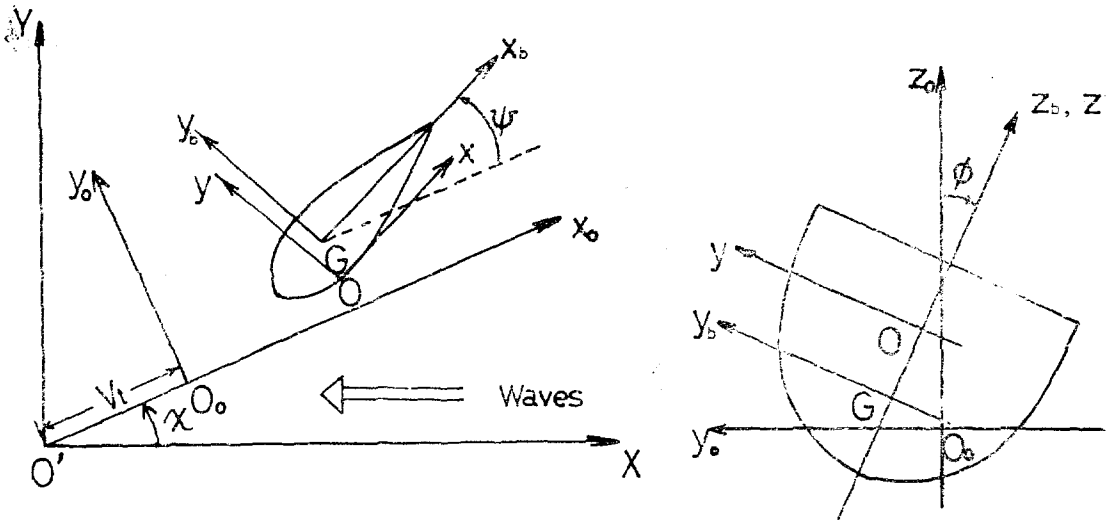


Fig. 1. Coordinate systems

이론이 사용되고 있으며, 스트립이론은 Korvin-Kroukovsky와 Jacob[1]의 original linear strip method, Watanabe[2]의 modified strip method(뒤에 ordinary strip method라 부르고 있음), Tasai-Takaki[3]의 new strip method 그리고 Salvesen, Tuck과 Faltinsen[4]의 rational strip method 등으로 대별할 수 있다. 본 연구에서는 Tasai-Takaki의 new strip method를 사용하였다.

좌표계는 Fig. 1에서와 같이 정지공간좌표계를 $O'-XYZ$, 배의 속도 V 를 갖고 등속도로 이동하는 공간좌표계를 $O_0-x_0y_0z_0$, 선체의 중심 G 에 고정된 좌표계를 $G-x_0y_0z_0$, 원점을 정지 자유표면에 잡고 선체에 고정된 좌표계를 $Oxyz$ 라 하였다.

또 입사파와 배의 진행방향과의 사이각을 χ 라고 표시하였다.

이 경우에 선체의 질량을 M , 선수동요 및 횡동요배의 질량 관성모멘트를 각각 J_ϕ 및 J_φ 라고 하면, 좌우동요, 횡동요 그리고 선수동요에 대한 연성운동방정식은 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} (M+a_{yy})\dot{y}_G + b_{yy}\dot{y}_G + c_{yy}y_G + a_{y\phi}\ddot{\phi} + b_{y\phi}\dot{\phi} + c_{y\phi}\phi \\ + a_{y\varphi}\ddot{\varphi} + b_{y\varphi}\dot{\varphi} + c_{y\varphi}\varphi = F_{yc} \cos \omega t \\ + F_{ys} \sin \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (J_\phi + a_{\phi\phi})\ddot{\phi} + b_{\phi\phi}\dot{\phi} + c_{\phi\phi}\phi + a_{\phi y}\ddot{y}_G + b_{\phi y}\dot{y}_G + c_{\phi y}y_G \\ + a_{\phi s}\ddot{\varphi} + b_{\phi s}\dot{\varphi} + c_{\phi s}\varphi = M_{\phi c} \cos \omega t \\ + M_{\phi s} \sin \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (J_\varphi + a_{\varphi\varphi})\ddot{\varphi} + b_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} + c_{\varphi\varphi}\varphi + a_{\varphi y}\ddot{y}_G + b_{\varphi y}\dot{y}_G + c_{\varphi y}y_G \\ + a_{\varphi\phi}\ddot{\phi} + b_{\varphi\phi}\dot{\phi} + c_{\varphi\phi}\phi = M_{\varphi c} \cos \omega t \end{aligned}$$

$$+ M_{\varphi s} \sin \omega t \quad (3)$$

한편 이 연성운동방정식의 계수와 파랑강제력은 부속에서와 같이 선체각단면에 대한 2차원 유체력이 포함된 항으로써 표시가 되므로, 운동방정식의 해를 구하기 위해서는 먼저 각 단면에 대한 2차원 유체력을 계산하여야 된다.

2차원 선체단면의 좌우동요와 횡동요에 대한 유체력을 구하는 방법으로는 Tasai[5]의 Lewis form method와 Frank[6] 또는 Maeda[7]등의 singularity distribution method가 있으며 본 연구에서는 Maeda가 상하동요의 경우에 적용하였던 singularity distribution 방법을 좌우동요 및 횡동요에 관한 것으로 확장하여 사용하였으며, 이방법의 가장 중요한 결점으로써 John[8]이 지적하였던 불능파수(irregular frequency)는 Ohmatsu[9]의 개념을 사용하여 제거하였다.

이 방법으로 구한 유체력값을 운동방정식의 계수와 파랑강제력항들에 대입하면, 횡규칙파중에서의 연성운동방정식의 해를 구할 수 있게 되고, 그 해를

$$\begin{aligned} y_G &= y_a \cos(\omega t + \varepsilon_y) \\ \phi &= \phi_a \cos(\omega t + \varepsilon_\phi) \\ \varphi &= \varphi_a \cos(\omega t + \varepsilon_\varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

의 모양으로 가정한다. 여기서 $y_a, \varepsilon_y, \phi_a, \varepsilon_\phi, \varphi_a, \varepsilon_\varphi$ 는 각각 좌우동요, 선수동요, 그리고 횡동요의 진폭 및 파와의 위상차를 나타낸다.

3. 계산예

3.1. 검증계산에 사용된 선박

활주형 고속정이 순항속력으로 횡규칙파중을 항해할 때 고속정의 운동성능은 활주상태가 아니므로 배수량형선박의 운동성능 계산과 동일한 방법으로 구하여도 정성적으로 큰 차이가 없을 것으로 여겨지며, 따라서 본 연구에서는 14차 I.T.T.C.의 내항성위원회가 각나라에서 개발한 프로그램에 의한 내항성능의 계산결과를 비교 검토하기 위하여 선정된 선형(S7-175)을 택하여 점증계산을 하였으며, 이배의 주요 요목은 표1과 같다

표 1. 주요요목

| Ship (S7-175) | | | |
|---------------|-----------|-----------|-------|
| Lpp(m) | 175.0 | B(m) | 25.40 |
| D(m) | 15.40 | T(m) | 9.50 |
| $\Delta(t)$ | 24,742.00 | L/B | 6.89 |
| B/T | 2.67 | lcb(%Lpp) | 1.417 |
| C_b | 0.5716 | C_M | 0.970 |
| KM(m) | 10.52 | GM(m) | 1.0 |
| Kyy/Lpp | 0.24 | Kxx/B | 0.328 |

3.2. 계산상태

15차 ITTC 보고서[10]의 결과와 비교하기 위하여 속력은 후루우드수 (Froude number)가 0.275이고 입사

파의 입사각은 60°와 90°인 경우, 각각에 대하여 무차원 원진동수 ($\omega \sqrt{L/g}$)가 1.0, 1.4, 1.9, 2.0, 2.7, 3.0, 4.0, 4.3일때에 대한 계산을 하였다.

3.3. 계산결과

특이점 분포방식에 의하여 선체의 21개 횡단면에서의 상기 계산경우에 대한 2차원 유체력을 계산한 후 이 결과를 스트립이론에 의한 선체운동 응답계산프로그램에 입력하였다. 이 횡동요, 좌우동요 그리고 선수동요의 진폭 및 위상의 계산결과를 15차 ITTC의 보고서에 발표된 바 있는 실원 값, Delft Shipbuilding Laboratory의 계산 값 및 각나라에서 계산한 결과의 평균값과 비교하여 도시 하였다.

Fig. 2~Fig. 7에는 입사파의 입사각이 90°일 때의 횡동요 진폭($\phi_a/K\zeta_a$) 및 위상(ϵ_ϕ), 좌우동요 진폭(y_a/ζ_a) 및 위상차(ϵ_y) 그리고 선수동요 진폭($\psi_a/K\zeta_a$) 및 위상차(ϵ_ψ)를 도시하였으며, Fig. 8~Fig. 13에는 입사파의 입사각이 60°일때의 계산결과를 위와 동일한 순서로 도시하였으며, 좌표계에서의 차이로 인하여 본연구에서의 입사파의 입사각 60°는 ITTC에서 발표한 결과의 120°(=180°-60°)에 해당한다.

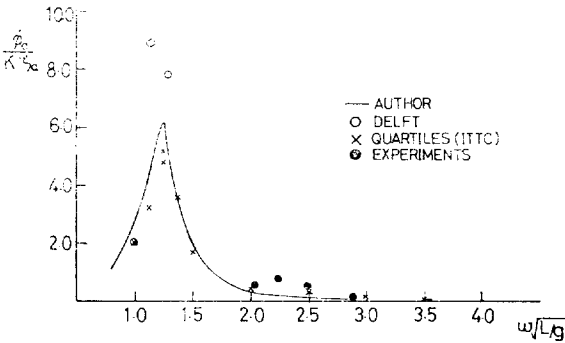


Fig. 2. Roll amplitude (heading 90 degrees)

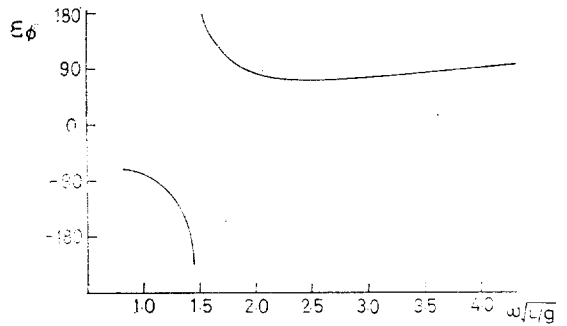


Fig. 3. Roll phase (heading 90 degrees)

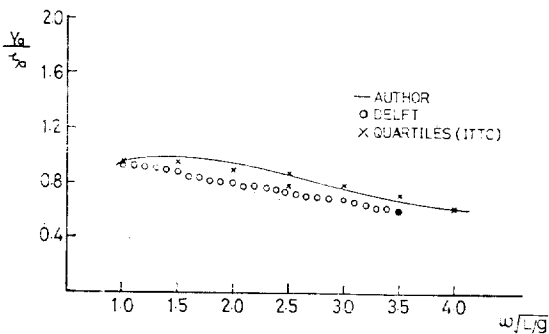


Fig. 4. Sway amplitude (heading 90 degrees)

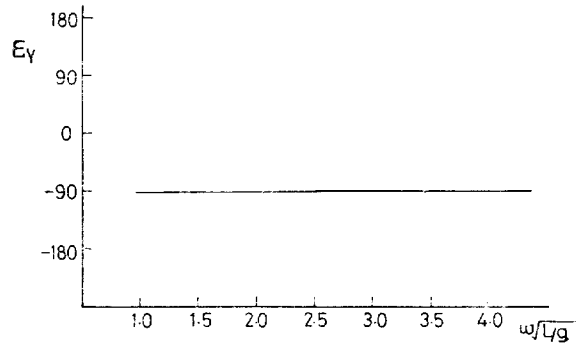


Fig. 5. Sway phase (heading 90 degrees)

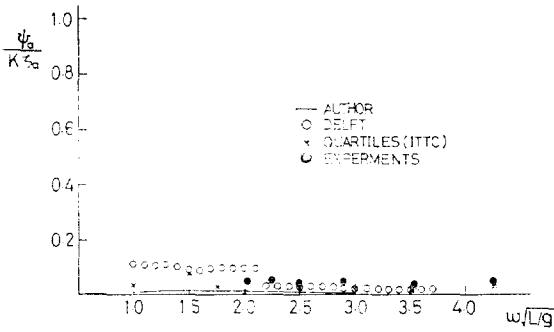


Fig. 6. Yaw amplitude (heading 90 degrees)

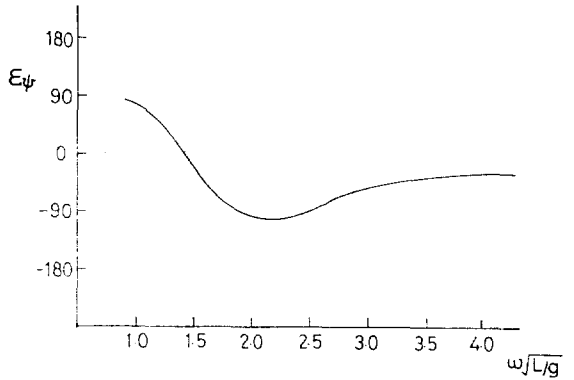


Fig. 7. Yaw phase (heading 90 degrees)

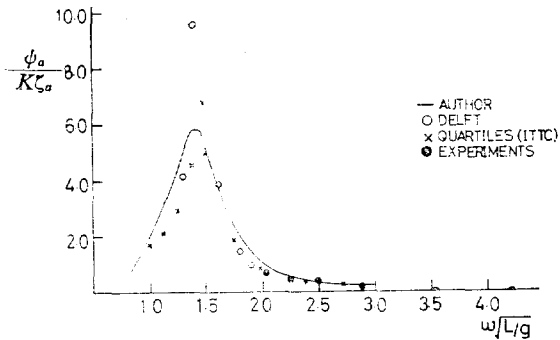


Fig. 8. Roll amplitude (heading 120 degrees)

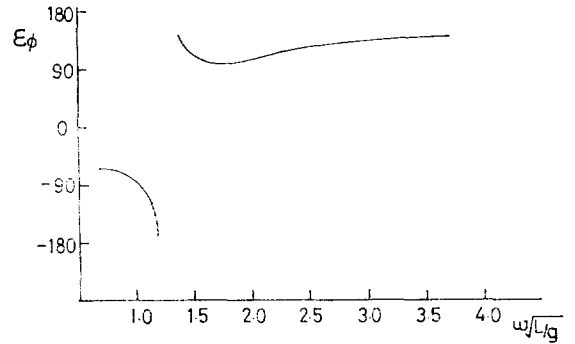


Fig. 9. Roll phase (heading 120 degrees)

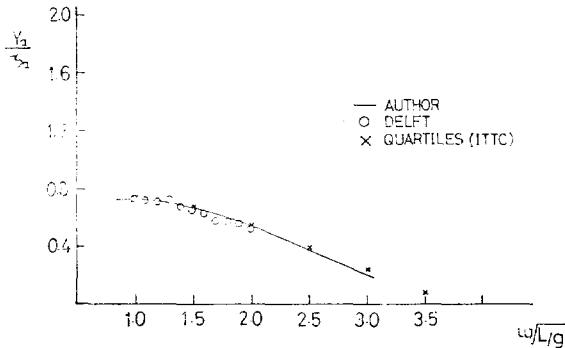


Fig. 10. Sway amplitude (heading 120 degrees)

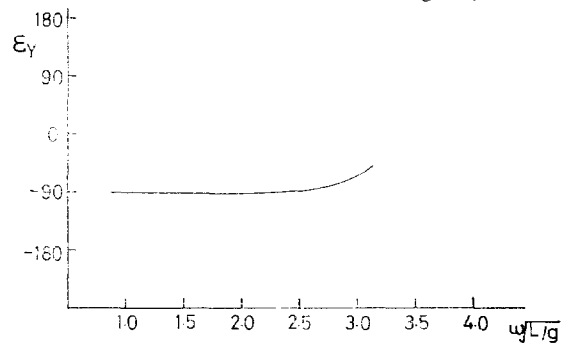


Fig. 11. Sway phase (heading 120 degrees)

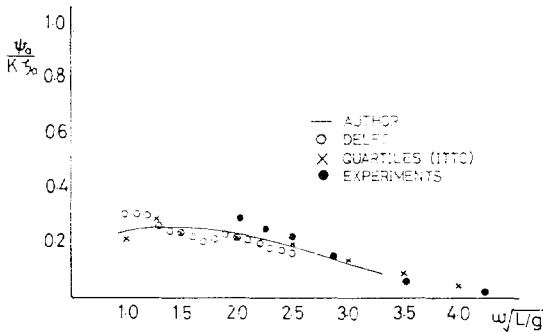


Fig. 12. Yaw amplitude (heading 120 degrees)

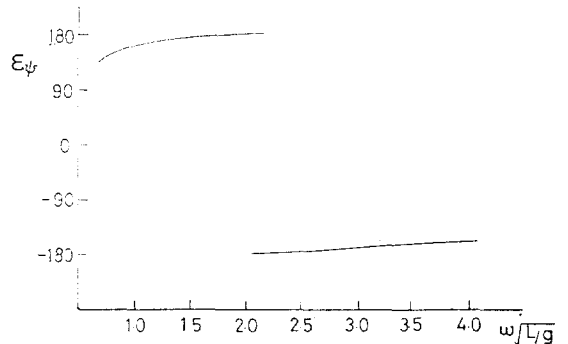


Fig. 13. Yaw phase (heading 120 degrees)

4. 결 론

활주형 고속정의 순항시 속력은 낮으며 활주상태에 들어가지 않으므로 배수량형으로 간주할 수 있고, 실험결과가 있는 제15차 ITTC의 내항성위원회보고서에 서 다루고 있는 콘테이나선형에 대해서 검증계산한 결과는 대체로 만족스럽다.

90°로 입사하는 규칙파에서나 120°로 입사하는 규칙파에서 본 프로그램에 의한 계산결과는 횡동요, 좌우동요, 선수동요 모두 제15차 ITTC보고서의 평균치와 거의 일치하여 입사각이 90°일때의 선수동요만은 실험치보다 다소 낮으나 나머지는 실험치와 차이가 적다.

본 프로그램을 이용하여 불규칙파중에서의 선체 가로 운동응답을 추정할 수 있는 계산을 수행하여 초기 설계에 활용할 수 있을 것이다.

본 프로그램을 사용하여 규칙파중의 선체가로운동성을 추정할 수 있는 선박은 다음과 같다.

- (1) 순항시의 활주형 고속정
- (2) round bottom형 고속정
- (3) 배수량형 일반선박
- (4) 배수량형의 단일선체의 함정
- (5) 어선

본 연구를 수행하는데 있어서 일부 프로그램의 작성에 협력하여 준 홍석원, 강창구 두분에게 감사드립니다.

끝으로 본 연구는 1978년도 문교부연구조성비로 이루어졌으며 서울대학교 공과대학 전자계산실의 FACOM 230-28S 전자계산조직을 이용한 것을 부기한다.

참 고 문 헌

[1] B.V. Korvin-Kroukovsky and W.R. Jacobs, "Pitching and Heaving Motions of a Ship in Regular Waves", Trans. SNAME, Vol. 65, 1957.

[2] Y. Watanabe, "On the Theory of Pitch and Heave of a Ship", Technology Reports of the Kyushu University, Vol. 31, No. 1, 1958.

[3] F. Tasai and M. Takaki, "Theory and Calculation of Ship Responses in Regular Wave", (in Japanese) Symposium on Seaworthiness of Ships, JSNA, Japan, 1969.

[4] N. Salvesen, E.O. Tuck and O. Faltinesen,

"Ship Motions and Sea Loads", Trans.SNAME, 1960.

[5] F. Tasai, "Hydrodynamic Force and Moment Produced by Swaying and Rolling Oscillations of Cylinders on the Free Surface", Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Vol. IX, No. 35, 1961.

[6] W. Frank, "Oscillation of Cylinders in or below the Free Surface of Deep Water", NSRDC Report No. 2375, 1967.

[7] H. Maeda, "Wave Excitation Forces on Two Dimensional Ship of Arbitrary Sections", JSNA, Japan, Vol. 126, 1969.

[8] F. John, "On the Motion of Floating Bodies. I & II", Comm. Pure Appl. Math. Vol. 3, 1950.

[9] S. Ohmatsu, "On the Irregular Frequencies in the Theory of Oscillating Bodies in a Free Surface", Papers of Ship Research Institute, Japan. No. 48, 1975.

[10] Proceeding of 15th International Towing Tank Conference, Vol. I, the Hague, Netherlands, 1978.

부 록

Tasai-Takaki[3]의 NSM에 의하면 좌우동요, 횡동요 그리고 선수동요에 대한 연성운동방정식의 계수와 파랑강제력 및 강제 모우먼트는, 선체의 임의 단면이 좌우동요 할때의 부가질량(M_S)과 감쇠력계수(N_S) 또는 횡동요 할 때의 부가관성모우먼트(I_R)와 감쇠모우먼트거리(L_w)를 사용하여 아래와 같이 표시가 된다.

연성운동방정식의 계수는

$$a_{yy} = \int_L M_S dx$$

$$b_{yy} = \int_L N_S dx - V[M_S]_L'$$

$$c_{yy} = -V[N_S]_L'$$

$$a_{y\phi} = \int_L M_S x dx + \frac{V}{\omega_e^2} \int_L N_S dx$$

$$b_{y\phi} = \int_L N_S x dx - V \int_L M_S dx - \frac{V^2}{\omega_e^2} [N_S]_L' - V[xM_S]_L'$$

$$c_{y\phi} = V^2[M_S]_L' - V[xN_S]_L'$$

$$\begin{aligned}
 a_{y\varphi} &= \int_L M_S(l_{SR}-OG)dx \\
 b_{y\varphi} &= \int_L N_S(l_w-OG)dx + V \cdot OG[M_S]_a' \\
 &\quad - V[M_S l_{SR}]_a' \\
 c_{y\varphi} &= -V[N_S l_w]_a' + V \cdot OG[N_S]_a' \\
 a_{\psi\varphi} &= \int_L M_S x^2 dx + \frac{V}{\omega_e^2} \int_L N_S x dx \\
 b_{\psi\varphi} &= \int_L N_S x^2 dx + \frac{V^2}{\omega_e^2} \int_L N_S dx \\
 &\quad - \frac{V^2}{\omega_e^2} [x N_S]_a' - V[x^2 M_S]_a' \\
 c_{\psi\varphi} &= V \int_L x N_S dx - V^2 \int_L M_S dx \\
 &\quad - V[x^2 N_S]_a' + V^2 [x M_S]_a' \\
 a_{\zeta\varphi} &= \int_L M_S(l_{SR}-OG)xdx \\
 b_{\zeta\varphi} &= \int_L N_S(l_w-OG)xdx + V \int_L M_S(l_{SR}-OG)dx \\
 &\quad - V[x M_S(l_{SR}-OG)]_a' \\
 c_{\zeta\varphi} &= V \int_L N_S(l_w-OG)dx - V[x N_S(l_w-OG)]_a' \\
 a_{\phi y} &= \int_L M_S x dx \tag{A-1} \\
 b_{\phi y} &= \int_L N_S x dx + V \int_L M_S dx - V[x M_S]_a' \\
 c_{\phi y} &= V \int_L N_S dx - V[x N_S]_a' \\
 a_{\omega\varphi} &= \int_L (I_R - 2M_S l_{SR} OG + OG^2 M_S) dx \\
 b_{\omega\varphi} &= \int_L N_S(l_w-OG)^2 dx - V[I_R - M_S l_{SR} OG]_a' \\
 &\quad + V \cdot OG[M_S(l_{SR}-OG)]_a' \\
 c_{\omega\varphi} &= W \cdot GM - V[N_S l_w(l_w-OG)]_a' \\
 &\quad + V \cdot OG[N_S(l_w-OG)]_a' \\
 a_{\varphi y} &= \int_L M_S(l_{SR}-OG)dx \\
 b_{\varphi y} &= \int_L N_S(l_w-OG)dx - V[M_S(l_{SR}-OG)]_a' \\
 c_{\varphi y} &= -V[N_S(l_w-OG)]_a' \\
 a_{\psi\psi} &= \frac{V}{\omega_e^2} \int_L N_S(l_w-OG)dx \\
 &\quad + \int_L x M_S(l_{SR}-OG)dx \\
 b_{\psi\psi} &= \int_L N_S(l_w-OG)xdx - V \int_L M_S(l_{SR}-OG)dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad - \frac{V^2}{\omega_e^2} [N_S(l_w-OG)]_a' \\
 &\quad - V[x M_S(l_{SR}-OG)]_a' \\
 c_{\psi\psi} &= V^2[M_S(l_{SR}-OG)]_a' - V[x N_S(l_w-OG)]_a'
 \end{aligned}$$

파랑 강제력과 강제모우먼트는

$$\begin{aligned}
 F_{y\epsilon} &= \omega_e \zeta_0 \sin \lambda \left\{ \int_L N_S e^{-KTm} \cos(kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad - \omega_e \int_L M_S e^{-KTm} \sin(Kx \cos \lambda) dx \\
 &\quad \left. - V[M_S e^{-KTm} \cos(Kx \cos \lambda)]_a' \right\} \\
 &\quad - 2fg \zeta_0 \int_L \sin(Kx \cos \lambda) \int_{-dx}^0 e^{Kz} \cdot \\
 &\quad \sin(Ky \sin \lambda) dz dx \\
 F_{y,s} &= \omega_e \zeta_0 \sin \lambda \left\{ - \int_L N_S e^{-KTm} \sin(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad - \omega_e \int_L M_S e^{-KTm} \cos(Kx \cos \lambda) dx \\
 &\quad \left. + V[M_S e^{-KTm} \sin(Kx \cos \lambda)]_a' \right. \\
 &\quad \left. - \frac{V}{\omega_e} [N_S e^{-KTm} \cos(Kx \cos \lambda)]_a' \right\} \\
 &\quad - 2fg \zeta_0 \int_L \cos(Kx \cos \lambda) \int_{-dx}^0 e^{Kz} \cdot \\
 &\quad \sin(Ky \sin \lambda) dz dx \\
 M_{\psi\epsilon} &= \omega_e \zeta_0 \sin \lambda \left\{ \int_L N_S e^{-KTm} x \cos(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad - \omega_e \int_L M_S e^{-KTm} x \sin(Kx \cos \lambda) dx \\
 &\quad \left. + V \int_L M_S e^{-KTm} \cos(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{V}{\omega_e^2} \int_L N_S e^{-KTm} \sin(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad \left. - V[M_S e^{-KTm} x \cos(Kx \cos \lambda)]_a' \right. \\
 &\quad \left. - \frac{V}{\omega_e} [N_S e^{-KTm} x \sin(Kx \cos \lambda)]_a' \right\} \\
 &\quad - 2fg \zeta_0 \int_L x \sin(Kx \cos \lambda) \int_{-dx}^0 e^{Kz} \cdot \\
 &\quad \sin(Ky \sin \lambda) dz dx \tag{A-2} \\
 M_{\phi\epsilon} &= \omega_e \zeta_0 \sin \lambda \left\{ - \int_L N_S e^{-KTm} x \sin(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad - \omega_e \int_L M_S e^{-KTm} x \cos(Kx \cos \lambda) dx \\
 &\quad \left. - V \int_L M_S e^{-KTm} \sin(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{V}{\omega_e} \int_L N_S e^{-KTm} \cos(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 &\quad \left. + V[M_S x e^{-KTm} \sin(kx \cos \lambda)]_a' \right. \\
 &\quad \left. - \frac{V}{\omega_e} [N_S e^{-KTm} x \cos(Kx \cos \lambda)]_a' \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\rho g \zeta_a \int_L x \cos(Kx \cos \lambda) \int_{-dx}^0 e^{Kz} \cdot \\
 & \sin(Ky \sin \lambda) dz dx \\
 M_{\phi c} = & \omega \zeta_a \sin \lambda \left\{ \int_L N S e^{-KTm} (l_w - OG) \cdot \cos(Kx \cos \lambda) dx \right. \\
 & - \omega_e \int_L M S e^{-KTm} (l_{SR} - OG) \cdot \sin(Kx \cos \lambda) dx \\
 & - V [M S e^{-KTm} (l_{SR} - OG) \cos(Kx \cos \lambda)]'_{l_a} \\
 & - \frac{V}{\omega_e} [N S e^{-KTm} (l_w - OG) \cdot \sin(Kx \cos \lambda)]'_{l_a} \left. \right\} \\
 & + 2\rho g \zeta_a \int_L \sin(Kx \cos \lambda) \cdot \left[\int_0^b e^{Kz} \sin(Ky \sin \lambda) y dy \right. \\
 & + \int_{-dx}^0 e^{Kz} \sin(Ky \sin \lambda) z dz \\
 & \left. + OG \int_{-dx}^0 e^{Kz} \sin(Ky \sin \lambda) dz \right] dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\phi s} = & \omega \zeta_a \sin \lambda \left\{ - \int_L N S e^{-KTm} (l_w - OG) \cdot \right. \\
 & \sin(Kx \cos \lambda) dx \\
 & - \omega_e \int_L M S e^{-KTm} (l_{SR} - OG) \cdot \cos(Kx \cos \lambda) dx \\
 & + V [M S e^{-KTm} (l_{SR} - OG) \sin(Kx \cos \lambda)]'_{l_a} \\
 & - \frac{V}{\omega_e} [N S e^{-KTm} (l_w - OG) \cdot \cos(Kx \cos \lambda)]'_{l_a} \left. \right\} \\
 & + 2\rho g \zeta_a \int_L \cos(Kx \cos \lambda) \cdot \left[\int_0^b e^{Kz} \cdot \right. \\
 & \sin(Ky \sin \lambda) y dy \\
 & + \int_{-dx}^0 e^{Kz} \sin(Ky \sin \lambda) z dz \\
 & \left. + OG \int_{-dx}^0 e^{Kz} \sin(Ky \sin \lambda) dz \right] dx
 \end{aligned}$$