

論 文

大韓造船學會誌
第17卷 第1號 1980年 3月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 17, No. 1, March 1980

橫荷重을 받는 船殼板의 非線形 解析

任 尙 鏞* · 梁 永 淳*

Nonlinear Analysis of Ship Plating under Lateral Loads.

S. J. Yim*, Y. S. Yang*

Abstract

The nonlinear analysis of ship plating with flat bar stiffeners has been carried out by the finite element method based on the load incremental approach.

The large deflection analysis has been done by using the Lagrangian description. The elasto-plastic analysis has been performed by adopting the flow theory of plasticity and the von Mises yield condition. The layered elements are used to show the process of yielding through the plate thickness in the elasto-plastic analysis.

The following results are obtained;

1) According to the large deflection analysis, it is shown that the small deflection theory to the plate is applicable in the range of the lateral deflection—the plate thickness ratio $w/h \leq 0.3$ and ship plating in the range of $w/h \leq 0.5$.

2) By means of the elasto-plastic analysis, it is found that the maximum load-carrying capacity of the plate increases as much as 1.8 times of the initial yield load in the case of the simply supported condition and 2.2 times in the clamped condition. It is also shown that the maximum load-carrying capacity of ship plating increases as much as 4.3 times in the simply supported condition and 4.2 times in the clamped condition.

This method would be applied and extended to solve combined nonlinear problems which involve both material nonlinearity and geometric nonlinearity.

1. 序 論

船殼은 補剛된 板殼으로 이루어진 하나의 構造物이며, 船體의 外板은 補剛材에 의해 支拂되고 있다. 따라서 船殼板이란 平板과 補剛材로 構成된 一種의 薄板 構造物이라 볼 수 있다. 一般의 薄板構造物은 船舶뿐만 아니라, 航空機, 橋樑에서 이미 오래 前부터 廣範圍하게 使用되어 왔기 때문에, 이에 關한 研究가 상당히 이루어져 왔으나, 주로 便宜上 彈性限度內에서 線形解析을 해 오고 있었다. 그러나 처짐이 板 두께 程度가 되면 彈性解析에 의한 結果와 상당히 다르게 되며, 또한 鋼材나 알루미늄 같은 延性材料의 構造物에

서는 彈性解析에 의한 比例限度荷重 보다 더 큰 荷重을 감당할 수 있다. 따라서 設計者로서는 彈性解析보다 더 큰 許容荷重值를 設計에 使用할 수 있기 위하여 非線形 解析이 必要하게 된다.

특히 平板의 경우, 大變形問題는 1910年 von Kármán에 의해 提起된 以來, Levy[1]가 1942年 級數展開에 의해 解析하였으나, 이러한 解析의 方法[2]에 의해서는 그 形狀이나 境界條件 및 荷重條件이 比較的 간단한 경우에만 可能하였기 때문에 效果의 差이 지지 못하였다. 따라서 實驗에 依存하는 경우가 많으나, 實驗의 경우에도 理論의 境界條件의 具現이 어려운 關係로 理論値와 다른 結果를 보여주고 있었다

接受日字: 1980年 1月 25日

*正會員, 서울大學校 工科大学

그 중 1969年 Hooke와 Rawlings[3]가 행한 矩形平板의 實驗結果는 理論値와 比較의 잘 맞고 있다. 또한 最近 電子計算機의 보급과 더불어 發達해 온 數値解析法의 하나인 有限要素法을 線形解析에서 더욱 확장하여 非線形解析에까지 適用하려는 試圖가 많이 이루어져 Turner[4], Murray[5], Bergan[6]에 의해 平板의 大變形問題가 有限要素法으로 다루어 졌다.

한편 板材가 彈性限度를 넘어서까지 使用되는 경우, 構造物의 파괴나 붕괴에 대한 安全率을 確認하기 위해 非彈性解析이 必要하거, 이 非彈性解析에 의해 彈性解析에 의한 比例限度荷重보다 더 큰 最大耐荷力을 決定할 수 있다. 그래서 構造物을 設計할 때에 彈性設計法을 따르기 보다는 塑性設計法의 概念을 많이 使用해 왔으며, 점차 電子計算機가 보급되면서, 塑性理論[7][8]을 非彈性解析에 使用코자 하는 努力이 많이 傾注되어, Popov[9], Yamada[10], May[11] 등에 의해 彈塑性解析法이 開發되었다.

補剛板의 경우엔 解析의인 取扱이 거의 不可能하여 主로 다음과 같이 理想化하여 解析을 해 왔다[12], [13]. 첫째는 有勁幅의 概念을 도입하여 補剛板을 Grillage로 置換하여 보理論에 의해 解析하는 方法으로 彈性解析에서 흔히 使用해 왔다. 둘째로는 補剛板을 直交異方性を 갖는 平板으로 置換하여, Huber가 提案한 直交異方性理論에 의해 解析하는 方法을 使用해 왔다.

특히 船舶의 경우에는 1953年 Lamble[14]이 平板에 대해 大變形問題를 實驗으로 取扱한 以來, Clarkson[15] Aalami[16]에 의해 平板에 대한 大變形解析 및 塑性解析을 하여 船體構造設計에 利用할 수 있는 近似解法이 提案되었다.

지금껏 構造解析에서 다루어진 非線形問題는 거의 平板問題에 局限되었고, 補剛板의 경우에는 補剛板을 Grillage나 直交異方性板으로 置換하여 取扱한 것이 大部分이었다. 따라서 本 論文에서는 船舶構造物에서 보편적으로 使用되는 船殼板에 대해 有限要素法을 使用하여 非線形解析을 試圖하였다. 이때, 大變形問題는 大變形의 影響을 考慮하기 위해 有限變形理論을 適用한 後, 増分型 假想일의 原理[17]에 의해 平衡方程式을 도출하여 非線形解析을 하였다. 또한 彈塑性問題는 微小變形理論을 適用하여 通常의 彈性解析과 같은 方法으로 平衡方程式을 유도하여 彈塑性解析을 하였다. 이때 應力이 彈性限界를 벗어나는 지에 대한 判斷條件으로는 von Mises의 降伏條件式을 使用하였고, 降伏이 된 塑性領域에 대해서는 變形度増分理論[18]을 適用하여 塑性領域에서의 構成方程式을 求하였으며, 特

히 두께方向으로도 塑性化 되어가는 過程을 알아 보기 위해 層要素를 使用하였다.

2. 解析 理論

2.1. 大變形解析

橫荷重을 받는 薄板問題[19], [20]는 板의 應力狀態에 대한 考察 및 Kirchhoff의 假說에 의해 二次元 平面應力問題로 單純化 시킬 수 있으므로 Fig. 1과 같이 座標系를 選定하였다.

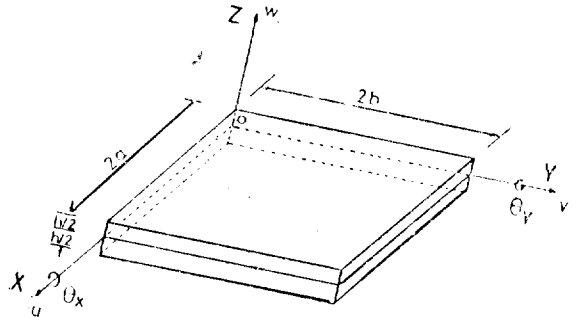


Fig. 1. Coordinate system

(가) 假 定

- ① 板은 얇고 두께는 幅과 길이에 비해 작다.
- ② Kirchhoff의 假說이 成立한다.
- ③ 처짐은 板의 두께와 같은 程度이나, 幅이나 길이에 비해 작다.
- ④ 板에 平行한 變位 u_x, u_y 는 垂直처짐에 비해 작다
- ⑤ 變形度와 變位關係式에서 u_x, u_y 의 導函數의 2次項은 垂直처짐의 勾配의 2次項에 비해 작으므로 無視한다.
- ⑥ 變形度成分이 작으므로 Hooke의 法則을 適用한다 이와같이 von Kármán의 大變形理論은 變形度와 變位關係式에서 $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ 의 2次項을 포함시킨다는 것이 微小變形理論과 다른 點이다.

(나) 基本方程式

板의 처짐이 커짐으로서 微小變形理論에서의 같이 變形前後에 대한 差異를 無視할 수 없게 된다. 따라서 이러한 差異를 考慮할 수 있는 Lagrange表示法을 適用하여 大變形問題를 다루었다. 이 때 Green strain tensor는 有限變形理論에 의해

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (1)$$

로 되는데 假定 (2), (4), (5)에 의해 Green strain tensor는 各 成分別로 다음과 같이 表示된다.

$$\left. \begin{aligned} E_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \\ E_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \\ 2E_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

이 Green strain tensor E_{ij} 에 對應하는 Kirchhoff stress tensor는 等方性材料의 경우, Hooke의 法則에 의해 다음과 같이 表示된다.

$$\left. \begin{aligned} S_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (E_{xx} + \nu E_{yy}) \\ S_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (E_{yy} + \nu E_{xx}) \\ S_{xy} &= 2GE_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

여기서 stress resultants의 intensity factor를 다음과 같이 定義하자.

$$N_x = \int_z S_{xx} dz, \quad N_y = \int_z S_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_z S_{xy} dz \quad (4)$$

$$M_x = \int_z S_{xx} z dz, \quad M_y = \int_z S_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_z S_{xy} z dz$$

한편 有限變形을 考慮한 Lagrange 表示法에서의 平衡 方程式은

$$[S_{ij}(\delta_{kj} + u_{k,j})]_{,i} + F_k = 0, \quad k=1, 2, 3 \quad (5)$$

이 되는데, 體積力가 없다고 생각하여, 이를 式(4)에서 定義된 stress resultant의 intensity factor로 表示하면 다음과 같은 平衡方程式과 適合條件式이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla^4 \omega &= \frac{1}{D} \left[q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^4 F &= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 Airy 應力函數 F 는 다음과 같이 定義되나

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

그리고 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 로서 板의 굽힘剛性을 表示하는 常數이다.

2. 2. 彈塑性解析

(가) 假 定

彈性限界를 表示하는 降伏條件 및 塑性領域에서의 構成方程式을 決定하기 위하여 다음과 같은 假定을 하였다.

- ① 材料는 均質이며 等方性이다.
- ② Bauschinger效果는 無視한다.
- ③ 材料의 特性은 時間에 對해 無關하다.
- ④ 降伏條件으로서 von Mises의 條件式을 使用한다.
- ⑤ 應力과 變形度關係에 Prandtl-Reuss의 假說을 適用한다.
- ⑥ 塑性變形에서는 體積의 變化가 없다.

⑦ 變形硬化 假說을 適用한다.

(나) 構成方程式

① 彈性領域

全變形度增分이 彈性變形度增分과 같으므로 Hooke의 法則에 의해

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

의 關係가 成立한다.

② 塑性領域

全變形度增分이 彈性變形度增分과 塑性變形度增分の 合으로 表示되므로

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_x^e \\ d\epsilon_y^e \\ d\gamma_{xy}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} \quad (9)$$

의 關係가 成立한다. 여기서 彈性變形度增分은 式(8)로 表示되고, 塑性變形度增分은 Prandtl-Reuss 假說에 의해

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ 2\tau_{xy}' \end{Bmatrix} d\lambda \quad (10)$$

로 表示되며, $d\lambda$ 는 偏差應力($\sigma_x', \sigma_y', \sigma_{xy}'$)과 塑性變形度增分사이의 比例常數이다. 또한 式(9)에서 應力增分을 求하면,

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \tau_{xy}' \end{Bmatrix} d\lambda \quad (11)$$

이 되고 von Mises의 降伏條件式과 變形硬化假說에 의해 比例常數 $d\lambda$ 를 求하면, 塑性領域에서의 構成方程式이 다음과 같이 求해진다.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (\sigma_x' + \nu\sigma_y')^2 \\ (\sigma_x' + \nu\sigma_y')(\nu\sigma_x' + \sigma_y') \\ (\sigma_x' + \nu\sigma_y')(1-\nu)\tau_{xy}' \end{Bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{SYM.} \\ (\nu\sigma_x' + \sigma_y')^2 \\ (\nu\sigma_x' + \sigma_y')(1-\nu)\tau_{xy}' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ (1-\nu)^2\tau_{xy}'^2 \end{array} \right\} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $R = \frac{4(1-\nu^2)}{9E} \bar{\sigma}^2 H' + (\sigma_x' + \nu\sigma_y')\sigma_x' + (\sigma_y' + \nu\sigma_x')$

$\sigma_y' + 2(1-\nu)\tau_{xy}'\tau_{xy}'$ 이며, $\bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$ 이다.

2.3. 増分型假想일의 原理

非線形問題는 増分理論을 適用하여 變形의 全過程을 몇 段階로 分割한 다음, 各 變形段階를 區分的으로 線形解析을 해야 한다. 따라서 通常의 構造解析에서 有用히 使用되는 假想 일의 原理를 微小區間에 適用할수 있게끔 増分型으로 表示하면 다음과 같다. 지금 平衡條件을 만족하고 있는 物體에 任意의 假想變位 δu_k 를 일으키면 Divergence定理에 의해 假想 일의 原理

$$\int_V S_{ij}\delta E_{ij}dV = \int_{S\sigma} T_k\delta u_k dS + \int_V F_k\delta u_k dV \quad (13)$$

가 얻어진다. 여기서 서로 이웃하고 있는 微小變形 區間에서 成立하는 假想 일의 原理에 増分理論을 適用하면 다음과 같은 増分型 假想 일의 原理가 얻어진다.

$$\int_V \Delta S_{ij}\delta E_{ij}^{(i-1)}dV + \int_V S_{ij}^{(i-1)}\delta \Delta E_{ij}dV = \int_{S\sigma} \Delta T_k\delta u_k dS + \int_V \Delta F_k\delta u_k dV \quad (14)$$

即, 第 i 번째 荷重増分이 決定되면, 式(14)에 의해 第 i 번째 變形段階에서 變位 및 應力의 増分量이 求해지므로 第 $(i-1)$ 번째 變形段階까지의 物理量에 이 増分量을 加함으로써 第 i 번째 變形段階까지의 物理量이 求해진다.

3. 船殼板의 非線形 解析

3.1. 概 要

船殼板의 合理的인 設計를 하기 위해선 船殼板의 力學的 學動 및 船殼板에 생기는 應力分布를 보다 正確히 알아야 한다. 特히 甲板과 같이 大變形을 考慮하여 設計를 한다든지 또는 隔壁板과 같이 材料의 部分的인 降伏이 일어나도 構造物이 機能上 아무 問題가 發生하지 않는 部材에 對한 塑性設計를 해야 할 경우에는 非線形解析이 必要하게 된다. 또한 船殼板은 Fig. 2와 같이 平板과 補剛材로 形成된 複雑한 構造物인 關係로 解析의 方法에 의해선 非線形解析은 말할 것도 없고 線形解析의 경우에도 매우 어렵게 된다. 따라서 數值解析法의 하나인 有限要素法[21]을 適用하여 船殼板의 非線形解析을 하였다. 우선 解析의 편의상, 船殼板을 平板要素와 보要素로 置換하였고, 基準座標面은 Fig. 3과 같이 平板의 中央面에 놓고 解析하였다. 또한 彈塑性 解析의 경우, 部材의 깊이 方向으로도 塑性化되어 가는 過程을 알기 위해 部材를 Fig. 3과 같이 깊이 方向으로도 等分하였다.

3.2. 平 板

平板을 有限要素로 分割할 경우, 그 形狀으로는 三

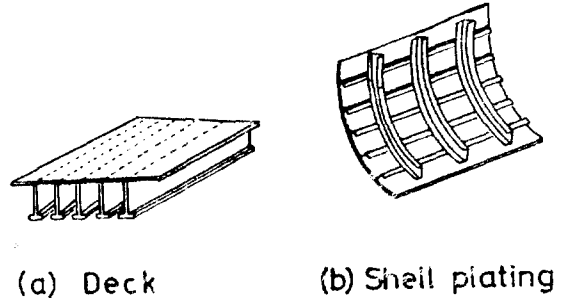


Fig. 2. Ship plating

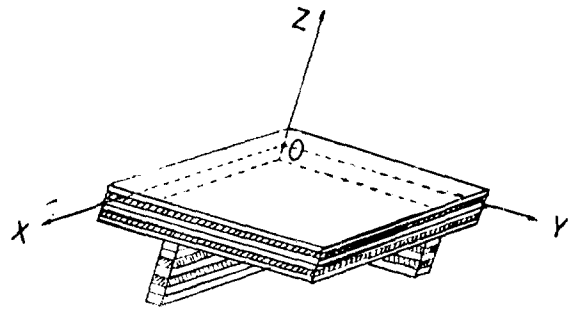


Fig. 3. Layered element for elasto-plastic analysis

角形, 長方形 및 四邊形要素(Quadrilateral Element)가 있는데, 其中 三角形要素는 他의 要素에 비해 解析精度가 多小 떨어져진 하나, 使用하는데 있어 간단하여 剛性行列을 直接計算에 의해 完全型(closed form)으로 求할 수 있고, 또한 構造物이 複雑한 形狀이라도 要素分割이 可能하다는 點에서 各 節點當 5 自由度를 갖는 三角形要素를 使用하였다.

(가) 變形度와 節點變位 關係式

有限變形을 考慮하면 Green strain tensor는 式(2)가 되므로, 이를 節點變位로 表示하기 위해 다음과 같이 變位函數를 도입하였다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^T & 0 \\ 0 & N_y^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}, \quad \{\omega\} = [M^T] \{\bar{\omega}\} \quad (15)$$

여기서 $[N]^T = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3]$ 로서 面內變位에 대한 形狀函數이고, $[M]^T$ 는 굽힘變位에 대한 形狀函數로서 個個의 形狀函數는 附錄에 실었다. 따라서 式(2)를 行列로 表記하면

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^T & 0 \\ 0 & N_y^T \\ N_y^T & N_x^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} - z \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ 2M_{xy}^T \end{bmatrix} \{\bar{\omega}\} +$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\omega}^T M_{,x} M_{,x}^T \\ \bar{\omega}^T M_{,y} M_{,y}^T \\ \bar{\omega}^T (M_{,x} M_{,y}^T + M_{,y} M_{,x}^T) \end{pmatrix} \{\bar{\omega}\}$$

$$= [B_i] \{d_i\} - z [B_0] \{d_0\} + \frac{1}{2} [B_L] \{d_0\}$$

$$= [B_i, -z B_0] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [0 \ B_L] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_0 \end{Bmatrix}$$

$$= [B_S] \{d\} + \frac{1}{2} [B_{NL}] \{d\} \quad (16)$$

이 된다. 여기서 $[B_i], [B_0]$ 는 式(16)에서 보는바와 같이 節點變位の 函數가 아니나, $[B_L]$ 은 節點變位の 函數가 되어 變形의 經路에 依存하는 非線形項이 된다.

(나) 應力과 變形度 關係式

應力増分과 變形度増分 사이의 關係式은 2.2節의 構成方程式으로부터

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \{\Delta \varepsilon\} \quad (17)$$

이 되며, 여기서 $[D]$ 는 大變形解析의 경우는 式(8)이 되고, 彈塑性解析의 경우, 等價應力이 彈性領域內에 있으면 式(8)이 되고, 彈性限界를 벗어 나면 式(12)가 된다.

(다) 剛性 方程式

非線形解析의 경우에는 앞서 言及했듯이 増分型假想일의 原理를 適用해야 하므로 變形度와 節點變位 關係式(16)을 増分型으로 表示하여 増分型 假想일의 原理에 代人하면, 左邊은

$$\int_V \Delta S_{ij} \delta E_{ij} dV + \int_V S_{ij} \delta \Delta E_{ij} dV$$

$$= \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\Delta \sigma\} dV + \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \Delta \varepsilon\} dV$$

$$= \{\delta d\}^T [K_{SS} + K_{SN} + K_{SN}^T + K_G] \{\Delta d\}$$

$$= \{\delta d\}^T [K] \{\Delta d\} \quad (18)$$

로 되고, 여기서

$$[K_{SS}] = \int_V [B_S]^T [D] [B_S] dV$$

$$[K_{SN}] = \int_V [B_S]^T [D] [B_{NL}] dV$$

$$[K_{NN}] = \int_V [B_{NL}]^T [D] [B_{NL}] dV$$

$$[K_G] = S_{xx} \int_V [M_{,x}] [M_{,x}]^T dV$$

$$+ S_{yy} \int_V [M_{,y}] [M_{,y}]^T dV + S_{xy} \int_V \{ [M_{,x}] [M_{,y}]^T + [M_{,y}] [M_{,x}]^T \} dV \quad (19)$$

로서, $[K_{SS}]$ 는 通常의 微小變形에 의한 剛性行列이고 $[K_{SN}]$ $[K_{NN}]$ 은 大變形에 의한 剛性行列이며, $[K_G]$ 는 膜應力에 의한 剛性行列로서 幾何學的 剛性行列이라 부른다. 이때, 右邊內에 있는 變位函數를 一括하여 表記하면

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^T & 0 & 0 \\ 0 & N^T & 0 \\ 0 & 0 & M^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{Bmatrix} = [\Phi] \{d\} \quad (20)$$

로 되므로, 그 右邊은

$$\int_{S_\sigma} \Delta T_i \delta u_i dS + \int_V \Delta F_i \delta u_i dV$$

$$= \int_{S_\sigma} \{\delta f\}^T [\Delta T] dS + \int_V \{\delta f\}^T [\Delta F] dV$$

$$= \{\delta d\}^T \left\{ \int_{S_\sigma} [\Phi]^T [\Delta T] dS + \int_V [\Phi]^T [\Delta F] dV \right\}$$

$$= \{\delta d\}^T [\Delta R] \quad (21)$$

이 되며, 여기서 $[\Delta R]$ 은 等價 節點荷重 vector다. 따라서 式(18)과 式(21)을 等置하면, 다음과 같은 増分型의 平衡方程式이 얻어진다.

$$[\Delta R] = [K] \{\Delta d\} \quad (22)$$

3.3. 補剛材

(가) 變形度와 節點變位 關係式

補剛材에 대해서는 通常의 보理論을 基礎로 하여 解析하였으므로 變位函數는 흔히 使用하는 變位函數를 使用하였다. 그러나 有限變形을 考慮해야 하므로 變形度와 變位關係式에서 非線形項을 포함시킨다는 것이 線形解析과 다른 點이다. 即 補剛材는 一次元 部材이므로 Green strain tensor는

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \quad (23)$$

이 되므로, 이를 節點變位로 表記하면 (24)式이 된다.

$$\{\varepsilon\} = \{E_{xx}\} = [N_{,x}^*]^T \{\bar{u}\} - z [M_{,xx}^*]^T \{\bar{\omega}\}$$

$$+ \frac{1}{2} \{ \bar{\omega}^T M_{,x}^* M_{,x}^{*T} \} \{\bar{\omega}\}$$

$$= [B_a] \{\bar{u}\} - z [B_b] \{\bar{\omega}\} + \frac{1}{2} [B_L] \{\bar{\omega}\}$$

$$= [B_a, -z B_b] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\omega} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [0, B_L] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\omega} \end{Bmatrix}$$

$$= [B_S] \{d\} + [B_{NL}] \{d\} \quad (24)$$

여기서도 平板과 마찬가지로 $[B_a]$ $[B_b]$ 는 節點變位の 函數가 아니나, $[B_L]$ 은 節點變位の 函數가 된다.

(나) 應力과 變形度 關係式

補剛材의 應力狀態를 單軸應力狀態로 假定하였으므로 式(9)에 의해

$$\{d\varepsilon_x\} = \{d\varepsilon_e^x\} + \{d\varepsilon_p^x\} = \frac{1}{E} \{d\sigma_x\} + \frac{2}{3} \{\sigma_x\} d\lambda \quad (25)$$

이 된다. 따라서

$$\{d\sigma_x\} = E \{d\varepsilon_x\} - \frac{2}{3} E \{\sigma_x\} d\lambda \quad (26)$$

가 되며, 여기서 降伏條件式과 變形硬化假說에 의해 比例常數 $d\lambda$ 를 求하면,

$$d\lambda = \frac{3E}{2\{\sigma_x\}(E+H')} \{d\varepsilon_x\} \quad (27)$$

로 되어, 塑性領域에서의 構成方程式은 다음과 같이 된다.

$$\{d\sigma_x\} = \frac{EH'}{E+H'} \{d\epsilon_x\} \quad (28)$$

여기서 H' 는 塑性變形的 기울기이다.

(다) 剛性方程式

補剛材의 剛性は 軸力에 의한 剛性和 굽힘에 의한 剛性 및 비틀림에 의한 剛性的 總으로 表示할 수 있다. 따라서 增分型 假想 일의 原理에 의하면 軸力 및 굽힘에 의한 剛性行列 $[K]$ 는

$$[K] = [K_{SS}] + [K_{SN}] + [K_{SN}]^T + [K_{NN}] + [K_G] \quad (29)$$

이 되며, 여기서

$$\begin{aligned} [K_{SS}] &= \int_V [B_S]^T [D] [B_S] dV \\ [K_{SN}] &= \int_V [B_S]^T [D] [B_{NL}] dV \\ [K_{NN}] &= \int_V [B_{NL}]^T [D] [B_{NL}] dV \\ [K_G] &= S_{xx} \int_V [M_{,x}^*] [M_{,x}^*]^T dV \end{aligned} \quad (30)$$

가 된다. 即 $[K_{SS}]$ 는 微小變形에 의한 剛性行列이며 $[K_{SN}]$ $[K_{NN}]$ 은 大變形에 의한 剛性行列이고, $[K_G]$ 가 軸力에 의한 幾何學的 剛性行列이다. 또한 비틀림에 의한 剛性は St. Venant의 비틀림만을 考慮하였으므로 비틀림 剛性行列 $[K_T]$ 는

$$[K_T] = GJ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

이 되며, GJ 는 비틀림剛性係數가 된다. 따라서 補剛材의 剛性行列은 式(29)와 式(31)을 增積하여 얻어진다.

4. 數值計算 및 考察

4.1. 프로그램 概要

一般的으로 非線形問題는 表 1과 같이 4個의 分野로 分類될 수 있는데, 本論文에서는 彈性解析, 大變形解析, 彈塑性解析의 경우에 대해 有限要素法을 使用하여 平板과 船殼板을 解析하였다.

有限要素法을 使用할 경우, 要素分割이 많아짐에 따라 大型電子計算機를 利用할 必要가 많은데, 이러한

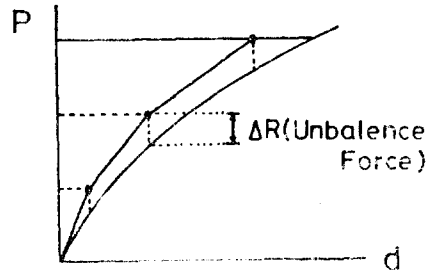
表 1. 構造力學에서 非線形問題의 分類

變位—變形 變形度關係	應力—變形 度關係	
	彈 性	塑 性
線 形	彈性解析	彈 塑 性 解 析
非 線 形	大變形解析	大變形 및 彈塑性解析

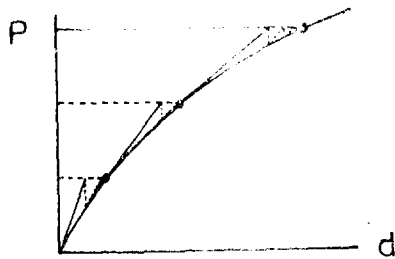
問題點을 줄이기 위해 分割法을 使用하여 中型이나 小型의 電子計算機에 의해서도 解析이 가능케 하였다.

또한 逐次 方法의 數值化過程을 일어보기 위해 逐次 方向으로 分割된 層要素(Layered Element)를 使用하였으므로 要素全體의 剛性行列은 이 層要素의 剛性行列의 總으로 表示하였다. 이때 平板의 剛性行列中, 大變形에 의한 剛性行列을 구할 때만 數值積分法에 의해 計算하였고, 나머지에 대해서는 通常의 方法처럼 完全型을 求해 計算하였다.

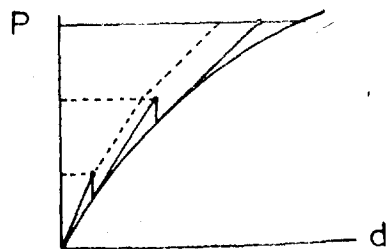
특히 非線形解析은 區分的인 線形解析을 하는 關係



(a) Basic Incremental Method



(b) Combined Incremental Method



(c) Modified Incremental Method

Fig. 4. Nonlinear solution methods

로 Fig. 4a와 같이 每段階마다 不平衡力이 생기고, 이 不平衡力에 의해 解가 眞解와 달라지게 된다.

이러한 差를 最小限으로 줄이기 위해서 Fig. 4b와 같이 荷重 vector를 修正하여 不平衡力이 없어질 때까지 계속 反復해야 한다. 그러나 本 解析에서는 Fig. 4c와 같이 이 不平衡力을 한번만 計算하여 荷重 vector를 修正하는 方法을 擇하였다.

4.2. 解析精度에 對한 考察

單純支持條件下에 均一分布荷重을 받는 正方形 板의 大變形 解析을 하여 Levy의 解析의인 結果 및 Bergan의 有限要素法에 의한 結果와 比較하였다. 그 結果로서 板의 中央點에서 荷重經路에 대한 變形過程을 Fig. 5에 圖示하였는데, 本 方法에 의한 結果는 Levy의 結果 및 Bergan의 結果와 差異를 보이고 있는데, 이는 Bergan은 三角形要素에 대한 變位함수로서 LCCT-12를 使用한데 反해, 本 方法에서는 單純한 T-9를 使用하였기 때문이라고 여겨진다. 그러나 이 程度의 差異는 工學的인 見地에서 許容되리라 생각된다. 또한 그림에서 보는 바와같이 微小變形理論에 의한 結果는 단지 板의 처짐이 두께의 0.3倍 정도 以內에서만 맞고 있음이 確認되었고, 처짐이 두께의 1倍 정도가 되면 微小變形理論으로서 실제의 問題와 상당히 다른 結果를 나타내주고 있음이 確認되었다. 그 理由는 平板의 처짐이 커짐으로 中央面에 膜應力이 發生하여 剛性을 증가시켜 板의 처짐이 微小變形理論에 의한 結果보다 더 작은 값을 갖기 때문이다.

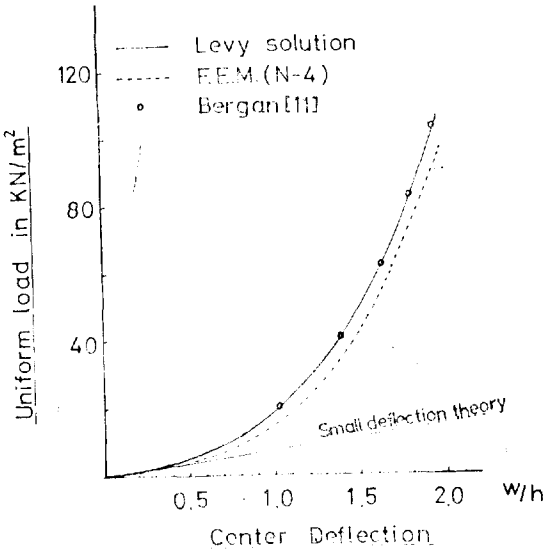


Fig. 5. Load deflection curve of simply supported square plate

이러한 膜應力을 荷重經路에 따라 굽힘應力과 比較하여 Fig. 6에 圖示하였다. 그림에서 보는바와 같이 처짐이 작으면 膜應力의 영향이 그다지 크지 않으나 처짐이 처짐 值 值으로부터 膜應力이 굽힘應力보다 커져 처짐에 상당한 影響을 주게 된다.

彈塑性解析은 比較目的上 材料의 特性은 完全彈塑性體로 假定하였고, 板은 두께 方向으로 6等分하였다.

單純支持條件下에 均一分布荷重을 받는 正方形板을 大韓造船學會誌 第17卷 第1號 1980年 3月

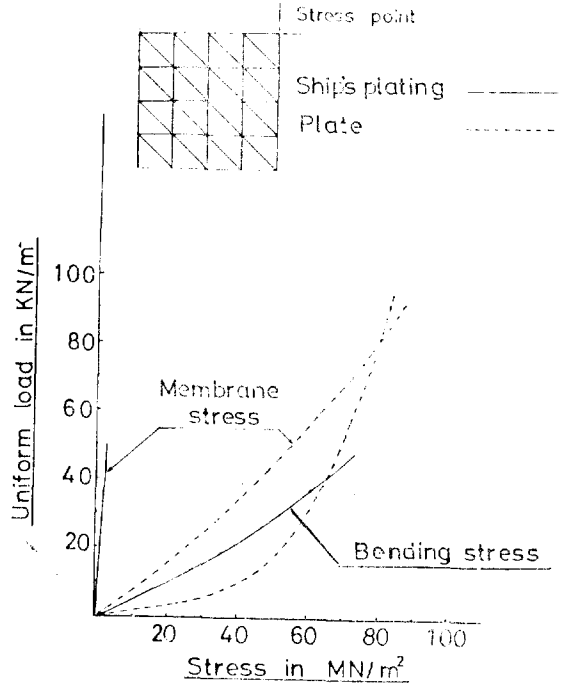


Fig. 6. Stresses in simply supported square plate

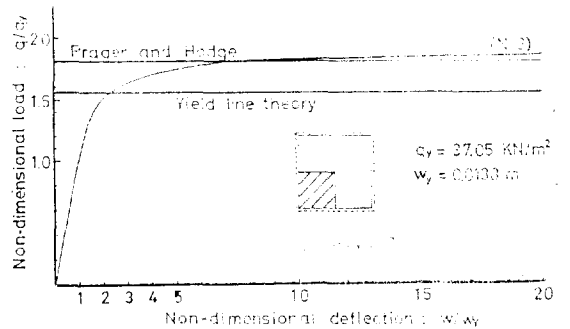


Fig. 7. Load deflection curve at center of simply supported square plate

解析하여 板의 中央點에서의 처짐을 荷重經路에 따라 Fig. 7에 圖示하였고, 塑性化過程을 Fig. 8에 보이었다.

그림에서 보는바와 같이 本 方法에 의한 結果는 極限解析法을 使用한 Prager나 Hodge[22]의 結果와 比較的 잘 맞음을 確認하였고, 塑性이 發生하여 전파되어 가는 過程도 Wegmuller[23]나 Bergan의 結果처럼 平板의 모서리에서 먼저 생겨고 다음에 中央部에 생겨서 塑性領域이 平板의 對角線方向으로 퍼져나가는 것을 確認하였다.

4.3. 數值例

解析의 편의상 平板解析의 경우와 마찬가지로 Fig. 9와 같이 단순한 形狀을 갖는 正方形板에 서로 直交하

는 補剛材가 붙어 있는 船殼板을 均一分布荷重下에 非線形 解析을 하였다.

(가) 船殼板의 大變形 解析

四邊이 單純支持條件을 갖는 船殼板에 대해 大變形 解析을 하여 같은 條件下의 平板의 大變形 解析에 의한 結果와 比較하였다.

即, Fig. 10에 荷重經路에 대한 中央點의 처짐을 圖示하여 補剛材의 影響을 高찰하였는데 그 結果는 다음과 같다. 平板의 경우엔 처짐이 板두께의 0.3倍 정도까지는 微小變形理論의 適用이 可能하며, 船殼板의 경우엔 補剛材의 影響에 의해 처짐이 板두께의 0.5倍 정도까지 微小變形理論의 적용이 可能한 것 같다. 그리고 Fig. 11에는 膜應力과 굽힘應力을 圖示하였는데, Fig. 10에서 보는바와 같이 補剛材에 의해 剛性이 增加

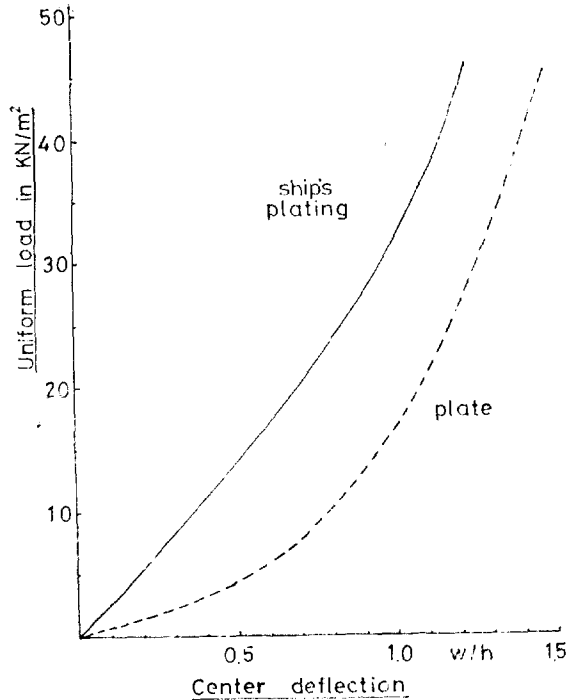


Fig. 10. Load deflection curve of simply supported ship plating

하여 처짐이 平板의 경우보다 작아지고, 이에 의해 膜應力이 平板의 경우처럼 應力分布에 커다란 影響을 주지 못한다는 것을 Fig. 11에서 알 수 있었다.

(나) 船殼板의 彈塑性 解析

두께 方向의 塑性化過程을 보이기 위해서 Fig. 9와 같이 平板은 6等分하고, 補剛材는 5等分하여 彈塑性 解析을 하였다. 單純支持條件下에 均一分布荷重을 받는 船殼板을 解析하여 荷重經路에 따른 中央點에서의 처

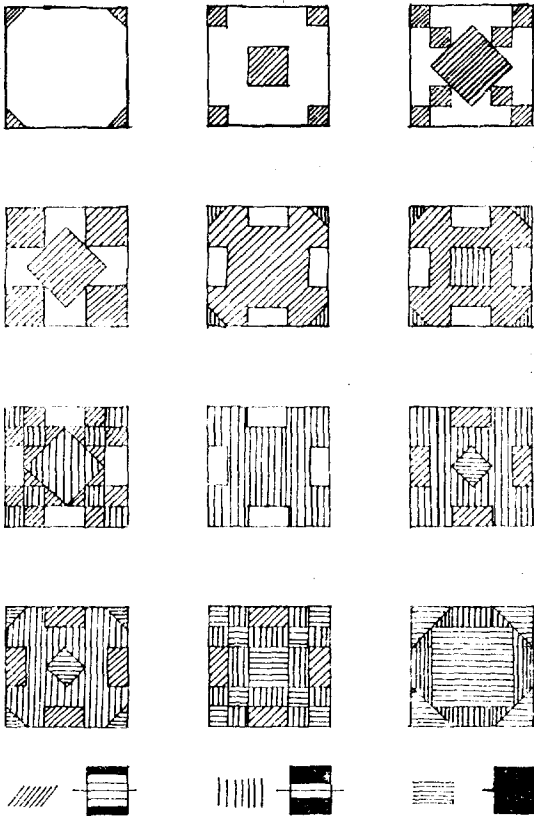


Fig. 8. Progression of yielded regions, simply supported square plate

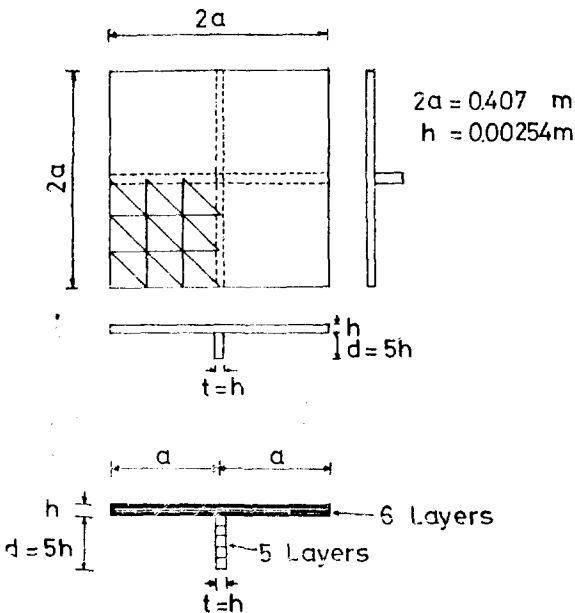


Fig. 9. Dimensions of ship plating model

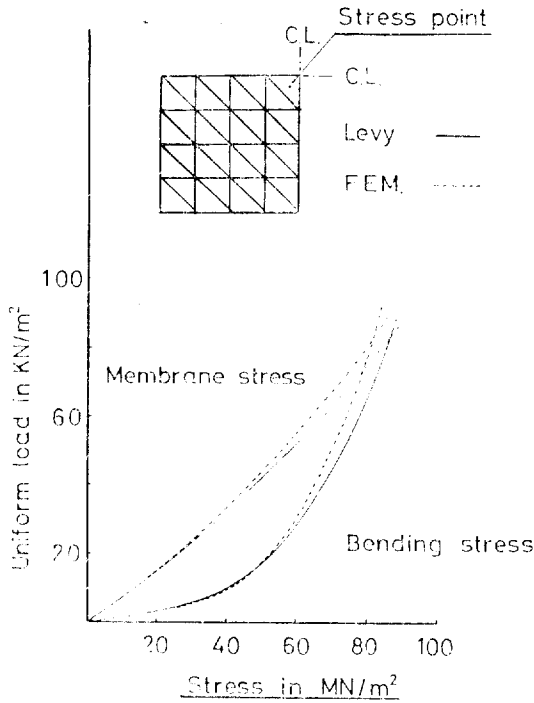


Fig. 11. Stresses in simply supported ship plating

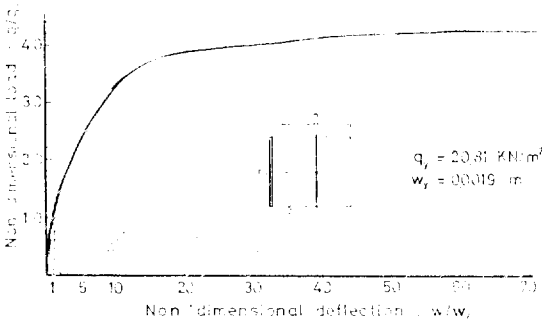


Fig. 12. Load deflection curve at center of simply supported ship's plating

값을 Fig. 12에, 塑性化過程을 Fig. 13에 圖示하였다.

本 解析에서 使用한 補剛材($t=h, d=5h$)가 붙어 있는 船殼板의 比例限度荷重과 最大耐荷力을 平板의 경우와 比較하면 表 2와 같다.

表 2. 單純支持의 경우 (單位: KN/m^2)

	比例限度荷重(q/qy)	最大耐荷力(q/qy)
平 板	37.05 (1.0)	66.69 (1.8)
船 殼 板	20.81 (1.0)	89.48 (4.3)

따라서 船殼板의 最大耐荷力이 彈性解析에 의한 比例限度荷重의 4.3倍 정도까지 증가되는 것을 알았고, 補剛材에 의해 船殼板의 最大耐荷能力이 平板의 最大耐

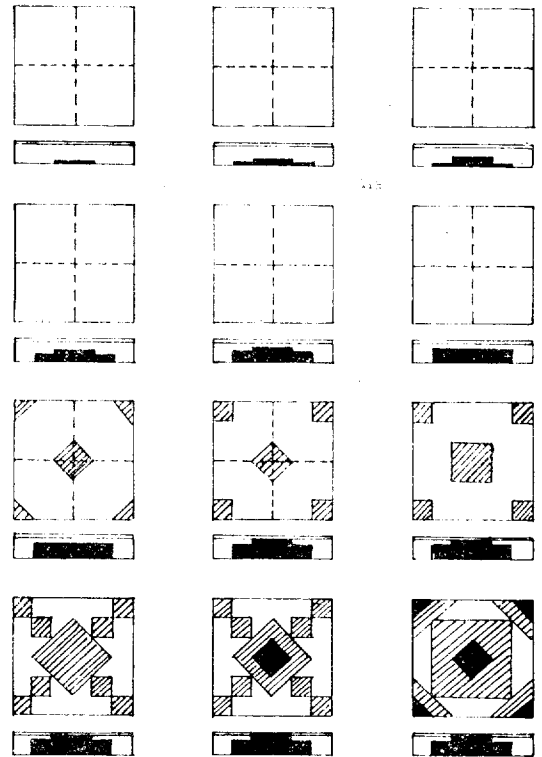


Fig. 13. Progression of yielded regions simply supported ship's plating

荷力에 비해 1.3倍정도 증가되는 것을 알 수 있었다.

5. 結 論

斷面形狀이 矩形이며, 두께가 平板두께의 1배, 길이 가 平板두께의 5배가 되는 補剛材가 平板의 中央部에 1개씩 서로 直交하게 붙어 있는 船殼板에 대해 橫荷重을 받는 경우, 有限要素法에 의해 非線形解析을 하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 一聯의 計算結果로부터 本解析에서 使用한 電算 프로그램은 船殼板의 一般的인 大變形 解析과 彈塑性 解析에 有用하게 活用될 수 있을 것이다.

(2) 大變形解析에 의하면, 平板의 경우에는 처짐이 板 두께의 0.3倍 程度까지, 船殼板의 경우에는 最小限 0.5倍 程度까지 微小變形理論의 適用이 可能한 것 같다.

(3) 彈塑性解析에 의하면, 平板의 最大耐荷力은 比例限度 荷重에 비해, 單純支持의 경우 1.8倍 程度 增加하고, 船殼板의 最大耐荷力은 比例限度荷重에 비해 單純支持의 경우 4.3倍 程度 增加되는 것을 알았다.

(4) 層要素를 使用하여 部材두께 方向의 塑性化過程을 밝혔다.

(5) 本 論文에서 使用한 方法을 더욱 확장하면, 大

變形 및 塑性이 複合된 非線形 問題를 解析할 수 있다.

附 錄

三角形 要素의 굽힘 變位에 對한 形狀函數 三角形 要素에서 굽힘 變位에 對한 形狀函數를 面積座標($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$)로 表示하면 다음과 같다.

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\zeta_1 = A_1/A, \quad \zeta_2 = A_2/A, \quad \zeta_3 = A_3/A$$

$$M_1 = \zeta_1 + \zeta_1^2\zeta_2 - \zeta_1\zeta_2^2 + \zeta_1^2\zeta_3 - \zeta_1\zeta_3^2$$

$$M_2 = -b_3(\zeta_1^2\zeta_2 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3) + b_2(\zeta_1^2\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$$

$$M_3 = -c_3(\zeta_1^2\zeta_2 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3) + c_2(\zeta_1^2\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$$

$$M_4 = \zeta_2 + \zeta_2^2\zeta_3 - \zeta_2\zeta_3^2 + \zeta_2^2\zeta_1 - \zeta_2\zeta_1^2$$

$$M_5 = -b_1(\zeta_2^2\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3) + b_3(\zeta_2^2\zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$$

$$M_6 = -c_1(\zeta_2^2\zeta_3 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3) + c_3(\zeta_2^2\zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$$

$$M_7 = \zeta_3 + \zeta_3^2\zeta_1 - \zeta_3\zeta_1^2 + \zeta_3^2\zeta_2 - \zeta_3\zeta_2^2$$

$$M_8 = -b_2(\zeta_3^2\zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3) + b_1(\zeta_3^2\zeta_2 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$$

$$M_9 = -c_2(\zeta_3^2\zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3) + b_1(\zeta_3^2\zeta_2 + \frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$$

여기서

$$b_1 = y_2 - y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2, \quad c_2 = x_1 - x_3, \quad c_3 = x_2 - x_1$$

이다.

參 考 文 獻

1. Levy, S., "Bending of Rectangular Plates with large Deflection", *NACA Technical Note*, No. 846, 1942.
2. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, New York, 1959.
3. Hooke, R. and Rawlings, B., "An Experimental Investigation of the Behavior of Clamped Rectangular, Mild Steel Plates Subjected to Uniform Transverse Pressure", *Proceedings Institution of Civil Engineers*, Vol. 42, Jan. 1969.
4. Turner, M.J., Dill, E.H., Martin, and Melosh, R.J., "Large Deflection Analysis of Complex Structures Subjected to Heating and External Loads", *Journal of the Aero/Space Sciences*, Vol. 27, Feb. 1960.
5. Murray, D.W., "Large Deflection Analysis of Plates" Ph.D. Dissertation, Univ. of Calif., Berkeley, 1966.
6. Bergan, P.G.; "Nonlinear Analysis of Plates Considering Geometric and Material Effect", Ph.D. Dissertation, Univ. of Calif., Berkeley, 1971.
7. Hill, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford Univ. Press, 1950.
8. Hodge, P.G. Jr., "Plastic Analysis of Structures", McGraw-Hill, New York, 1959.
9. Popov, E.P. and Khojeste-bakht, M.: "Analysis of Elastic-Plastic Circular Plates", *Journal of Engineering, Mechanics*. Division, ASCE, Vol. 93, No. EM6, 1967.
10. Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T., "Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 10, 1968.
11. May, G.W. and Gerstle, K.H., "Elasto-Plastic Bending of Rectangular Plates", *Journal of Structural Division* Vol. 97, No. ST7, 1971.
12. 任尙鎮, 鄭紀台: "補剛材가 붙은 平板의 解析", 工學碩士學位論文, 서울大學校, 1977.
13. Troitsky, M.S., "Stiffened Plates", Elsevier Scientific Publishing Company, 1976.
14. Lambly, J.H. and Choudhary, J.P.: "Support reactions, Stress and deflections for plates Subjected to Uniform transverse Loading", *T.I.N.A.* Vol. 95, No. 4, Oct. 1953.
15. Clarkson, J., "A New Approach to the Design of Plates to withstand Lateral pressure", *T.I.N.A.* October, 1956.
16. Aalami, B.: Large Deflection of Plates under Hydrostatic Pressure", *J.S.R.* Dec., 1972.
17. 鷲津久一郎: "彈性學의 變分原理 概論", Computerによる 構造工學講座 II-3-A, 培風館.
18. 山田嘉昭: "塑性力學", 日刊工業新聞社, 1965.
19. Fung, Y.C., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall. Inc., 1969.
20. Dym, C.L. and Shames, I.H., "Solid Mechanics, a Variational Approach", McGraw-Hill, 1973.
21. Gallagher, R.H., "Finite Element Analysis", Prentice-Hall. Inc., 1975.
22. Hodge, P.G. Jr. and Belytschko, T.: "Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates", *Transaction of A.S.M.E., Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, Dec. 1968.
23. Wegmuller, A.W., "Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Plates and Eccentrically Stiffened Plate", Ph.D. Dissertation, Lehigh Univ., 1971.