韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1979. 6. XVII No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1979. Vol. XVII No. 2

지수분포와 정규분포의 확률변수의 상의 분포

東國大學校 안 재 구

1. 서 론

Gamma 분포와 정규분포에 따르는 두 독립인 확률변수의 상의 분포는 J.G. Mauldon에 의하여 제기되었으나, 여기에 특성함수를 가지지 못한다는 것을 밝혔다. [3]

그러나, R. G. Laha, G.P. Steck 와 I. Kotlarski는 이러한 문제를 더 발전시켰고, I. Kotlarski는, X_0, X_1, X_2 가 세 개의 독립이고 양인 동시분포를 가진 확률변수라 하면, 이들 상인

$$Y_1=X_1/X_0, \quad Y_2=X_2/X_0$$

의 결합분포는 어떤 가정아래 동시분포에 의하여 특성지울 수 있는 것을 밝혔다.

이 논문은 지수분포와 정규분포에 관해서 위의 I. Kotlarski의 결과로 특성지워진 분포를 계산하는 데 있다.

2. 지수분포에 관하여

정리 1. X_0, X_1, X_2 를 세 개의 독립 실대칭 확률 변수이고 원점에서 다음 조건을 만족한다.

$$P(X_k=0)=0 \qquad (k=0,1,2)$$

또, Y_1, Y_2 를

$$Y_1=X_1/X_0, \quad Y_2=X_2/X_0$$

라 한다.

그러면, $X_k(k=0,1,2)$가 동시지수분포에 따를 조건은, (Y_1, Y_2)의 결합밀도함수가 다음과 같다.

$$g(y_1, y_2)=1/2(1+|y_1|+|y_2|)^3,$$
$$-\infty<y_1, y_2<\infty \tag{1}$$

증명. $\log|X_k|$의 특성함수를 $\varphi_k(t)(k=0,1,2)$라 하고, X_k의 밀도함수를

$$f_k(x)=\frac{1}{2\rho}e^{-|x|/\rho} \quad (\rho\text{는 매개변수})$$

라 한다.

또, $\varphi(t_1, t_2)$를 $(\log|Y_1|, \log|Y_2|)$의 결합특성함수라 한다. 그러면,

$$\varphi_k(t)=E(e^{it_k\log|X|})=\frac{1}{2\rho}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{it_k}e^{-|x|/\rho}dx$$
$$=\Gamma(it_k+1),$$
$$\varphi(t_1,t_2)=E(e^{i(t_1\log|Y_1|+t_2\log|Y_2|)})$$
$$=\Gamma(it_1+1)\Gamma(it_2+1)\Gamma(i(-t_1-t_2)+1)$$

한편, (Y_1, Y_2)를 밀도함수 (1)를 가지는 확률변수라 하고, $(\log|Y_1|, \log|Y_2|)$의 특성함수를 $\psi(t_1,t_2)$라 하면,

$$\psi(t_1,t_2)=E(e^{it_1\log|Y_1|+it_2\log|Y_2|})$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_1\log|y_1|+it_2\log|y_2|}$$
$$\times\frac{1}{(1+|y_1|+|y_2|)^3}dy_1dy_2$$
$$=\Gamma(it_1+1)\Gamma(it_2+1)\Gamma(i(-t_1-t_2)+1)$$

그러므로, $\psi(t_1,t_2)=\varphi(t_1,t_2)$.

정리 2. X_0, X_1을 두 개의 독립실대칭확률변수이고 원점에서 $P(X_k=0)=0 \quad (k=0,1)$이라 한다. 또,

$$U=X_1/(X_0+X_1) \tag{2}$$

라 한다.

지금 $X_k(k=0,1)$이 동시지수분포에 따른다

면, U의 분포의 밀도함수는 다음과 같다.

$$g(u)=\begin{cases}1/2 & 0\leqq u\leqq 1\\ \dfrac{1}{2(2u-1)^2} & \text{그밖}\end{cases}$$

증명. X_k의 밀도함수는,

$$f_k(x)=\frac{1}{2\rho}e^{-\frac{|x|}{\rho}},\quad -\infty<x<\infty$$

이므로, (X_0, X_1)의 결합밀도함수는,

$$f(x_0, x_1)=\frac{1}{4\rho^2}e^{-(|x_0|+|x_1|)/\rho}.$$

변환 $x_1=yx_0$의 변환을 시행하면, Jocobian이 $J=|x_0|$이므로,

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty}|x_0|f(x_0, yx_0)dx_0=\frac{1}{2(1+|y|)^2},\quad -\infty<y<\infty$$

따라서,

$$P\left(\frac{X}{X_0+X_1}\leqq u\right)=P\left(\frac{X_0}{X_1}\leqq\frac{u}{1-u}\right)$$

이므로,

$$g(u)=\frac{1}{(1-u)^2}f\left(\frac{u}{1-u}\right)=\frac{1}{2(|1-u|+|u|)^2}$$

2. 정규분포에 관하여

예비정리 [1] X_0, X_1, X_2를 세 개의 독립실대칭확률변수이라 하고, 원점에서 $P(X_k=0)=0$ $(k=0,1,2)$라 한다. Y_1, Y_2를

$$Y_1=X_1/X_0,\quad Y_2=X_2/X_0$$

이라 한다.

이때, $X_k(k=0,1,2)$가 공통표준편차 σ를 가지는 정규분포에 따를 조건은, (Y_1, Y_2)의 결합분포가 이차원 Cauchy 분포가 된다. 즉 그 결합밀도함수는,

$$g(y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+y_1^2+y_2^2)^{3/2}},\quad -\infty<y_1,\ y_2<\infty.$$

정리 3. $X_k(k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$이 $n+1$개의 독립실대칭확률변수이고 원점에서

$$P(X_k=0)=0\qquad(k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$$

이다. 또,

$$U_n=\frac{X_0+X_1+\cdots\cdots+X_{n-1}}{X_0+X_1+\cdots\cdots+X_n}\qquad(3)$$

이때, $X_k(k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$이 동시정규분포에 따른다면, U_n의 분포의 밀도함수는

$$g(u_n)=\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{(u_n-\alpha)^2+\beta^2},\quad -\infty<u_n<\infty,$$

단, $\alpha=n/(n+1)$, $\beta=\sqrt{n}/(n+1)$

증명. $Y=X_0+X_1+\cdots\cdots+X_{n-1}$의 밀도함수는, 가법정리에 의하여

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2n\pi\sigma^2}}e^{\frac{-y^2}{2n\sigma^2}}$$

이다. Y와 X_n의 결합밀도함수를 $h(y, x_n)$이라 하면,

$$h(y, x_n)=\frac{\sqrt{n}}{2n\pi\sigma^2}e^{-\frac{y^2+nx^2}{2n\sigma^2}}$$

변환 $Z=\dfrac{y}{x_n}$의 Jacobian이 $J=|x_n|$이므로 적분변환은,

$$h_1(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x_n|h(zx_n, x_n)dx_n=\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{n}}{z^2+n},\quad -\infty<z<\infty.$$

이것으로부터,

$$P\left(\frac{X_0+X_1+\cdots\cdots+X_{n-1}}{X_0+X_1+\cdots\cdots+X_n}\leqq u_n\right)=P\left(\frac{X_0+X_1+\cdots\cdots+X_{n-1}}{X_n}\leqq\frac{u_n}{1-u_n}\right)$$

이므로,

$$g(u_n)=\frac{1}{\pi}\frac{\rho}{(u_n-\alpha)^2+\beta^2},\quad -\infty<u_n<\infty$$

정리 4. X_0, X_1, X_2가 세 개의 독립실대칭확률변수라하고, 원점에서,

$$P(X_k=0)=0\qquad(k=0,1,2)$$

이라 한다. 또,

$$Y_1=\frac{X_1^2-X_0^2}{2|X_0X_1|},\quad Y_2=\frac{X_2^2-X_0^2}{2|X_0X_2|}\quad(4)$$

이라 한다.

이때, $X_k(k=0,1,2)$가 동시정규분포에 따를 조건은, (Y_1, Y_2)의 결합밀도함수가

$$f(y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{\left(1+\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)\left(1+\frac{y_2}{\sqrt{1+y_2^2}}\right)}{\{1+(y_1+\sqrt{1+y_1^2})^2+(y_2+\sqrt{1+y_2^2})^2\}^{3/2}},$$

$$-\infty < y_1,\ y_2 < \infty \qquad (5)$$

증명. X_0, X_1, X_2가 독립확률분포이고 동시 정규분포에 따른다고 하고,

$$Z_1 = X_1/X_0,\quad Z_2 = X_2/X_0$$

라 하면, (Z_1, Z_2)의 동시밀도함수는,

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{(1+z_1{}^2+z_2{}^2)^{3/2}},$$

$$-\infty < z_1,\ z_2 < \infty$$

(4)의 확률변수 Y_1, Y_2는 다음과 같이 변형 되어질 수 있다.

$$Y_1 = \frac{1}{2}\left(|Z_1| - \frac{1}{|Z_1|}\right).$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}\left(|Z_2| - \frac{1}{|Z_2|}\right).$$

따라서,

$$|Z_1| = Y_1 + \sqrt{1+Y_1^2},$$

$$|Z_2| = Y_2 + \sqrt{1+Y_2^2}.$$

이 변환의 Jacobian은,

$$J = \left(1 + \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)\left(1 + \frac{y_2}{\sqrt{1+y_2^2}}\right).$$

이것으로부터 $(Y_1,\ Y_2)$의 결합밀도함수는 (5)를 얻는다.

역으로, (Y_1, Y_2)를 밀도함수 (5)에 따라 분포되는 결합확률분포의 확률변수라 하고, X_0, X_1, X_2를 세 개의 독립실대칭확률변수이고, 원점에서, $P(X_k=0)=0(k=0,1,2)$으로서, Y_1, Y_2와 (4)에 따라 관계지워져 있다고 한다.

이때,

$$Z_1 = \frac{X_1}{X_0},\quad Z_2 = \frac{X_2}{X_0}$$

이라 두면, (Z_1, Z_2)의 결합밀도함수

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{(1+z_1{}^2+z_2{}^2)^{3/2}}$$

를 얻을 수 있고, 예비정리에 의하여, X_0, X_1, X_2는 동시정규분포가 된다.

参考文獻

[1] Kotlarski, I; On characterizing the gamma and normal distribution, *Pacific J. of Math.* Vol. 20, No. 1 (1967).

[2] ______; On charaterizing the chi-square distribution by the student law, *J. of American Stat. Ass.*, Vol. 61, No. 316 (1966)

[3] Crammer, H.; *Mathematical methods of statistics*, Princeton Univ. Press. (1946)