

## 論 文

大韓造船學會誌  
第17卷 第4號 1980年 12月  
Journal of the Society of  
Naval Architects of Korea  
Vol. 17, No. 4, Dec. 1980

### 偏心 補強平板의 強度 解析

金 昌 烈\* · 金 載 福\*\*

Strength Analysis of Eccentrically Stiffened Plates by Finite Element Method

by

C.Y. Kim\*, J.B. Kim\*\*

#### ABSTRACT

Stiffened plates are commonly used as a component of ship's structures. Most frequently symmetrically stiffened plates are used, but some of the bow or stern structures and any specified parts are often constructed with eccentrically stiffened plates. The problems of these eccentrically stiffened plates have been studied rarely, and the results of eccentricity effect of eccentrically stiffened plates are not available.

This paper deals with the analysis of eccentrically stiffened plates in the linear elastic range. The derivation of the stiffness matrix was carried out by finite element method for which the isoparametric element was adopted. To show the effect of eccentricity, the deflection at the center under the uniformly distributed and the concentrated load of simply supported and clamped plate models are computed respectively in accordance with the eccentricity of the stiffener.

As shown in the results of computations, the eccentricity effect of concentrated load case is greater than that of distributed load case and that of simply supported boundary condition is greater than that of clamped boundary condition. The higher eccentricity of stiffener is, the smaller the effect of stiffener becomes, therefore scantlings of eccentrically stiffened plates should be considerably greater than those of symmetrically stiffened plates.

記 號 定 義		
$x, y, z$	: 基準座標系	$\phi''$ : 비틀角的 變化率
$\xi, \eta$	: natural coordinates	$M$ : 굽힘 모우멘트 벡터
$w$	: z軸方向의 垂直變位	$Q$ : 剪斷力벡터
$\theta_x, \theta_y$	: x, y軸方向의 回轉變位	$T$ : 비틀모우멘트
$\phi_x, \phi_y$	: x, y軸方向의 剪斷變形率	$\pi$ : total potential energy
$\phi'$	: 補強材의 굽힘에 의한 剪斷變形率	$W$ : 變形에너지
		$V$ : 外力에 의한 potential energy
		$\delta_b^P, \delta_T^P, \delta_b^S, \delta_T^S$ : 板의 굽힘, 板의 비틀, 補強材의

接受日字: 1980年 12月 2日

\* 正會員, 釜山大學校

\*\* 正會員, 海軍士官學校

- ε : 變形率벡터(添字는 δ의 경우와 同一)
- σ : 應力벡터(添字는 δ의 경우와 同一)
- D : 剛度(rigidity)매트릭스(添字는 δ의 경우와 同一)
- B : 變形率 매트릭스(添字는 δ의 경우와 同一)
- K : 全體 剛性매트릭스(添字는 δ의 경우와 同一)
- K<sup>e</sup> : 要素剛性 매트릭스
- N : 形狀函數
- J : Jacobian
- F : 힘벡터
- α : 두께 방향의 剪斷變形修正係數
- q : 分布荷重의 크기

1. 序 論

船體는 본질적으로 板과 補强材로 구성된다. 특히 그중에서도 船底構造, 甲板 및 橫隔壁등은 그 좋은 예이다.

이들 경우의 대부분은 補强材가 平板에 대해서 對稱狀態로 되어 있으나, 船首 또는 船尾構造라든가 局部的인 補强이 요구될 때는 補强材가 板에 대해서 非對稱으로 붙는 경우가 더러 있다.

補强材가 平板에 대해 對稱인 경우의 解析方法은 Schade[1]의 有效幅개념에 의해 平板의 일부가 補强材처럼 거동한다는 假定아래 理論을 적용하여 해석하는 방법과, Huber[2]의 直交異方性理論에 의해 서로 직교하는 補强材를 갖는 補强平板의 경우 이들 補强材의 剛性도를 平板에 置換하여 해석하는 방법등이 있다[10].

그러나, 偏心 補强平板에 대해서는 Wegmüller[3]가 종래의 變位函數式에 의한 有限要素法으로 解析한 방법 등이 있으나 그것도 方法論에 대한 언급에 그치고 偏心도에 따른 결과의 提示는 하고 있지 않다.

本論文은 偏心補强平板에 대한 해석을 有限要素法에 의하여 遂行하였으며, 有限要素로서는 가장 높은 精度의 解析結果를 주는 것으로 알려져 있는[4] isoparametric 要素를 사용하였고, 平板과 補强材에 다 같이 最小 potential energy 原理[9]를 적용하여 剛性方程式을 구성하였다.

四邊 固定인 경우와 單純支持狀態의 境界條件을 갖는 補强平板에 集中荷重 및 分布荷重이 작용할 때의 各 偏心도에 따른 偏心の 影響을 조사하기 위해 單純化한 計算 model을 택하여 數值計算을 수행하였다.

2. 平板의 解析

2.1 基本概念

실제의 모든 平板은 3次元 구조물로서 당연히 3次元의 非線形문제에 취급되어야 하나, 船體構造와 같이 板의 두께가 다른 치수보다 훨씬 작은 경우에는 薄板의 2次元 구조물로 置換가능하며, 微小變形理論을 적용하여도 큰 오차가 없다[6,7,10].

또한 3次元의 두꺼운 板에서 문제가 되는 剪斷變形이 층變形에너지에 기여하는 量은 10%미만인 것으로 알려져 있어[7] 平板을 2次元으로 解析한 후에 剪斷效果를 따로 추가하는 방법이 채택되어 왔다[7,8].

本論文에서도 平板을 薄板으로 假定하여 2次元 문제로 취급하기로 한다. 이 경우 두께방향의 剪斷效果를 포함시키기 위해서 Fig.1과 같이 warping에 의한 回轉角을 고려한 變位를 취하기로 하였다.

2.2 假定

가. 平板의 두께는 幅과 길이에 비하여 매우 작은 치수이며 垂直變位 w는 두께에 비해 작은 값으로 한다.

나. 中央平面(midplane)에 變形前 垂直이던 面은 變形中 斷面의 warping으로 變形後에도 垂直일 必要는 없으나 平面인 것으로 가정한다.

다. 中央平面에 대한 垂直方向應力(σ<sub>z</sub>)은 하중에 관계 없이 無視한다.

2.3 座標系와 變位

平板의 微小要素에 作用하는 힘과 그 作用方向은 Fig.2와 같다.

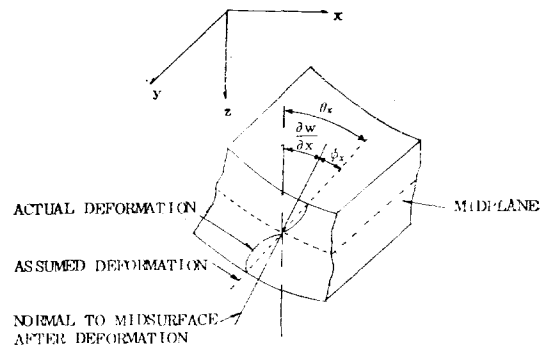


Fig. 1. Deformation of the cross-section of plate



function)로 定義되는 isoparametric 要素를 取하면 從來의 變位函數에 의한 方法보다 計算이 簡単해진다 [4,14].

Fig.3과 같은 8개의 節點을 갖는 isoparametric 要素를 채택하고, 또 無次元의 natural coordinate  $\xi, \eta$  를 이용하여 形狀函數를 다음과 같이 잡는다. 꼭지 節點에서

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad (i=1, 3, 5, 7) \quad (12)$$

邊上の 節點에서

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad (i=2, 4, 6, 8)$$

여기서

$$\begin{aligned} \xi_i &= -1, 0, 1, 1, 1, 0, -1, -1 \\ \eta_i &= -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 0 \\ \text{단 } \xi &= \frac{x}{2a}, \eta = \frac{y}{2b} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $a, b$ 는 4각형 요소의 두변의 길이이다. 그러면 要素의 幾何學的 形狀과 變位는 다음式과 같이 定義할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \\ w(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) w_i \\ \theta(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

또 式 (1), (2)의 定義에 의해 變形率은 面內的 縮伸成分  $\epsilon_s^P$ 와 剪斷成分  $\phi$ 로 다음과 같이 表示된다.

즉,

$$\epsilon^P = \begin{bmatrix} \epsilon_x^P \\ \epsilon_y^P \\ \dots \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \dots \\ -\phi_x \\ -\phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \dots \\ -\left(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\left(\theta_y - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} & -\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\sum_i N_i & 0 \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -\sum_i N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{B}_i^P \delta_i \quad (16)$$

式 (16)에서

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서  $\mathbf{J}$ 는 Jacobian 매트릭스로서 다음과 같다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_i N_i x_i & \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_i N_i y_i \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_i N_i x_i & \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_i N_i y_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

平板 전체의 total potential energy  $\pi$ 는 各要素의 total potential energy  $\pi_e$ 의 重疊으로 구해진다.

$$\pi = \sum_e \pi_e \quad (19)$$

따라서 式 (6)에 式 (8), (16)을 代入하면 要素하나에 對한  $\pi_e$ 는

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_{A^e} \delta^P \mathbf{B}^T \mathbf{D}^P \mathbf{B} \delta^P dA^e - \int_{A^e} \delta^P N q dA^e \dots \quad (20)$$

$$\text{式 (20)을 式 (5)에 의해 } \delta^P \text{에 대하여 最小化하면 } \mathbf{K}^P \delta^P = \mathbf{F}^P \quad (21)$$

와 같이 平衡方程式으로 된다.

$i, j$ 行列의 剛性 매트릭스는

$$K_{ij}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^P \mathbf{B}_j dA \quad (22)$$

節點力은

$$F_i = \int_{A^e} q N_i dA \quad (23)$$

이다.

$$\text{또 } dA = dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (24)$$

이다.

### 3. 補強材의 解析

#### 3.1 基本概念

船體의 外板, 甲板, 隔壁 등에 붙은 補強材는 變形이 일어날 때 平板과 함께 變形된다. 따라서 補強材要素의 變位도 板과 같이 垂直變位  $w$ 와 回轉角  $\theta_x, \theta_y$ 로 되고,  $x$ 軸에 平行한 補強材일 경우  $w$ 와  $\theta_y$ 는 굽힘에 의한 變位이며  $\theta_x$ 는 비틀음에 의한 變位가 된다. 따라서 補強材의 解析 時에도 平板의 解析 경우와 같이 微小變形理論을 적용하면 굽힘과 비틀음은 서로 獨立인 것으로 볼 수 있다[16].

本 論文에서는 補強材의 굽힘과 비틀음을 각기 따로 解析한 후 그 結果를 서로 重疊시키기로 한다.

#### 3.2 假 定

補強平板의 中央平面에서는  $x, y$ 方向의 內平面變形(in-plane deformation)  $u, v$ 도 유발되나 微小變形인 경우로 보아  $u, v$ 는 無視한다.

補強材는 彈性體로서 Hooke의 法則을 따르며 또한 補強材가 붙는 위치는 平板要素의 要素間의 境界線(mesh line)으로 假定한다.

#### 3.3 座標, 變位 및 要素의 선정

補強材 要素에 대한 局部座標을 Fig. 4와 같이 잡기로 한다.  $y$ 軸에 나란히 놓인 경우에는 座標轉換에트릭스를 이용하여 Fig. 4의  $T$ 와  $M$ 의 方向을 相互交換시키기만 하면 된다.

補強材의 變位도 平板의 경우와 같이 다음과 같이 된다.

$$\delta^S = \begin{bmatrix} \delta_b^S \\ \dots \\ \delta_i^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_y \\ \dots \\ \theta_x \end{bmatrix} \quad (25)$$

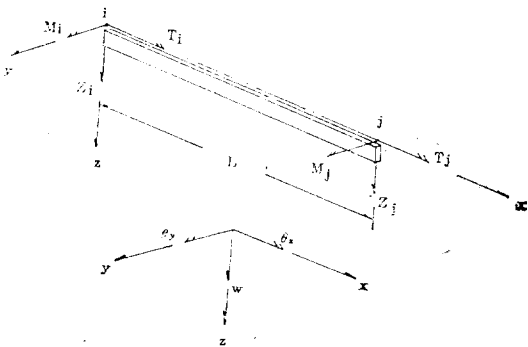


Fig. 4. Displacements and stresses acting on stiffener element

$y$ 軸에 平行한 補強材일 경우  $\delta_b^S = [w, \theta_x]^T, \delta_i^S = [\theta_y]$ 로 된다.

補強材 要素는 3개의 節點을 갖는 Fig. 5와 같은 isoparametric要素를 取한다. 이때의 形狀函數는 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{\xi}{2}(\xi-1) \\ N_2(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi) \\ N_3(\xi) &= \frac{\xi}{2}(\xi+1) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

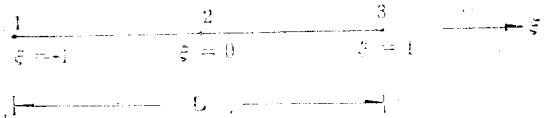


Fig. 5. Isoparametric element of stiffener

#### 3.4 剛性 매트릭스식의 構成

가. 굽힘의 경우

굽힘에 의한 變位는

$\delta_B^S = [w, \theta_y]^T = [w_1, \theta_{y1}, w_2, \theta_{y2}, w_3, \theta_{y3}]^T$ 이고 두께(깊이) 方向의 剪斷效果를 포함시킬 경우 回轉角  $\theta_y$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial x} + \phi' \\ \phi' &= -\left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y \right) \end{aligned} \quad (27)$$

또 Hooke의 法則에서

$$\begin{aligned} \sigma_b^S &= \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \phi' \end{bmatrix} \\ &= D_b^S \epsilon_b^S \end{aligned} \quad (28)$$

단  $\alpha$ 는 平板에서 設定한 값과 同一한 것이다.

式 (25)의 變位와 座標는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \sum_i N_i w_i = N(\xi)_1 w_1 + N(\xi)_2 w_2 + N(\xi)_3 w_3 \\ \theta_y(\xi) &= \sum_i N_i \theta_{yi} = N(\xi)_1 \theta_{y1} + N(\xi)_2 \theta_{y2} + N(\xi)_3 \theta_{y3} \\ x(\xi) &= \sum_i N_i x_i = N(\xi)_1 x_1 + N(\xi)_2 x_2 + N(\xi)_3 x_3 \end{aligned} \quad (29)$$

여기서  $N_i$ 는 (26)식과 같다.

變形率은 式 (28)에서

$$\epsilon_b^S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \sum_i N_i \theta_i \\ -\frac{\partial}{\partial x} \sum_i N_i w_{yi} + \sum_i N_i \theta_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & \vdots & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \vdots \\ -\frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_y \\ w_2 \\ \theta_y \\ w_3 \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_b^S \delta_b^S \quad (30)$$

式(6)의 total potential energy式을 補强材要素에 적용하면

$$\pi = \frac{1}{2} \int_I (M\theta \theta' + Q\phi') dx - \int_I qwdx \quad (31)$$

補强材 要素하나에 對하여 式 (28), (30)을 式 (31)에 代入하면

$$\pi_e = \frac{\delta_b^{S^T}}{2} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}_b^{S^T} \mathbf{D}_b^S \mathbf{B}_b^S dx \delta_b^S - \delta_b^{S^T} \int_{x_1}^{x_2} Nq dx \quad (32)$$

式 (32)를  $\delta_b^S$ 에 對하여 最小化하면

$$\mathbf{K}_b^S \delta_b^S = \mathbf{F}_b^S \quad (33)$$

의 形이 되고  $i, j$ 行列의 剛性매트릭스는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{ij}^S = \int_I \mathbf{B}_i^{S^T} \mathbf{D}_i^S \mathbf{B}_j^S dx \quad (34)$$

단  $\mathbf{K}_{ij}^S$ 의 次數는  $6 \times 6$ 이고,  $dx = |J|d\xi$ 이다.

나. 비틀의 경우

Fig. 4와 같은 補强材 要素의 비틀모우멘트에 의한 節點變位는 다음과 같다.

$$\delta_T^S = [\theta_{xi}, \theta_{xj}, \theta_{xk}]^T \quad (35)$$

式(35)는 비틀만을 고려할 경우, warping비틀에 의한 微小變位는 無視하고 순수비틀만에 의한 變位이며, 이때 應力變形率 關係式은 다음과 같다.

$$\mathbf{T} = \mathbf{GJ}\phi'' \quad (36)$$

여기서  $\mathbf{G}$ : 剪斷係數

$\mathbf{J}$ : 極慣性모우멘트

또

$$\begin{aligned} \phi'' &= \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{d}{dx} \sum N_i \theta_{xi} \\ &= \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x} \right] \begin{Bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{x_3} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{B}_T^S \delta_T^S \end{aligned} \quad (37)$$

Total potential Energy式은

$$\begin{aligned} \pi_e &= \frac{1}{2} \int_I T\phi'' dx - \int_I qwdx \\ &= \frac{\delta_T^{S^T}}{2} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}_T^{S^T} \mathbf{D}_T^S \mathbf{B}_T^S dx \delta_T^S - \delta_T^{S^T} \int_0^L Nq dx \end{aligned} \quad (38)$$

式 (38)을  $\delta_T^S$ 로 最小化시키면

$$\mathbf{K}_T^S \delta_T^S = \mathbf{F}_T^S \quad (39)$$

式(39)에서  $i, j$ 行列의 剛性매트릭스는 다음式으로 表示되고 2次數는  $3 \times 3$ 으로 된다.

$$\mathbf{K}_{ij}^r = \int_I \mathbf{B}_{T_i}^{S^T} \mathbf{D}_T^S \mathbf{B}_{T_j}^S dx \quad (40)$$

나. 補强材 要素의 全體剛性매트릭스

補强材 要素의 全體 剛性매트릭스는 式 (34)와 (40)을 重疊시키면  $9 \times 9$  매트릭스를 얻는다.

### 4. 數值計算

#### 4.1 剛性方程式

補强平板의 全體 剛性매트릭스는, 平板의 경우나 補强材의 경우 다 같이 한 節點에서는 3개의 自由度 즉  $w, \theta_x, \theta_y$ 를 가지므로 補强平板의 全體剛性매트릭스는 다음과 같은 式으로 表示할 수가 있다.

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}]^P + [\mathbf{K}]^S \quad (41)$$

또 全體 平衡方程式은

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}]\{\delta\} \quad (42)$$

단  $[\mathbf{F}]$ : 全體의 荷重벡터

$[\mathbf{K}]$ : 全體의 剛性매트릭스

$\{\delta\}$ : 全體의 變位벡터

式 (13)의 natural coordinate에 의한 Gauss의 積分法으로 平板要素에 대한 剛性매트릭스를 計算하면

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta \text{로 부터}$$

$\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| = \phi(\xi, \eta)$ 라 두었을 경우

Gauss의 2點 積分法은 [11, 14]

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= a_1 [a_1 \phi(\xi_1, \eta_1) + a_2 \phi(\xi_1, \eta_2)] \\ &\quad + a_2 [a_1 \phi(\xi_2, \eta_1) + a_2 \phi(\xi_2, \eta_2)] \end{aligned}$$

로 되며 여기서

$$a_1 = a_2 = 1, \quad \xi = \eta = \pm \frac{1}{3} \text{이다.}$$

補强材 要素의  $\mathbf{K}$ 도 式 (34), (40)을 平板의 경우와 같이 積分하되 길이  $x$ 에 관해 계산하면 된다.

#### 4.2 프로그램의 構成

프로그램은 다음과 같이 5段階로 構成되어 있다.

(1) 計算資料의 入力段階

Subroutine INPUT에서 계산에 필요한 control data와 各 要素를 구성하는 節點番號, 節點座標, 境界條件 材質의 特性值등을 入力시킨 다음, 入力資料의 妥當性 여부를 조사하는 단계

(2) 要素剛性매트릭스 計算段階

Subroutine STIFP에서 Gauss의 積分法으로 平板要素 하나하나에 對해 剛性 매트릭스  $K^e$ 를 계산하고, Subroutine STIFS에서 補強材要素別 剛性 매트릭스를 급형과 비틀의 경우에 대해 따로 계산후 서로 重疊시켜 補強材 要素의 全體 剛性 매트릭스  $K_S^e$ 를 構成하여 disc file에 記錄시키는 단계

(3) 荷重計算段階

Subroutine LOAD에서 구조물의 任意 위치에서 작용하는 荷重을 等價節點荷重으로 置換하는 段階로서 작용하중으로는 集中荷重 및 分布荷重으로 하였다.

(4) 節點變位計算段階

Subroutine BAND에서 平板要素의 剛性 매트릭스와 補強材要素의 剛性매트릭스를 補強平板構造物 全體의 剛性 매트릭스로 構成시킨 뒤 帶狀 매트릭스를 壓縮시킨 후 Gauss 消去法으로 未知節點 變位에 對한 剛性 方程式을 푸는 段階

(5) 應力計算 段階

Subroutine BAND에서 계산된 結果를 利用하여 全 要素의 各節點에 對한 剪斷力과 모우멘트를 計算하여 印刷하는 단계

프로그램의 흐름圖는 Fig. 6과 같다.

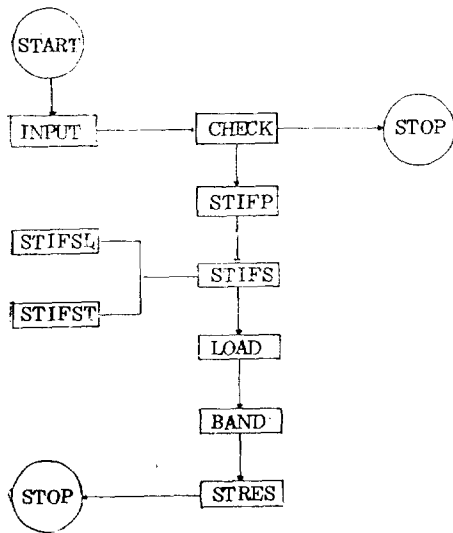


Fig. 6. Flow chart

4.3 프로그램에 의한 計算結果의 檢證

Fig. 7과 같은 平板의 計算用 model에 대한 처짐량을 구하여 理論解[5]와 比較한 結果는 Table 1, 2와 같다.

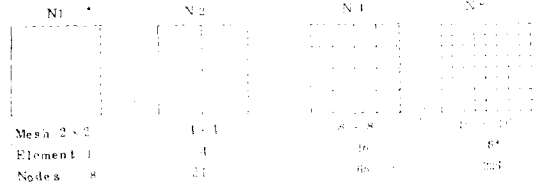


Fig. 7. Discretization of a plate quadrant

Table 1. Central deflection under uniformly distributed load of a simply supported square plate

Element	N1	N2	N3	N4
F.E.M.	0.004194	0.004095	0.004073	0.004064
Exact	0.004062			
Error	+3.25	+0.81	+0.27	+0.05

Table 2. Central deflection under single concentrated load of a simply supported square plate

Element	N1	N2	N3	N4
F.E.M.	0.013842	0.012427	0.011931	0.011772
Exact	0.01160			
Error(%)	+18.82	+7.13	+2.84	+1.45

이 結果에서 同一境界條件 및 荷重狀態에서 要素의 數가 增加할수록 理論解에 接近하였으며 要素의 數를 16×16으로 하였을 때 理論解와 거의 一致함을 보였다. 補強材를 붙였을 경우 처짐을 구하여 Constraint Method[15]로 구한 값들과 比較한 結果는 Table 3, 4와 같다.

Table 3. Central deflection under uniformly distributed load of simply supported square plate with one stiffener

Case	Deflection
Author	$1.358 \times 10^{-4}$ in
Ref[15]	$1.367 \times 10^{-4}$ in

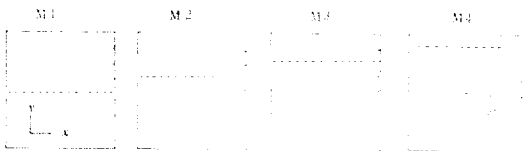
**Table 4.** Central deflection under concentrated load of simply supported square plate with one stiffener in each direction.

Case	Deflection
Author	$3.463 \times 10^{-4}$ in
Ref[15]	$3.464 \times 10^{-4}$ in

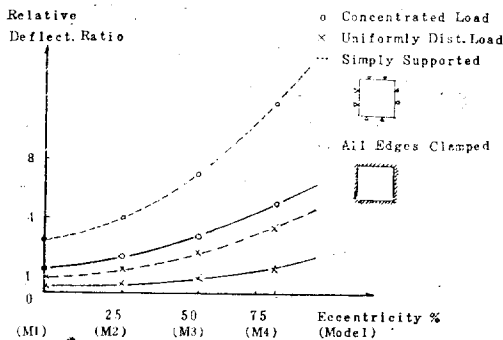
5. 計算結果

5.1 한 방향 補强平板의 경우

Fig.8과 같은 x軸과 平行한 한개의 補强材가 붙은 四邊이 單位길이를 갖는 正四邊形을 計算 model로 選擇하였다. 計算結果의 利用度를 높이기 위해 基本 model M1으로 부터 y方向으로 한 邊길이의  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{2}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ 씩 偏心시킨 3개의 計算 model M2, M3, M4(이들의 偏心率은 各各 25%, 50%, 75%)에 대해 平板中央에 한개의 集中荷重이 作用할 때와 均一分布荷重이 作用할 때에 四邊固定인 경우와 單純支持의 경우에 대하여 각각 計算을 遂行하였다. 各 荷重狀態와 境界條件에 대한 補强平板中央點에서의 처짐량을 單純支持된 M1에 均一分布荷重이 作用할 때를 基準으로 無次元化해 보면 Fig.9와 같다.



**Fig. 8.** Stiffened plate models with one stiffener



**Fig. 9.** Relative central deflection ratio of stiffened plates with one stiffener

偏心率에 따른 처짐의 정도를 比較해 보기 위해 補强

材가 對稱으로 붙여진 model M1(偏心率이 0)의 四邊 固定境界狀態에서 平板中央點의 처짐을 單位값으로 보았을 때, 各 荷重別 M2, 3, 4 model의 中央點에서의 相對 처짐량은 Table 5와 같고, 均一分布荷重이 作用하는 model M1의 中央點 처짐량을 單位값으로 보았을 때 境界條件別 M2, 3, 4 model 中央點의 相對 처짐량은 Table 6과 같다.

**Table 5.** Relative central deflection value(M1~M4)

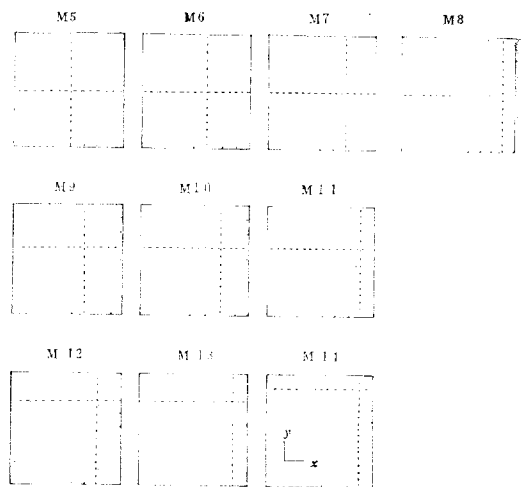
Model (Eccentricity)	Load Bound.		Simply Concentrated	
	Simply	Clamped	Simply	Clamped
M1 (0%)	2.92	1.0	2.07	1.0
M2(25%)	4.05	1.38	2.93	1.40
M3(50%)	6.25	2.07	4.51	2.11
M4(75%)	10.45	3.42	7.52	3.45

**Table 6.** Relative central deflection value(M1~M4)

Model (Eccentricity)	Load Bound.		All Edges Clamped	
	Simply Supported	Concentrated	Simply Supported	Concentrated
M1 (0%)	1.00	2.86	1.00	4.02
M2(25%)	1.39	4.03	1.38	5.62
M3(50%)	2.14	6.20	2.07	8.44
M4(75%)	3.56	10.36	3.42	13.96

5.2 두 방향 補强平板의 경우

前記 Fig.8의 한 방향 補强材에 直交하는 y축에 平行한 補强材가 Fig.10과 같이 붙여진 경우를 생각할수



**Fig. 10.** Stiffened plate models with one stiffener in each direction



있다. 實際로 많이 사용될 수 있는 model인 M5, 6, 7, 9, 12, 14에 대하여 한방향補強平板의 경우와 같이 中央에 한개의 集中荷重이 作用할 때와 均一分布荷重이 作用할 경우에 대하여 四邊固定 및 單純支持狀態에 대하여 計算을 遂行하였다.

Fig. 10의 M5, 6, 7, 8과 같이 橫方向 補強材의 位置를 調整하고 從方向 補強材를 1/8씩 偏心시켰을 경우 各荷重狀態와 境界條件에 대한 偏心率別 補強平板 中央點에서의 처짐량을 單純支持된 M5에 均一分布荷重이 作用할 때를 基準으로 無次元化 하면 Fig. 11과 같고, Fig. 10의 M9, 12, 14와 같이 從橫 두 방향의 補強材가 同時에 1/8씩 偏心된 경우의 처짐량을 역시 單純支持된 M5에 均一分布荷重이 作用할 때를 基準으로 無次元化해 보면 中央點에서의 처짐은 Fig. 12와 같게 된다

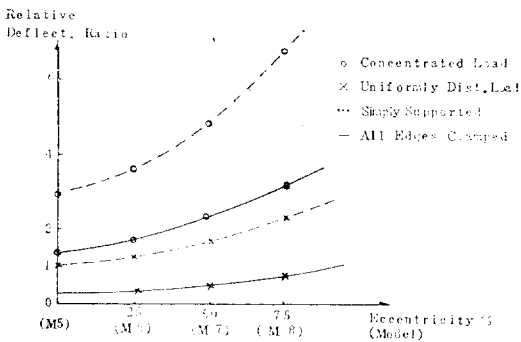


Fig. 11. Relative central deflection ratio of stiffened plates with one stiffener in each direction (M5~M8)

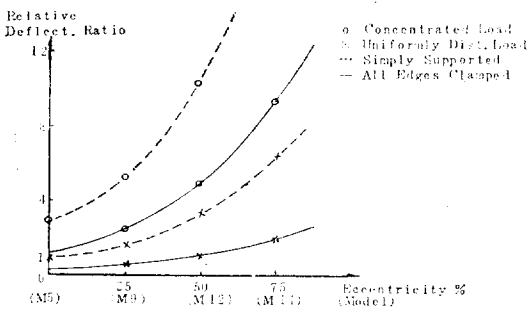


Fig. 12. Relative central deflection ratio of stiffened plates with one stiffener in each direction (M5, 9, 12, 14)

한 방향 補強의 경우와 같이 model M5(偏心率 0)의 四邊固定 境界狀態下의 平板中央點의 처짐을 單位값으로 보았을 경우에 荷重別 M6, 7, 8 및 M9, 12, 14의 相對 처짐은 各各 Table 7, 8과 같고, 均一分布荷重이

Table 7. Relative central deflection value (M5~M8)

Model (Eccentricity)	Load Bound.		Single Concentrated	
	Simply	Clamped	Simply	Clamped
M5 (0%)	3.27	1.00	2.09	1.00
M6 (25%)	3.95	1.20	2.56	1.21
M7 (50%)	5.25	1.58	3.46	1.62
M8 (75%)	7.49	2.20	4.89	2.27

Table 8. Relative central deflection value (M5, 9, 12, 14)

Model (Eccentricity)	Load Bound.		Single Concentrated	
	Simply	Clamped	Simply	Clamped
M5 (0%)	3.27	1.00	2.10	1.00
M9 (25%)	5.52	1.68	3.60	1.70
M12(50%)	10.76	3.27	7.30	3.42
M14(75%)	20.57	6.10	14.85	6.67

Table 9. Relative central deflection value (M5~M8)

Model (Eccentricity)	Simply Supported		All Edges Clamped	
	Unifor-ly	Concen-tered	Unifor-ly	Concen-tered
M5 (0%)	1.00	2.90	1.00	4.53
M9 (25%)	1.21	3.54	1.20	5.51
M7 (50%)	1.65	4.84	1.58	7.32
M8 (75%)	2.29	6.77	2.20	10.30

Table 10. Relative central deflection value (M5, 9, 12, 14)

Model (Eccentricity)	Simply Supported		All Edges Clamped	
	Unifor-ly	Concen-tered	Unifor-ly	Concen-tered
M5 (0%)	1.00	2.90	1.00	4.53
M9 (25%)	1.69	4.98	1.68	7.69
M12(50%)	3.29	10.09	3.27	15.47
M14(75%)	6.29	20.54	6.10	30.17

작용하는 M5의 中央點 처짐을 單位값으로 보았을 때 境界條件別 M6, 7, 8 및 M9, 12, 14의 相對 처짐은 各各 Table 9, 10과 같다.

### 6. 計算結果의 考察

計算結果의 처짐량을 圖表로 나타낸 Fig.9,11,12와 偏心率이 0인 對稱補强平板의 처짐에 대해 偏心補强平板의 처짐을 相對크기로 나타낸 Table 5~10으로부터 다음과 같은 結果를 알수 있다.

#### 1. 境界條件別 比較

가. 한 방향 補强인 경우, M1,2,3,4의 單純支持狀態가 四邊固定狀態보다 均一分布荷重作用時에 처짐이 2.92, 2.93, 3.02, 3.06배 더 크고, 集中荷重의 경우 2.07, 2.09, 2.14, 2.18배 더 크다.

나. 두 방향 補强인 경우

(1) M5,6,7,8에서도 單純支持狀態가 四邊固定의 경우보다 均一分布荷重時에 3.27, 3.29, 3.32, 3.40배 처짐이 더 크고, 集中荷重時 2.09, 2.11, 2.14, 2.15 배 처짐이 더 크다.

(2) M9,12,14의 경우에도 單純支持狀態가 四邊固定의 경우보다 均一分布荷重時 3.28, 3.30, 3.37배, 集中荷重時 2.12, 2.13, 2.23배 처짐이 더 크다.

#### 2. 荷重狀態別 比較

가. 한 방향 補强인 경우

M1,2,3,4에 集中荷重이 作用할 때가 均一分布荷重時보다 單純支持狀態에서 처짐이 2.86, 2.89, 2.90, 2.91배 더 크고 四邊固定일 때는 4.02, 4.07, 4.08, 4.08배 더 크다.

나. 두 방향 補强인 경우

(1) M5,6,7,8에서도 集中荷重이 均一分布荷重의 경우보다 처짐이 單純支持狀態에서 2.90, 2.92, 2.94, 2.95배, 四邊固定狀態에서 4.53, 4.59, 4.63, 4.68배 더 크다.

(2) M9,12,14에서도 集中荷重이 均一分布荷重 보다 單純支持狀態에서 2.95, 3.06, 3.26배, 四邊固定狀態에서 4.57, 4.73, 4.94배 처짐이 더 크다.

#### 3. 偏心程度에 따른 比較

가. 集中荷重時

(1) 單純支持狀態

(가) 한방향 偏心인 경우

M1의 처짐에 대해 M2~M4의 처짐은 각각 1.41, 2.17, 3.62배 증가하고, M5에 대해 M6~M8은 각각 1.23, 1.65, 2.35배씩 증가한다.

(나) 두방향 偏心인 경우

M5의 처짐값에 대해 M9,12,14의 처짐은 각각 1.73, 3.48, 7.08배 증가한다.

(2) 四邊固定狀態

(가) 한 방향 偏心인 경우

M1의 처짐에 대해 M2~M4의 처짐은 각각 1.40, 2.10, 3.45배로 증가하고, M5의 처짐에 대해 M6~M8의 처짐은 각각 1.22, 1.62, 2.29배 증가한다.

(나) 두 방향 偏心인 경우

M5의 처짐에 대해 M9, 12,14의 처짐은 각각 1.70, 3.42, 6.67배 증가한다.

나. 分布荷重時

(1) 單純支持狀態

(가) 한 방향 偏心인 경우

M1의 처짐에 대해 M2~M4의 처짐은 각각 1.39, 2.14, 3.58배 증가하고, M5의 처짐에 대해 M6~M8의 처짐은 각각 1.21, 1.61, 2.29배 증가한다.

(나) 두방향 偏心인 경우

M5의 처짐에 대해 M9,12,14의 처짐은 각각 1.69, 3.29, 6.29배 증가한다.

(2) 4邊固定狀態

(가) 한 방향 偏心인 경우

M1의 처짐에 대해 M2~M4의 처짐은 각각 1.38, 2.07, 3.42배 증가하고, M5의 처짐에 대해 M6~M8의 처짐은 각각 1.20, 1.58, 2.20배 증가한다.

(나) 두 방향 偏心인 경우

M5의 처짐에 대해 M9,12,14의 처짐은 각각 1.68, 3.27, 6.10배 증가한다.

### 7. 結 論

가. 한 방향 偏心補强 및 두 방향 偏心補强的 경우 다같이 單純支持狀態가 四邊固定狀態보다, 均一分布荷重의 경우 2.9~3.4배, 集中荷重의 경우 2.07~2.23 배 처짐이 크다.

나. 한 방향 偏心補强과 두 방향 偏心補强時 다같이 集中荷重狀態가 均一分布荷重狀態보다 單純支持時에 2.86~3.26배, 四邊固定時에 4.02~4.94배 처짐이 더 크다.

다. 偏心量이 한 방향으로 한邊 길이의 1/8이 되었을 때의 처짐량은 한 방향 補强平板에서 1.4배, 두 방향 補强平板에서 1.2~1.7배씩 偏心이 없는 경우보다 증가하며, 한邊 길이의 1/4이 偏心되었을 때 各各 2.1배, 1.6~3.0배씩 증가하여 처짐(따라서 應力)에 대한 偏心效果가 얼마나 큰가를 말해준다.

라. 結論 다에서 알 수 있는 바와 같이 補强材의 偏心率이 커지면 클수록 補强效果는 減少되고 있어 補强

材는 可能한 限 對稱으로 붙이는 것이 좋고, 偏心일 경우에는 補強材의 寸수를 相當히 크게할 必要가 있다.

다. 補強材가 偏心으로 붙었을 경우에는 理論的인 解析解가 없으므로 解析解와의 比較는 不可能하다. 따라서 計算值의 正確度는 實驗結果에 依存할 수 밖에 없으나 時間적인 制約으로 謄미않아 實驗을 行하지 못한 것을 유감으로 생각하며 次後 계산법위의 확장과 아울러 실험결과와 比較檢討하러 한다.

참 고 문 헌

1. H.A. Schade, "The Effective Breadth of Stiffened Plating Under Bending Load", SNAME annual meeting, 1951.
2. M.T. Huber, "Biegungsprobleme eines durch Querrippen versteiften orthotropen Plattenstreifens", Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics, Zurich, 1926.
3. A.W. Wegmuller, "Finite Element Analysis of Plates and Eccentrically Stiffened Plates", Fritz Engineering Lab., PA, 1973.
4. J.G. Ergatoudis, "Iso-Parametric Finite Elements in Two- and Three-Dimensional Analysis", Ph.D. Dissertation, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
5. S. Timoshenko, S. Woinsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, New York, 1955.

6. 川井忠彦, 川島矩郎, 三本本茂夫, "薄板構造解析" 컴퓨터による構造工學講座 II-7-A, 培風館.
7. A. Razzague, "Finite Element Analysis of Plates and Shells", Ph.D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1972.
8. R. Sziland, "Theory and Analysis of Plates", Prentice-Hall, 1974.
9. 鷺津久一郎, "Energy 原理入門," 컴퓨터による構造工學講座 I-3-B, 培風館.
10. M.S. Troitsky, "Stiffened Plate", Elsevier Scientific Pub. Co., Amsterdam, 1976.
11. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, 1977.
12. E. Hinton, D.R.J. Owen, "An Introduction to Finite Element Computation", Pineridge Press, Swansea, 1979.
13. S. Timoshenko, J.M. Gere, "Mechanics of Materials", Van Nostrand Co. New York, 1972.
14. K.J. Bathe, E.L. Wilson, "Numerical Method in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1976.
15. M.P. Rossow, A.K. Ibrahimkhail, "Constraint Method Analysis of Stiffened Plates", Computer & Structure, Vol. 8, 1976.
16. H.C. Martin, "Introduction to Matrix Method of Structural Analysis", McGraw-Hill, New York, 1966.