學生論文 學生欄

時 最適化 制御機構의 設計方法에 關한 比較研究

李陽範* · 金常鎭** · 指導敎授 張世勳***

要 約

이 論文은 制御信號가 理想的인 飽和特性을 갖은 制約條件下의 時不變, 線型 制御系의 時最適化 制御機構의 設計理論을 比較 研究하는데 目的을 두었다. 어떤 初期狀態에 있는 系를 特定된 最終狀態로, 最短時間內에 移行시켜 가는데 要求되는 制御機構의 設計問題는 여러해 동안 흥미있는 研究課題로 學界에 등장되었고 이러한 問題를 處理하는데에는 여러가지의 設計方法이 提案되어 왔다.

이 論文에서는 이러한 最適化 制御機構의 設計 理論中, 狀態遷移法에 의한 方法, 最大原理의 適用에 의한 方法 및 動的 프로그래밍技法에 의한 方法들을 서로 比較하며 2次系의 時最適化 設計事例에 이들을 適用시킴으로써 그 設計法上의 問題點을 比較 檢討하여 보려는데 目的을 두었다. 設計事例 2次系는 時不變, 線型인 것으로 가정하였으며, 初期狀態벡터 및 最終狀態벡터는 모두 特定된 값으로 指定되고 制御信號는 理想的인 포화特性으로 制約받으며 스윗칭 時間이 有限크기가 아닌 正規型인 경우에 限定시켜 다루었다. 어느 設計理論을 適用시키나 時最適化를 위한 制御則은 斷續制御方式으로 結果되었으나, 時最適化 問題의 特殊性때문에 最大原理 및 動的 프로그래밍技法의 適用事例에서는 自然境界條件 및 Transversality 條件등이 스윗칭時間 또는 最終時間을 直接 결정하여 주는 關鍵은 되지 못하였으며 系統의 狀態方程式 또는 補助狀態方程式을 拘束制約된 兩端狀態量을 만족하도록 最適制御則을 適用하여 풂으로써 스윗칭時間과 最終時間이 얻어진다. 따라서 어느 한가지 方法의 適用만으로는 數學的인 處理上의 애로는 피할길이 없었으며 Hamiltonian函數의 變化性質을 補助的으로 活用하여 가면 이러한 번거로움이 덜하여 지긴하나 다루는 系統의 次數가 높을 수록 이러한 數値解를 얻기위한 번거로움은 여간한 險路가 아닌 것으로 생각된다. 結論的으로 이러한 時最適化問題의 設計에는 몇가지의 混用適用이 바람직하다고 結論된다.

차 례

*正會員 : 漢陽大 大學院 博士過程
**正會員 : 漢陽大 大學院 碩士過程
***正會員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 敎授 · 工博

接受日字 : 1979年 12月 7日

1. 序 論

1.1 時最適化 問題의 概要

近代 最適制御理論에서 한 初期狀態에 있는 系統을 最短時間에 다른 最終狀態$X(tf)$로 狀態量을 移行시켜가는데 必要한 時最適化 制御機構의 設計問題는 여러해 동안 學界의 관심과 흥미꺼리로 등장되었으며 이러한 時最適化 制御機構는 產業界에서의 여러 生產工程制御, 宇宙船 또는 航空機의 飛行軌道, 飛行姿勢의 制御, 交通量의 制御, 化學處理過程에서의 工程制御, 通信과관련된 制御 問題등 많은 制御機構에 채택 活用되어 진다.

制御信號의 크기가 포화특성으로 制約된 條件下에서의 2次 線型系의 時最適化 問題는 1943年 Doll에 의해 처음 提案되었고, 1950年에 McDonald가 여러가지

의 2次 線型系의 時 最適化 問題의 實際的인 事例를 提示하였고, 1950年에 Hestenes, 1952年에 Bushaw에 의해 時 最適化 問題가 理論的으로 究明되었다. 이때 까지만 하여도 時最適化를 위한 必要條件이 理論的으로 究明받지 못하였으나 1956年에 Pontryagin이 最大原理를 발표하면서 부터 制御信號가 포화특성으로 制約받았을 때의 時最適化를 위한 制御則을 밝혀내는데 必要한 必要條件의 究明理論이 確立되었고 그후 Bellman등 여러사람에 의해 時 最適化 制御問題가 硏究되어 왔다.

오늘날까지 時 最適化를 위한 制御機構의 計設問題를 다루는데에는 흔히

1. 狀態遷移法에 의한 方法
2. 最大原理의 適用에 의한 方法
3. 動的 프로그래밍技法에 의한 方法

등으로 大別할 수 있는데 이 論文에서는 이들 理論을 포화制御信號를 갖는 時不變, 線型 制御系의 時 最適化 制御機構의 設計에 適用시켜 가면서 이들 設計理論을 比較 檢討하여 보려는데 目的을 두었다.

이 論文에서는 다음과 같은 가정을 두어, 다루는 系統을 制限하였다.

1. 事例對象의 2次系는 時不變, 線型인 것으로 가정하며 時遲延要素는 포함하지 아니한다.
2. 初期狀態 및 最終狀態는 모두 特定된 값으로 指定된 固定兩端 狀態量 問題 즉 모든 $X(0)$ 및 $X(t_f)$의 값이 固定된 경우만을 생각하며
3. 制御信號는 그 크기가 理想的인 포화특성으로 制約되며
4. 스윗칭時間이 有限크기가 아닌 正規型인 것으로 가정하며
5. 特異性問題(singular problem)는 고려하지 않았다.

1.2 時最適化 問題의 一般類型

時最適制御問題는 數式的으로 다음과 같이 표현된다

지금 n次 時遲延系의 動特性이 다음과 같이 特性化 되었다고 생각한다.

$$\dot{X}(t)=f[(x(t),\ m(t),\ t)] \tag{1}$$

여기서 $x(t)$는 $[n\times 1]$ 次元의 狀態벡터, $m(t)$는 $[r\times 1]$ 次元의 制御벡터이다. 時最適化 問題의 一般類型은 이런 系統을 初期狀態$X(0)$에서 어떤 指定된 最終領域$S(t)$로 最短時間內에 移行시켜 가는데 必要한 許用 制御量(admissible control effort)을 찾아내는 일에 귀착된다. 따라서 最適化를 위한 最適制御機能의 評價尺度는

$$J=\int_{t_0}^{t_f} dt=t_f-t_0 \tag{2}$$

로 표시되며, 이 評價函數의 極少化를 위한 制御量을 찾아내는 일에 귀착된다. 制御量은 一般的으로 그 크기가 다음과 같은 포화특성을 갖도록 拘束制約된다.

$$|m_i(t)|\leq 1 \quad i=1,2,\cdots,r \tag{3}$$
$$t\in[t_0, t^*]$$

最終時間 t_f에서 到達되기를 바라는 最終狀態量의 到達領域(target set)의 형태에 따라서 時最適化 問題는 다음과 같이 몇가지의 類型으로 分類된다.

1. 最終端狀態量의 一部 또는 全部가 특정된 값을 갖도록 指定된 경우 즉,

$$X_i(t_f)=X_{if} \quad i=1,2,\cdots,q$$

여기서 $q\leq n$

2. 最終端狀態量의 一部 또는 全部가 時間에 따라 移動되는 點 $\theta(t)$上에 오도록 制約되는 경우
3. 最終端狀態量의 一部 또는 全部가 $M[X(t,)t)]=0$로 정의되는 曲面上에 오도록 制約되는 경우
4. 最終端狀態量의 一部 또는 全部가 時間에 따라 移動하는 曲面 $M[X(t),t]=0$를 만족하는 移動曲面上에 오도록 制約 되는 경우
5. 最終端狀態量의 一部 또는 全部가 앞의 4가지 경우의 복합표현으로 되는 경우

만일 다루는 系統이 時不變이면서, 線型인 경우, 狀態方程式은

$$\dot{X}=AX(t)+Dm(t) \tag{4}$$

로 표시된다. 여기서 A는 $[n\times n]$의 係數行列, D는 $[n\times r]$의 驅動行列이다. 이러한 制御對象의 時最適化 問題는 Bellman등에 의하여 다음과 같이 基本制御原則이 밝혀졌다.[7]

1. 만일 行列A의 모든 固有值가 負의 實數部를 갖고 있으면 이 系統을 任意의 初期狀態 $X(0)$에서 最終狀態 $X(t_f)=0$로 移行시킬 수 있는 最適制御則이 반듯이 존재하며, 또한 이 制御則은 單一하다.
2. 만일 A의 모든 固有值가 實數이고 또한 單一한 最適制御則이 존재한다면 各 制御量은 많아서 $(n-1)$회 스윗칭하는 bang-bang型 制御이다.

2. 適用理論의 比較

2.1 狀態遷移法에 의한 時 最適化設計 理論[1,2,4,5,8]

식(4)의 解는

$$X(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t,\tau)D(\tau)m(\tau)d\tau \tag{5}$$

여기서 $\Phi(t,\tau)$는 系統의 遷移行列이고, $t=t_f$에서의 最終狀態벡터 $x(t_f)$는 다음과 같이 얻어진다.

$$x^d(t_f)=x(t_f)$$

$$=\boldsymbol{\Phi}(t_f)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_f,\tau)\boldsymbol{D}(\tau)\boldsymbol{m}(\tau)d\tau \quad (6)$$

$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)$를 식(6)에 곱하여 정리하면

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\Phi}(t_f,\tau)\boldsymbol{D}(\tau)\boldsymbol{m}(\tau)d\tau \quad (7)$$

그런데

$$\int_0^{t_f}\frac{d}{d\tau}[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{x}(\tau)]d\tau=-\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{x}(t_f) \quad (8)$$

따라서 식(7)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)-\boldsymbol{1}]\boldsymbol{x}(0)=\int_0^{t_f}\Big\{\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\Phi}(t_f,\tau)\boldsymbol{D}(\tau)\boldsymbol{m}(\tau)-\frac{d}{d\tau}[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{x}(\tau)]\Big\}d\tau \quad (9)$$

식(9)는 初期狀態 $\boldsymbol{x}(0)$에 대한 拘束條件을 나타낸다 이 條件은 最少化過程에서 식(3)를 同時에 만족하여야 한다.

Lagrange係數벡터 μ를 사용하면, 時間最少化 最適問題는 다음의 條件을 만족하는 制御벡터 $\boldsymbol{m}(t)$를 찾는 일에 귀착된다.

$$\min_{t_f\in(0,\infty)}\int_0^{t_f}\Big(1-\mu^T\Big\{\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\Phi}(t_f,\tau)\boldsymbol{D}(\tau)\boldsymbol{m}(\tau)-\frac{d}{d\tau}[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{x}(\tau)]\Big\}\Big)d\tau \quad (10)$$

즉 $\mu^T\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\Phi}(t_f,\tau)\boldsymbol{D}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)>0$ $(\mu>0)$

이것으로 부터 時 最適化를 위한 制御量$\boldsymbol{m}$는

$$\boldsymbol{m}(\tau)=|\boldsymbol{M}_i|\ S_{gn}\boldsymbol{S}(\tau) \quad (11)$$

여기서 스윗칭函數 $\boldsymbol{S}(\tau)$는

$$\boldsymbol{S}(\tau)=[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\Phi}(t_f,\tau)\boldsymbol{D}(\tau)]^T\boldsymbol{C} \quad (12)$$

또는

$$\boldsymbol{S}(\tau)=\boldsymbol{D}^T(\tau)[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\Phi}(t_f,\tau)]^T\boldsymbol{C} \quad (13)$$

여기서 $\boldsymbol{S}(\tau)$는 $r\times1$列 行列이고, $\boldsymbol{C}$는 $n\times1$列 行列이다.

S_{gn}는 다음과 같은 "符號변환"을 의미한다.

$\boldsymbol{S}(\tau)$의 k번째 要素가

零보다 크면 $m_k(\tau)$는 (+)

零이면 $m_k(\tau)$는 不定

零보다 적으면 $m_k(\tau)$는 (−)

制御信號는 스윗칭函數$S(\tau)$와 일치하여 符號가 바꾸어 진다. 制御벡터$\boldsymbol{m}(t)$는 拘束條件 $|m_i|\leq1$에 의해 制限되므로, 식(10)에 주어진 식의 最少化에는 $|m_i|\leq1$의 制約條件이 부가 된다. 앞의 解析은, 時 最適化 制御를 달성하는데 있어서는 制御信號 $\boldsymbol{m}(t)$가, 스윗칭函數 $\boldsymbol{S}(\tau)$의 符號에 의하여 결정되는 符號를 갖으며 그 크기는 最大값과 같게 된다는 것을 의미한다. 다른 말로 해서, 時間—最適 制御系는 bang-bang 型이다.

制御系의 係數行列 $\boldsymbol{A}$가 時不變이라면, 스윗칭函數는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{S}(\tau)=\boldsymbol{D}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(-\tau)\boldsymbol{C} \quad (14)$$

여기서 $\boldsymbol{\Phi}^T(-\tau)=e-\boldsymbol{A}^T\tau$ (15)

行列 $\boldsymbol{A}$의 固有値가 實數이고 重復되지 않을때에는 식(15)에서 轉置遷移行列의 各 要素는 $e^{\alpha_i\tau}$型의 線型 결합으로 구성되어 있을 것이므로 스윗칭函數의 j번째 구성 要素는 다음과 같다.

$$S_i(\tau)=\sum_{i=1}^{n}C_id_{ij}e^{\alpha_i\tau} \quad (16)$$

여기서 C_id_{ij}은 行列 $\boldsymbol{C}$와 $\boldsymbol{D}$의 要素이다.

앞의 結果로 부터, 最少時間 制御는 bang-bang制御라는 것이 중요하다. 最適 Controller은 上限値와 下限値사이를 스윗칭하고 이와같은 最適制御系의 設計는 거의 스윗칭時間의 결정과 그것의 기계화로 구성된다.

2.2 最大原理에 의한 時最適化 設計理論[1,2,3,4,6,10,11]

n次 制御系의 狀態方程式이 다음과 같이 표현되었다고 생각한다.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{F}(x,t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{m}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t) \quad (17)$$

여기서 $\boldsymbol{x}$는 $[n\times1]$狀態벡터, $\boldsymbol{m}$는 $[r\times1]$ 制御벡터이다.

일반적으로 時最適化 問題를 最大原理에 의해 다루는데는 擴張된 狀態空間 座標系를 사용함이 간편하다.

지금 $(n+1)$번째의 새로운 狀態變數 X_{n+1}을

$$X_{n+1}(t)=\int_{t0}^{t}dt \quad (18)$$

라고 정의하면 時最適化 問題는 다음과 같이 바꾸어 표현된다.

$$\dot{X}_f=\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x},t)+\sum_{j=1}^{r}d_{ij}m_j\quad i=1,2,\cdots,n \quad (19)$$

$$\dot{X}_{n+1}=1$$

로 特性化되는 制御系를 $(n+1)$번째 狀態變數의 값을 最少化 시키면서 系統을 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$인 初期狀態에서 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$로 移行시키는 制御量 $\boldsymbol{m}(t)$를 찾은 일에 귀착된다.

지금 終端 狀態變數中 v개가 特定된 制約條件을 만족하도록 다음과 같은 關係式으로 拘束되었다고 하면

$$R_k[\boldsymbol{x}(t_f)]=0\quad k=1,2,\cdots,v \quad (20)$$

綜合 Pontryagin函數는 아래와 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}(t_f)+\mu^T\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}(t_f)] \quad (21)$$

여기서 $\boldsymbol{b}$는

$$\boldsymbol{b}_i=0\quad i=1,2,\cdots,n \quad (22)$$

$$\boldsymbol{b}_{n+1}=1$$

을 要素로 하는 列벡터이며 μ는 다음과 같이 Lagrange 係數로 이루워지는 列벡터이다.

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mu_n\end{pmatrix} \quad (23)$$

最大原理에 의하면 식(21)의 Pontryagin函數를 極少化 시키는 制御벡터 $\boldsymbol{m}(t)$를 찾는 일은 Hamilton函數

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, t) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_j = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{f} \tag{24}$$

를 極大化 시키는 $\boldsymbol{m}(t)$를 찾는 일에 귀착된다.

여기서 p는 補助狀態變數벡터(Co-state Variable Vector)이며 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{\boldsymbol{P}} = -\frac{\partial H}{\partial X} \tag{25}$$

또는

$$\dot{P}_i = -\sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad i=1,2,\cdots n, n+1 \tag{26}$$

이며 $P_i(t_f)$는

$$P_i(t_f) = -\left\{ b_i + \sum_{k=1}^{v} \mu_k \frac{\partial R_k}{\partial X_i(t_f)} \right. i=1,2,\cdots,n+1 \tag{27}$$

여기에서 다루려는 時最適化 問題의 경우에는 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$이 되도록 系統의 最終狀態量이 制約되었으므로

$$P = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}(t_f) + \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}(t_f)] \tag{28}$$

에서

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

따라서 Pontryagin函數는

$$P = X_{n+1}(t_f) + (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}(t_f)) \tag{29}$$

또한 이 系의 Hamilton H는

$$H = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}) = \sum_{i=1}^{n} P_i \left[\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{k=1}^{r} d_{ik} m_k \right] + P_{n+1} \tag{30}$$

따라서 制御量 $\boldsymbol{m}(t)$에 관한 Hamilton의 最大化 條件은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{k=1}^{r} d_{ik} m_k > 0 \tag{31}$$

및

$$|m_k| = M_k \tag{32}$$

또 식(31)은 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{r} m_k \sum_{i=1}^{n} P_i d_{ik} > 0 \tag{33}$$

그러므로 주어진 初期狀態를 最終平衡狀態로 系統을 移行시켜 가는데 必要한 時最適 制御量은

$$m_k = M_k Sgn \sum_{i=1}^{n} P_i d_{ik} \tag{34}$$

즉, m_k의 크기는 制御信號의 最大크기 M_k와 같으며 m_k의 符號는 補助狀態變數 P_i들의 線型 結合和로 표현되는 스윗칭 函數 $S(t)$의 符號와 일치한다.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) d_{ik}(t) \tag{35}$$

다른 말로 하면, 理想的인 포화條件의 制御信號를 갖는 時間最適化問題는 bang-bang型이라는 것이며 이 結果는 2.1項에서 얻은 結果와 일치한다. 最適 controller는 식(35)에서 주어지는 스윗칭函數에 따라서 最大値 M_k의 上限과 下限사이를 스윗칭하는 最大努力型 制御方式이 채택되어야 함을 암시한다.

이제 식 (35)의 스윗칭函數를 풀어서 스윗칭時間을 알려면 補助狀態方程式을 풀어야 된다. 식(25) 또는 식(26)에 따르면 $(n+1)$개의 補助方程式을 식(27)의 境界條件을 넣어 풀면 될 것이나 n개의 Lagrange係數가 결정될 수 없으므로 最終端 時間에서의 狀態變數의 n개 制約條件式 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$를 동시에 고려하면서 풀어나가야 되므로 결국은 $(n+1)$개의 補助狀態變數를 결정하려면 전체적으로 식(25)가 주는 $(n+1)$개의 方程式을, n개의 最終狀態變數의 制約條件式을 합한$(2n+1)$개의 式을 식(26)의 $(n+1)$개의 境界値를 써서 풀어야 한다.

이것은 결국은 다음의 $(2n+1)$개의 一階微分方程式을 2點 境界値 問題로 풀어야 됨을 시사한다.

즉,

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}) = \sum_{j=1}^{n} P_j f_j \tag{36}$$

이것을 P_i 및 X_i에 관해 미분하면

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{t}) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{37}$$

및

$$\frac{\partial H}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial f_i}{\partial X_i} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{38}$$

따라서 系統의 狀態方程式 및 補助狀態 方程式은

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \qquad i=1,2,\cdots n \tag{39}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial X_i} \qquad i=1,2,\cdots,n+1 \tag{40}$$

이 $(2n+1)$개의 미분방정식을 푸는데 必要한 境界條件은

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{X}(0) = X_0 \\ \boldsymbol{X}(t_f) = 0 \\ \boldsymbol{P}(t_f) = \mu \\ \dot{\boldsymbol{P}}_{n+1} = 0 \end{array} \right\} \tag{41}$$

그러므로 $P_{n+1}(t_f) = -1 \quad P_{n+1}(t) = -1$이다.

2.3 動的 프로그래밍技法에 의한 時最適化 設計 理論[1,2,4,6,7,12]

制御系의 動特性이 다음과 같이 벡터微分方程式으로

표현되었다고 생각한다.

$$\dot{X}=q(x,m,t) \tag{42}$$

지금

$$f(x,t)=\min\int_t^{t_f}dt=\min(t_f-t) \tag{43}$$

가 最適 制御量 印加下에 制御系를 初期狀態 $x(t_0)=x_0$에서 最終 制御狀態 $x(t_f)=0$로 最短時間內에 移行시키는데 소요되는 時間函數라고 생각하면 動的 프로그래밍에서의 最適原理에 따르면 이것을 다음과 같이 汎函數관계로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}f(x,t)&=\min_m\left\{\int_t^{t+\Delta}dt+\int_{t+\Delta}^{t_f}dt\right\}\\&=\min_m\left\{\Delta+f(x+\dot{x}\Delta,t+\Delta)\right\}\end{aligned} \tag{44}$$

$f(x+\dot{x}\Delta,t+\Delta)$ 函數를 $f(x,t)$ 근방에서 Tayler 級數로 展開하고 Δ의 2次項 以上을 무시하면 다음과 같은 관계식이 얻어진다. 즉,

$$\begin{aligned}f(x,t)&=\min_m\left\{\Delta+f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Delta+\cdots\right\}\\&=\min_m\left\{\Delta+f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}g(x,m,t)\Delta\right.\\&\qquad\left.+\epsilon(\Delta)\right\}\end{aligned} \tag{45}$$

또는 $f(x,t)$를 이항하여 윗 式을 정리하면

$$\min_m\left\{\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}g(x,x,t)\Delta+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta+\epsilon(\Delta)\right\}=0 \tag{46}$$

Δ를 매우 적게 잡으면 極限에 가서 위의 관계식은

$$\min_m\left\{\frac{\partial f}{\partial x}g(x,m,t)+\frac{\partial f}{\partial t}+1\right\}=0 \tag{47}$$

와 같이 표현된다. 이제 m에 관한 위 관계의 極限條件을 찾으면

$$\frac{\partial}{\partial m}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}g(x,m,t)\right\}=\frac{\partial g(x,m,t)}{\partial m}\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{48}$$

의 r個의 極値化를 위한 條件式이 얻어진다. 만일 m가 이 最適制御量이 되게끔 선정되었다면 식(47)에서 다음의 관계식이 얻어진다.

$$\frac{\partial f}{\partial x}g(x,m,t)+\frac{\partial f}{\partial t}+1=0 \tag{49}$$

윗 식을 x에 관해 偏微分하면

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)g(x,m)+\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial g(x,m)}{\partial x}+\frac{\partial g(x,m)}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial x}\right]=0 \tag{50}$$

그런데

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)g(x,m) \tag{51}$$

식(51) 및 식(48)의 결과를 쓰면 식(50)은 다음과 같은 $(\partial f/\partial x)$에 관한 Euler-Lagrange 方程式으로 바뀐다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g(x,m)}{\partial x}=0 \tag{52}$$

이것은 n개의 方程式을 줄 것이므로 다음과 같이 풀어 표현할 수가 있다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g_i}{\partial x_i}=0\quad i=1,2,\cdots,n \tag{53}$$

식(52) 또는 식(53)의 $(\partial f/\partial x_i)$에 관한 n개의 방정식과 식(42)의 n개의 狀態方程式 및 식(48)에서 주는 r개의 방정식들, 즉 $(2n+r)$개의 방정식으로 부터 $2n$개의 미지수 $\partial f/\partial x_i$ 및 x_i와 r개의 最遲 制御量 m가 얻어진다.

지금 狀態方程式이

$$\dot{X}(t)=F[x(t)]+Dm(t) \tag{54}$$

의 형태로 표현 되었다고 하면 식(47)은

$$\min_m\left\{\frac{\partial f}{\partial x}[F(x)+Dm(t)]+\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=-1 \tag{55}$$

또는 各 벡터 또는 行列의 要素로서 식(54)를 표시하면

$$\dot{X}_i=F_i(x)+\sum_{k=1}^{r}d_{ik}m_k \tag{56}$$

이므로 식(55)은

$$\min_m\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}F_i(x)+\sum_{k=1}^{r}d_{ik}m_k]+\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=-1 \tag{57}$$

따라서 最適化를 위한 m_k는 다음의 條件이 만족되어야 한다.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{r}d_{ik}m_k<0 \tag{58}$$

및

$$|m_k|=M_k \tag{59}$$

식(58)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{r}m_k\sum_{i=1}^{m}d_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}<0 \tag{60}$$

따라서 주어진 初期狀態를 最終平衡狀態로 系統을 移行시켜 가는데 必要한 時最適 制御量은

$$m_k=-M_k Sgn d_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{61}$$

따라서 스윗칭函數는

$$S_k(t)=\sum_{i=1}^{n}d_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{62}$$

最適 Controller는 식 (62)에 주어지는 스윗칭函數에 의해서 最大値M_k의 上限과 下限사이를 스윗칭한다. 따라서 理想的인 포화條件의 制御信號를 갖는 時間 最適制御系는 bang-bang型이다. 이 結果는 2.1, 2.2項의 結果와 일치한다.

3. 各 設計 理論의 比較 및 檢討

1) 狀態遷移法에 의한 時最適化 設計 ;

制御信號$m(t)$가 스윗칭函數 $S(t)$의 符號에 의하여 결정되는 符號를 가지며 그 크기는 最大값 M_k와 같게 된다는 것을 의미한다. 즉 時間最適制御系는 bang-bang型이다. 또한 다루는系의 係數行列 $\boldsymbol{A}$가 時不變일때에도 最適 Controller는 最大값 M_k의 上限과下限사이를 스윗칭하며 이와같은 最適制御系의 設計는 거의 스윗칭時間의 결정과 그것의 기계화로 구성된다.

Langrange 係數를 사용하여 最少限問題를 變分法에 의한 極大 極少化 問題로 변형시키는 方法을 시도하여 보았다. 制御系가 高次일때 이 設計法에서는 복잡한 초월방정식들을 여러개 연립시켜 풀어야 되는 번거로움이 있었다. 또한 制御系가 여러個의 制御信號를 가질 때에는 이들의 初期符號의 선택에 어려운 問題로 등장하게 된다.

2) 最大原理에 의한 時最適化 設計 ;

最適制御信號 m_k의 크기는 制御信號의 最大크기 M_k와 같으며 m_k의 符號는 補助狀態變數 P_i들의 線型 組合和로 표현되는 스윗칭函數$S(t)$의 符號와 일치한다. 다른 말로 해서, 이상적인 포화條件의 制御信號를 갖는 時間最適化 問題는 bang-bang型이라는 것이다.

一般的으로 最大原理는 系統의 最少化에 대한 必要條件을 나타낸다. 制御系가 線型이며 時不變일때에는 最大原理는 最適制御에 대한 必要 및 充分條件을 제시하여 준다.

最大原理의 應用이 拘束 制御信號를 갖는 系의 最適化 問題를 다루는 데에 局限되지 않지만, 最大原理의 適用은 一般的으로 變分法에서의 두點 境界值問題(two-point boundary-value problem)의 解를 풀어야 되는 數學的 번거로움을 갖게 된다.

3) 動的 프로그래밍技法에 의한 時最適化 設計 ;

最適 制御信號 m_k는 最大값 M_k와 같은 크기와 스윗칭函數$S_k(t)$의 符號에 의하여 결정되는 符號를 가진다는 것을 지적한다. 最適 Controller는 스윗칭函數 $\partial f/\partial x_i$에 의한 符號를 가지며 上限과 下限을 스윗칭하는 bang-bang型이다.

4. 結 論

以上과 같이 본 研究로 부터 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

1. 狀態遷移法에 의한 時最適化制御設計에서, 時最適制御信號 $m(t)$는 스윗칭函數 $S(t)$의 符號에 의하여 결정되는 符號와 最大값 M_k와 같은 크기를 갖는다. 最適 Controller는 制御信號벡터의 拘束條件이 $|m_i|\leq 1$인고로 $+1$과 -1사이를 스윗칭한다. 따라서 時間一最適 Controller는 bang-bang型이다.

2. Lagrange係數를 사용하여 最少化問題를 變分法에서에 極大, 極少化 問題로 변형시켰을 때에는 制御信號 $m(t)$는 時間간격 $(0, t_f)$에서 1번 符號가 바뀐다. 즉 $m_1(t)$는 區間$(0, t_1)$에서 $+1$, 區間(t_1, t_f)에서 -1; $m_2(t)$는 區間$(0, t_2)$에서 $+1$, 區間(t_2, t_f)에서 -1이다. 따라서 制御系가 高次일때 이 設計方法은 복잡한 초월함수방정식의 個數만큼 解가 요구되며, 制御信號가 스칼라量이 아니고 벡터量일때 이들의 初期符號의 선택이 어려운 問題로 등장한다.

3. 最大原理와 動的 프로그래밍에 의한 時最適化 制御設計에서 最適制御信號가

$m(t)=Sgn(c_2-c_{1t})=Sgn(t-1)$로 얻어진다.

이 結果로부터 다음과 같은 結論을 내릴 수 있다.

a) 應答時間을 最少化하기 위한 最適入力은 區間常數이다.

b) 最少時間動作을 위한 最適入力은 ± 1만 취한다.

c) 最少時間 動作을 위한 最適入力의 符號는 1번만 바뀐다.

이러한 結論은 포화制御信號를 갖는 時最適化 制御가 bang-bang系라는 것을 명백히 말한다.

4. 주어진 設計事例에서

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\boldsymbol{m}(t)$$

$$|m_i|\leq 1$$

$$X_{10}=1,\ X_{20}=0,\ X_1(t_f)=0,\ X_2(t_f)=0$$

를 가정했을때, 最終時間 $t_f=2\text{sec}$ 및 스윗칭時間 $t_s=1\text{sec}$가 最適解가 되었다.

5. 주어진 設計事例의 2次系는 重複된 같은 값의 固有值를 갖는 것으로 判明되었고, 狀態遷移法에 의한 設計方法은 最大原理와 動的 프로그래밍技法의 適用에 의해 最適制御則을 얻은 다음에야 스윗칭時間, 最終時間 및 狀態遷移를 구할 수 있다.

6. 이 論文에서 처럼 兩端狀態量 $X(0)$와 $X(t_f)$가모두 特定된 값으로 指定되었을 때에는, 最大原理나 動的 프로그래밍技法의 適用過程에서 自然境界條件(natural boundary condition) 또는 transversality 條件등이 스윗칭時間 t_s 最終時間 t_f를 결정하는데 直接 도움되지 못하며 系의 狀態方程式 또는 補助狀態方程式을, 얻어진 最制適御則을 適用하여 풀어야 완전한 制御機構의 設計가 매듭 지워지므로 이들 세가지 方法의 適切한 混用適用이 問題의 해결을 귀결지워 주게됨을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. J.T. Tou; "Modern Control Theory". McGraw-Hill, New York, pp.187~197, pp.225~237, pp.241~243, pp.258~259, pp.318~322, pp.335~337, (1964)
2. Lowell, B. Koppel; "Introduction to Control Theory with Applications to Process Control" Prentice-Hall, Inc Englewood Clitts, N.J. pp.68~69, pp.229~236, pp.244~253. (1968)
3. Athans and Falb; "Optimal Control", McGraw-Hill, pp.395~404, pp.507~514, pp.526~535, (1966).
4. Stanley M., Shinners; "Modern Control System Theory and Application", pp.62~84, pp.468~487, (1972).
5. Richard C. Dorf; "Modern Control System", Addiss-Wesley, pp.279~285, pp.335~345, (1970).
6. Donald E. Kirk; "Optimal control Theory", Prenti-Hall, p.30, pp.240~254, (1970).
7. Bellman, R.; "Dynamic Programming and Lagrange Multiplers", Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., Vol.42, pp.767~769, (1956).
9. Athans, M.; "Optimal Control for Linear Time-Invariant Plants", AIEE. Trans. Appl. Ind. Vol.82, pp.321~325, Jan. (1963).
10. Leitman, G; "Optimization Techniques", Academic Press Imc., New York, (1962).
11. Rezoner, L.I.; "L.S. Pontryagin's Maximum Principles in the Theory of Optimum Systems". I. II and III, Automatic Remote Control, Vol.20, pp.1288~1302, Oct. (1959). pp.1405~1421, Nov. (1959).
12. Drefus, S.E.; "Dynamic Programming and the Calculus of Variations", J. Math. Analysis Appl. Vol.1, No.2, pp.228~239, Sep. (1960).