HONAM MATHEMATICAL JOURNAL
Volume 1, Number 1, July 1979

COBORDISM의 紹介

李 起 安

ABSTRACT

Almost mathematicians wish to study on the classification of the objects within isomorphism and determination of effective and computable invariants to distinguish the isomorphism classes. In topology, the concepts of homotopy and homeomorphism are such examples.

In this lecture I shall speak of with respect to

(i) Thom's cobordism group

(ii) Cobordism category

(iii) finally, the semigroup in cobordism category is isomorphic to the Thom's cobordism group.

1. 序 論

大部分의 數學者들은 그 硏究對象들에 적당한 同値關係들을 導入하여 이 同値關係에 의하여 그 對象들을 類別하고 各類에 속한 對象들의 効果的이고 計算可能한 不變量을 셈하는데 그 目標를 둔다. Topology에서의 homotopy, homeomorphism 등이 그 代表的인 例이다.

Cobordism의 發想은 微分可能多樣體(앞으로는 單純히 多樣體라함)의 硏究에서 어떤 두개의 多樣體가 어느 하나의 多樣體의 境界가 되느냐 하는 것을 硏究하므로써 이룩되었다. 이 論文에서는 方向을 갖은 多樣體를 同境(cobordent)의 槪念으로 類別하고 이것에 加法을 주어 加群을 만들며, 이것이 좀 一般化 된 것으로 Thom's cobordism group을 定義하며 보다 一般化된 cobordism category를 設明할 것이다. 그리고 여기에서 얻은 semigroup의 特殊한 것이 Thom's group와 同型임을 證明한다.

2. 多樣體의 方向

M을 實 n次元 多樣體이라 할 때 다음이 成立함이 證明되어진다.

(i) $\forall\ x \in M\ Hg(M, M-x) = \begin{cases} 0 \ \ if\ \ n \neq q \\ R\ \ if\ \ n = q \end{cases}$

(ii) $\forall\ x \in M$, K를 x의 compact nbd., $y \in K$라하면

$$j^{y}_{k*}\colon Hg(M,\ M-K) \cong Hg(M,\ M-x)$$

이 定理의 (i)에서

$$H_n(M, M-x) \cong R$$

을 얻는바 $H_n(M, M-x)$는 생성원을 하나 갖는 自由群이다. 각 $x \in M$에 대하여 $H_n(M, M-x)$의 生成元을 w_x라 하고 그 集合 $\{w_x\}_{x \in M}$를 생각한다. 만약 各 $x \in M$에 대하여 x의 근방 N이 存在하고 $H_n(M, M-N)$의 생성원 W_N이 존재하여 모든 $x \in N$에 대하여

$$j^x_{N*}(w_N) = w_x$$

를 만족할 때 $\{w_x\}_{x \in M}$를 M의 *orientation*이라 한다. 이러한 orientation이 存在할때 이 多樣體는 orientable라 하고 여러개의 orientable 중 하나를 지적하여

$$\{M, \{w_x\}_{x \in M}\}$$

를 *oriented manifold*라 한다. 따라서 oriented manifold에는 두개의 orientation $\{w_x\}_{x \in M}$와 $\{-w_x\}_{x \in M}$를 取할 수 있다. 이때 orientation $\{w_x\}_{x \in M}$을 취한 oriented manifold을 M으로 表示하면 orientation$\{-w_x\}_{x \in M}$을 取하였을 때의 oriented manifold를 $-M$으로 表示하자.

closed manifold는 boundary가 empty이고 compact인 것을 뜻하는 것으로 定義하자. 그리고

$$\overline{\mathfrak{N}^\circ_*} = \textit{the family of all closed oriented manifolds}$$

라고 놓는다. $\mathfrak{N}^\circ_*$에 equivalence relation인 "cobordant"의 概念을 導入하자.

$V, W \in \mathfrak{N}^\circ_*$에 對하여 만약 어떤$(n+1)$次元 多樣體 X가 存在하여

$$\partial X = V \cup (-W) \text{(따라서 } V\text{와 } W\text{는 } n\text{次 多樣體)}$$

(∂X는 X의 boundary)이면 V, W는 Cobordant라 하며 $V \equiv W$로 表示하자. (여기서 $\cup$는 dzjoint union을 뜻한다)

$$\mathfrak{N}^\circ_* = \mathfrak{N}^\circ_* / \equiv$$

라 하면 空集合으로 된 多樣體를 單位元으로 하고 "$\cup$"을 加法으로 한 Abel群이 된다. 勿論 이때, $V \in \mathfrak{N}^\circ_*$에 對한 逆元은 그 自身이 된다. 왜냐하면 $V \cup (-V) = \partial(V \times [0, 1])$이기 때문이다. 이것을 *oriented cobordism group*이라 한다.

3. Thom's cobordism groups

$\overline{\mathfrak{N}_*} = \textit{the family of all closed manifolds}$ ($\overline{\mathfrak{N}_*}$의 各元에는 orientation을 생각치 않는다)

우리는 $\overline{\mathfrak{N}_*}$가 category가 되게 morphism을 다음과 같이 定義한다.

定義(cobordism class); V_0, V_1에 對하여 어떤 境界를 갖는 $n+1$次元 manifold W가 存在하여

$$\partial W = V_0 \cup V_1$$

일때 V_0와 V_1은 cobordant라 하고 $(W; V_0, V_1)$를 *smooth manifold triad*라 하자.

만약 두개의 smooth manifold triad $(W: V_0, V_1)$ 및 $(W': V_1', V_2')$가 存在한다면, 그리고

$$h: V_1 \longrightarrow V_1'$$

인 deffeomorphism (h, h^{-1}: one-one and smooth)가 存在한다면 여기에 새로운 smooth manifold triad

$$(W_n \cup W'; V_0, V_2')$$

가 存在한다.

위의 이론을 좀 더 擴張하여 다음을 定義한다. 두개의 n次元 多樣體 M_0, $M_1 \in \overline{\mathfrak{N}}^*$에 대하여

$$\exists h_0 : V_0 \longrightarrow M_0 \quad \exists h_1 : V_1 \longrightarrow M_1 \text{ (deffeomorphism)}$$

이고 smooth manifold triad (W; $V_0 V_1$)가 存在할 때 M_0에서 M_1에의 *cobordism*는 (W; $V_0, V_1; h_0, h_1$)로 定義한다.

두개의 M_0에서 M_1에의 cobordism ($W; V_0, V_1; h_0, h_1$) 및 ($W'; V_0' V_1'; h_0', h_1'$)가 存在할 때 만약 diffeomorphism

$$g : W \longrightarrow W'$$

가 다음을 만족할 때 equivalent라고 定義한다.

(i) $g|V_i : V_i \longrightarrow V_i' \quad (i=0.1)$

(ii)
$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "g|V_i"] \arrow[dr, "h_i"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "c"] & & V_i' \arrow[dl, "h_i'"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

우리는 $\overline{\mathfrak{N}}_*$에 morphism로써 cobordism class를 取한다. 이와같이 morphism을 取하였을 때 이 morphism는 다음을 만족한다.

(i) $\overline{\mathfrak{N}}^*$의 두 x M_0, M_1, M_2에 대하여 M_0에서 M_1까지의 cobordism equivalence class를 C, M_1에서 M_2까지의 cobordism equivalence class를 C'라 하면 (C'는 M_0에서 M_1까지의 cobordism class가 된다) 이 morphism의 結合에는 associative law가 成立된다.

(ii) $\forall M \in \overline{\mathfrak{N}}^*$ identity cobordism class μ_M = 다음의 equivalence class;

$$(M \times I : M \times O,\ M \times 1; p_0, p_1)(P_i(x, i) = x,\ x \in M,\ i = 0.1)$$

그렇게 되면 C를 M_1에서 M_2까지의 cobordism class라 하면

$$\tau_{M_1} C = C = \tau_{M_2}$$

가 成立한다. 이렇게 하여 $\overline{\mathfrak{N}}_*$는 category가 된 바 이것을 하나의 *cobordism category* 라고 말한다.

$\overline{\mathfrak{N}}_*$에 加法으로 disjoint union을 定義하여 준다. 그리고 다시 $\bar{\mathfrak{y}}_*$에 앞서와 같은 equivalence relation "cobordant mod 2"의 槪念을 導入한다.

$V, W \in \overline{\mathfrak{N}}_*$에 대하여 ($\dim V = \dim W = n$) 만약 경계를 갖는 $(n+1)$次元 多樣體 X가 存在하여

$\partial X=[V \cup W]_{(2)}$

일때, V,W는 *cobordant mod 2* 라고 한다. (이 mod 2는 $V \cap V=\phi(=0)$ 이라는 뜻에서 쓴다) 그리고 이것을

$V \approx W (\text{mod } 2)$

로 表示한다.

$\mathfrak{N}_* = \overline{\mathfrak{N}}_* / \approx$

라 놓으면 위 加法에서 誘導된 演算으로 Abel 群을 이룩한 바 이 group을 *Thom's unoriented cobordism group* 이라 한다. 特히 n次元 closed manifold에 의한 $\mathfrak{N}_*$의 subgroup을 n^*_v 이라하고 $[V^k]_{(2)}$, $[W^l]_{(2)}$에 對하여 $[V^k]_{(2)} \cdot [W^l]_{(2)} = [V^k \times W^l]_{(2)}$라 정의하고

$\Omega = \sum \mathfrak{N}_* n$ direcc sum)

라 놓으면 Ω는 ring이 된 바 이 ring Ω를 *Thom's unoriented cocordism sing* 이라 한다.

4. 一般的인 Cobordism Category

앞에서 정의하였던 cobordism category를 一般化하여 定義한 cobordism category를 說明하려 한다.

境界를 갖는 manifold 全體 family를 $\boldsymbol{D}$로 表示하고, 이들 manifold 사이의 寫像으로는 C^∞-class의 函數로써 boundary를 boundary로 가지가는 것만을 取하기로 한다, 이 morphism에 의하여 $\boldsymbol{D}$는 category가 된 바 이것에는 다음과 같은 성질이 있다. ($\boldsymbol{D}$는 boundary를 갖지 않는 manifold로 있다. 왜나하면 이때의 boundary는 ϕ를 갖는다고 볼 수 있기 때문이다)

(i) $\boldsymbol{D}$에는 dizjoint union으로 된 加法을 定義할 수 있고 이 경우 finite sum이 存在한다, 그외 initial object (ϕ)가 있다.

(ii) $\partial: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}$는 어느 object $X \in D$에 對하여 $\partial X = \partial X$(X의 boundary, 이것을 勿論 多樣體이고 boundary가 ϕ이다)라 정의한 functor는 additive가 된다.

(iii) $I: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}$를 identity functor라 하면 natural transfor mation $i: \partial \to I$가 존재한다.

(iv) $\partial\partial = 0(\phi)$

(v) Whitney imbeddng theorem에 의하여 모든 manifold는 적당한 Euclidean space의 submanifold와 同型이므로 $\boldsymbol{D}$는 그 subcategory로써 small category $\boldsymbol{D}_0$가 있다.

이와같은 성질로써 cobordism category $(\boldsymbol{C}, \partial, i)$를 다음과 같이 定義한다.

i) C는 initial object을 가지며 加法을 갖는 category로써 finite sum을 갖는다.

(ii) ∂: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$는 additive functor로써 $\partial\partial = 0$을 만족한다.

(iii) $I: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$를 identity functor라 할때 항시 natural transformation i-$\partial \to I$가 存在한다.

(iV) $\boldsymbol{C}$는 subcategory로써 small category $\boldsymbol{C}_0$를 갖고 $\boldsymbol{C}$의 各 object는 $\boldsymbol{C}_0$의 어떤 object와 同型이다.

Cobordism category의 하나의 例는 (D, ∂, i)이다. 지금 (C, ∂, i)를 cobordism category라 하자. **定義**: $X, Y \in C$에 對하여 C의 object U, V가 있어서

$$X + \partial U \simeq Y + \partial V$$

를 滿足한다면 X, Y는 *cobordant*라 하고 $X \approx Y$와 같이 쓴다. 이때 binary relation "$\approx$"는 equvalence relation이다.

定義: $X \in C$일 때 $\partial x = \phi$이면 (ϕ는 C의 initial object이다) X를 *closed object*라 한다. 또 C의 元X가

$$X \approx \phi$$

이면 *boundary object*라 한다.

定義(C, ∂, i)의 cobordism semigroup $\Omega(C, \partial, i)$는 C에 있는 closed object들의 全體를 cobordant인 同値關係로 類었고 여기에 C에서 誘導된 加法이 定義된 것을 말한다. 이때 다음이 成立한다.

Theorem $\Omega(D, \partial, i) \simeq \mathfrak{N}_*$

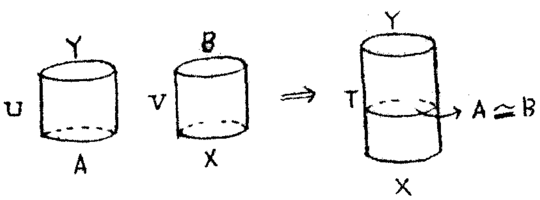
proof D에서의 closed object는 compact이고 boundary가 empty인 manifold이다. $X, Y \in \mathfrak{N}_*$에 대하여 $\partial V = X \cup Y$이면

$$X \cup \partial V \simeq Y \cup X \times 0.1$$

이므로 $X \sim Y$이다. 逆으로 $X \cup \partial U \simeq Y \cup \partial V$이면 ∂U에는 Y와 同相인 manifold가 있고 ∂V에는 X에 동상인 manifold가 있다. 나머지는 $\partial U, \partial Y$에 있는 것들끼리 同相이다. 이 同相인 $\partial U, \partial Y$의 component를 同相寫像에 依하여 이 어붙이고 이 이어붙인 manifold를 T라 하면

$$X \cup Y = \partial T$$

가 된다. 다음 그림을 참조하면



따라서 우리의 증명은 끝났다.

——全北大學學——