

## 圖形的 變換學習의 順次性 考察

釜山教育大學 朴 成 澤

目 次

- I. 問題의 陳述
- II. 理論的 背景
- III. 假說
- IV. 研究의 方法
- V. 結果 解釋
- VI. 結論 및 論議

### I. 問題의 陳述

圖形的 變換에 관한 一部 概念을 國民學校에서 指導하는 目的은 어디까지나 '數學의 本質은 그 自由性에 있다'고 한 Georg Cantor (1845~1918)의 말과 같이 抽象化 過程을 通한 變換概念의 指導가 思考力을 伸張시키는 데 必要하기 때문이다.<sup>1)</sup>

國民學校 算數科 圖形 領域의 學習內容을 크게 '圖形的 性質'과 '圖形的 變換'으로 나누고 있는 데, 金基錫이 算數科 教育 講習 受講者를 對象으로 調查한 '算數科 學習指導의 內容에 관한 調查'<sup>2)</sup>에 依하면 '圖形的 性質'에 관한 學習指導는 큰 無理없이 指導되고 있으나, '圖形的 變換'에 관해서는 國民學校 四學年 二學期 '7, 도형의 이동'에서 初步的인 指導를 하기로 되어 있는 데, 이 單元의 學習

指導에 抵抗을 받고 있는 教師가 81%로 나타나고 있었으며, 位相의 性質, 닮음 性質, 合同 性質(平行移動, 回轉移動)을 서로 別個의 것으로 보고 指導하는 教師가 87%나 되었다.

이러한 것을 생각해 볼 때, '圖形的 變換에 관한 學習指導를 어떠한 順序(一般에서 特殊와 特殊에서 一般)로 어떠한 方法(獨立的인 指導와 包含的인 指導)에 依해서 指導하는 것이 效率的 인가를 究明해 볼 必要가 있다고 본다.

一般과 特殊에 관한 心理學者들의 研究에 依하면 Piaget는 '어린이들은 보다 一般的인 것에서 부터 出發하여 차츰 特殊한 것으로 認識한다.'<sup>3)</sup>는 實驗 結果를 發表했고, Gesell, Lovell 등은 Piaget의 말과 같이 段階的으로 發達해 가는 것이 아니고 많은 어린이들에게 混在해 있다<sup>4)</sup>는 主張을 하고 있다.

國民學校에서는 一般的으로 特殊한 것에서 一般的인 것으로 指導해 나가는 것이 주되지만, 高學年에서는 逆으로 一般에서 特殊의 方向으로 나갈 것도 適意하게 考慮하지 않으면 안될 것이다<sup>5)</sup>라고 말하고 있다.

그리고, 圖形的 變換學習의 內容을 서로 別個의 것(位相, 射影, 닮음, 合同)으로 보고 指導하는 것과 包含的으로 보고 指導하는 問

1) 韓國數學教育學會, 數學教育 37호, 教學社, 1977. 6. pp.15~18.  
2) 金基錫, 算數科 學習指導의 內容에 관한 調查, 1976.  
3) 具光祖外, 現代化를 위한 算數教育, 서울, 古今文化社, 1971, p.188.  
4) 韓國數學教育學會, 새 算數教育, 서울, 雲雪出版社, 1975, p.253.  
5) 姜慶愛外, 初等算數教育, 서울, 東明社, 1964, p.158.

題에 있어서 包含的으로 指導할 것을 要求하고 있는 데<sup>6)</sup> 이 問題도 實證해 볼 必要가 있다고 본다.

따라서, 本 研究는 圖形의 變換學習을 一般의인 것에서 特殊한 것으로의 指導와 特殊한 것에서 一般의인 것으로의 指導의 關係, 그리고, 獨立的인 指導와 包含的인 指導의 關係를 밝히는 데 그 目的이 있다.

이 研究가 究明하려는 具體的인 研究問題는 다음과 같다.

첫째, 圖形의 變換學習을 一般의인 것에서 特殊한 것으로의 指導와 特殊한 것에서 一般의인 것으로의 指導에서 學力의 差가 있는가?

둘째, 圖形의 變換學習을 獨立的으로 指導하는 것과 包含的으로 指導하는 것에서 學力의 差가 있는가?

이 研究가 成就되면 圖形의 變換學習을 어떠한 順序로 어떠한 方法에 依해서 指導하는 것이 바람직한가를 示唆해 줄 것이다.

## II. 理論的인 背景

여기에서는 本 研究의 範圍를 明白히 하기 위하여 假說 및 變因抽出의 理論的 根據를 一般에서 特殊와 特殊에서 一般의 指導에 對하여 老察하고, 아울러 獨立的인 指導와 包含的인 指導의 關係에 對하여 밝히고자 한다.

1. 一般에서 特殊와 特殊에서 一般의 指導關係

스위스의 心理學者 Jean Piaget 는 어린이들의 空間認識의 發達過程을 臨床心理學的인 方法을 써서 調査한 結果 우리 文化史에 있어서의 空間認識의 發達は 유우크리트적 幾何→射影幾何→位相幾何로 發達하여 온 데 비하여 어린이의 觀念의 發達は 이와는 正反對로 位相的→射影的→아원적→유우크리트적으로 發達하고 있으며, 1,2學年 程度의 어린이의 空

間概念은 位相的이고, 3, 4學年에 가서 射影的, 5,6學年에 가서 아원적, 유우크리트적으로 되어 있다<sup>7)</sup>라는 것이다. 그래서 어린이들의 認識發達の 過程은 特殊에서 一般이 아니라 一般에서 特殊로 發達해 간다는 것이다.

그러나, Gesell, Lovell 등은 位相的, 射影的, 유우크리트적 認識은 Piaget 가 말하듯이 段階的으로 發達해 가는 것이 아니고 많은 兒童들에게 混在하고 있다<sup>8)</sup>고 말하면서 國民學校 어린이들에게는 特殊한 것에서 一般의인 것으로 指導하는 것이 더 效果的이라는 것을 主張하고 있다.

### (1) 一般에서 特殊

一般에서 特殊로의 指導는 理論的으로 分明하고 時間的으로 經濟的이라 볼 수 있다. 그러나, 이 때는 兒童이 一般的인 圖形을 처음부터 把握할 수 있는나? 없느냐? 하는 데에 問題點이 있다고 본다.

어린이들이 가지는 最初의 空間概念은 位相幾何學의 構造이며, 여기에서 出發하여 射影, 유우크리트幾何學의 空間構造로 發展하는 것이다.

따라서, 正四角形에서 直四角形, 마름모, 平行四邊形, 사다리꼴, 一般四角形의 順序(特殊→一般)는 어른들이 마음대로 定한 것이지 어린이의 認識過程과는 거리가 먼 것이다.

어린이들의 最初의 空間概念은 位相幾何學의 構造를 가진다. 그러므로 一般的인 圖形 認識에서 出發하여 漸次로 角이나 길이 등의 測度를 가지므로써 特殊한 圖形을 認識하게 되는 것이다.

이와같이 어린이들의 認識의 發達이 一般에서 特殊으로 되어가는 것이 明白한 以上 教授法도 一般에서 特殊로 指導하는 것이 科學的인 方法이 될 것이다.<sup>9)</sup>

### (2) 特殊에서 一般

6) 文敎部, 教育課程解說. 서울. 敎學圖書. 1973, p.247.

7) 새교실, 敎科運營 카운슬. 서울. 새교실出版社. 1965, p.107.

8) 數學教育研究會, 새 算數教育. 서울. 雲雪出版社. 1975, p.253.

9) 滝沢武久, 授業と認識. 東京. 明治圖書. 1962, pp.112~118.

特殊에서 一般으로의 指導는 兒童이 理解하기 쉬운 形에서 자주 볼 수 있는 單純하고 特殊한 圖形에서 一般的인 圖形으로 나아가는 것이 自然스럽다는 理由에서 온 것이다.<sup>10)</sup>

Herbart(1776~1841)學派에서는 授業過程을 提示→比較→總括의 三段階로 區分하여 特殊에서 一般的인 것에 오르도록 要求하고 있다.

敎育課程 解說에서도 兒童의 心理 發達에 따라 特殊 圖形을 出發點으로 삼아 차츰 一般으로 指導하는 것이 効果의이나, 때로는 一般에서 特殊로의 方向이 理解하기 쉬운 때는 이것을 適用하도록 하는 것이 좋다<sup>11)</sup>는 점을 밝히고 있다.

그러면, 圖形의 變換學習의 順次性에 內容을 要約해 보면 다음 두가지로 생각할 수 있다.

첫째, 一般에서 特殊로의 指導는 位相變換→射影變換→아핀變換→담음變換→合同變換을 생각할 수 있고,

둘째, 特殊에서 一般으로의 指導는 合同變換→담음變換→아핀變換→射影變換→位相變換을 생각할 수 있다.

韓國, 日本, 英國의 圖形의 變換學習에 관한 學習內容의 指導의 順次性을 調査해 보니 다음과 같았다.

• 韓國(國民學校)

位相變換→射影變換→合同變換(平行移動, 回轉移動)→담음變換

• 日本(中學校)

合同變換→담음變換→射影變換→位相變換

• 英國 S. M. P (Book 5) ... The School Mathematics Project.

位相變換→射影變換→담음變換→合同變換

• 英國 ... Nuffield Mathematics Project

合同變換→담음變換→射影變換→位相變換<sup>12)</sup>

以上에서 보는 바와 같이 各國의 圖形의 變

換에 관한 敎材 排列이 各各 다르게 構成되어 있다.

2. 獨立的인 指導와 包含的인 指導의 關係  
從來의 算數敎育에서는 敎科書의 學習內容을 아무런 關聯이 없는 別個의 것, 다른 것, 獨立的인 것으로만 받아들여 暗記式, 記憶中心의 敎育이 많았으며 그와 並行하여 이미 學習한 內容과 本時 學習內容과는 아무런 關聯이 없는 別個의 것으로 取扱되어 學習의 系統이나 體系가 흔들려 算數를 工夫할 때만 알고 몇 年 後면 잊어버리는 結果를 招來하였다.

오늘날 數學敎育 現代化에서 強調되는 統合化, 擴張化의 생각은 서로 다른 內容을 다르다고만 보지 않고 어느 觀點에서는 同一視할 수 있다는 構造化의 생각을 낳게 하였다.

包含的(擴張的) 思考의 本質은 이미 學習한 內容中 어느 屬性을 버리고 또 어느 屬性을 취할 것인가를 明確히 하는 일과 지금까지 不可能한 것을 可能하도록 하려면 어떻게 할 것인가에 着眼하는 일이다. 이러한 思考는 學習의 轉移價를 높이는 데 크게 도움이 된다.

위와 같은 생각에서 볼 때, '여러 가지 圖形의 變換을 別個의 것, 다른 것으로 區分하여 指導할 것이 아니라 어느 觀點에서 같은 것으로 볼 수 있다는 包攝關係에 依한 指導方法은 매우 바람직하다'<sup>13)</sup>라는 말을 하고 있다.

### III. 假說

#### 1. 用語의 操作的 定義

이 研究에서 使用된 用語를 操作的으로 定義한다면 다음과 같다.

#### A. 一般에서 特殊로의 指導

圖形의 變換學習을 位相變換→射影變換→담음變換→合同變換(平行移動, 回轉移動)의 順序로 하여 各 變換의 不變의 性質을 찾아 보게 하는 指導이다.

10) 敎大數學敎育研究會. 算數敎育. 서울 東明社. 1967, p.176.

11) 敎育課程 研究會. 敎育課程解說. 서울 敎學圖書. 1973, p.43.

12) 前田隆一. 算數と數學. 大阪敎育總合研究所. 1974, p.58.

13) 釜山敎育大學. 算數科敎育. 同化文化社. 1973, p.351

B. 特殊에서 一般으로의 指導

一般에서 特殊로의 指導를 逆으로 하여 合同變換(平行移動, 回轉移動)→담음變換→射影變換→位相變換의 順序로 各 變換의 不變의 性質을 찾아 보게 하는 指導이다.

C. 獨立인 指導

圖形의 變換. 즉, 合同變換(平行移動, 回轉移動), 담음變換, 射影變換, 位相變換을 서로 別個의 것으로 보고 獨立으로 指導하는 것이다.

D. 包含인 指導

位相變換의 特殊한 것이 射影變換, 射影變換의 特殊한 것이 담음變換, 담음變換의 特殊한 것이 合同變換임을 不變의 性質調査에서 알게 하고 이들 끼리의 包攝關係를 따져가는 指導이다.

2. 假說

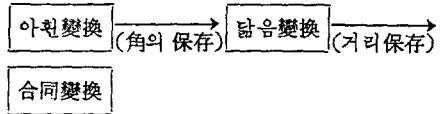
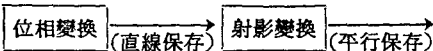
本 研究의 假說은 위의 理論的 背景과의 關聯아래 다음과 같이 導出되었다.

[假說 1] 圖形의 變換學習을 特殊에서 一般으로 指導하는 것이 一般에서 特殊로 指導하는 것보다 學習 成就度가 높을 것이다.

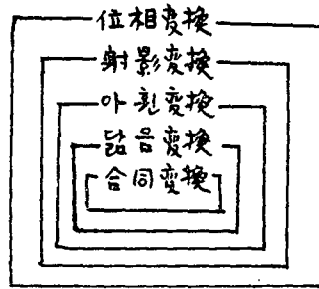
一般에서 特殊로의 指導는 兒童이 一般의인 圖形을 처음부터 把握하기 어려운 점이 많으나, 特殊에서 一般으로의 指導는 兒童이 理解하기 쉬운 신변에서 자주 볼 수 있는 單純하고 特殊한 圖形에서 一般的인 圖形으로 自然스럽게 指導되므로 여러 研究에 依해 支持된다.

[假說 2] 圖形의 變換學習을 包含的(擴張化)으로 指導하는 것이 獨立으로 指導하는 것보다 學習 成就度가 높을 것이다.

位相變換, 射影變換, 담음變換, 合同變換을 서로 別個의 것으로 보고 獨立으로 指導하는 것보다



의 理論에 따라 서로의 不變의 性質을 把握하고 包含의으로 指導하는 것이 圖形의 變換學習의 學力과 學習의 轉移價를 높일 수 있을 것이 豫測되므로 [假說 2]의 導出이 可能하다.



(圖形의 變換의 包含關係)

IV. 研究의 方法

1. 對象

本 研究의 對象은 釜山市內에 있는 B 校의 四學年 三學級中 二個 學級 120名을 다음과 같이 나누어서 實驗 研究를 한다.

(實驗對象 人員 및 區分)

區 分		實 驗 對 象 人 員	
A. 一般	男	33	60
	女	27	
B. 特殊	男	32	60
	女	28	
		A <sub>1</sub>	獨立的...男16, 女14, 計30名
		A <sub>2</sub>	包含的...男17, 女13, 計30名
		B <sub>1</sub>	獨立的...男16, 女14, 計30名
		B <sub>2</sub>	包含的...男16, 女14, 計30名

便宜上, 一般에서 特殊로의 指導를 A, 特殊에서 一般으로의 指導를 B로 하고, A의 指導를 마친 뒤 마지막 1時間 동안 獨立으로 指導하는 集團을 A<sub>1</sub>, 包含的으로 指導하는 集團을 A<sub>2</sub>, 그리고, B의 指導를 마친 뒤 마지막 1時間을 獨立으로 指導하는 集團을

B<sub>1</sub>, 包含的으로 整理指導하는 集團을 B<sub>2</sub>로 定한다.

## 2. 期 間

本 研究의 內容은 四學年 二學期 ‘7도형의 이동’으로서 二月에 指導하기로 되어 있기 때문에 이 期間에 本 研究의 實驗 授業을 實施한다.

## 3. 道具 및 測定

本 研究에서 使用된 道具는 事前 檢査로서 一般 知能을 測定하기 위한 知能檢査와 標準化 算數 學力檢査, 그리고 興味檢査이며, 實驗 後에는 圖形의 變換學習의 學力檢査와 興味檢査로서 다음과 같다.

### A. 知能檢査

李 相魯가 製作 標準化한 ‘知能診斷檢査 가型’이 使用되었다. 이 知能檢査의 特徵은 多 要因論的 解釋도 可能하게 六個 要因別로 測定되어 있으나 一般 要因論의 立場에서 製作된 檢査이다.

이 知能檢査는 A와 B의 두 集團에 實驗授業 以前에 實施하여 두 集團의 能力이 같은지를 알아보는 데 利用되었다.

### B. 學力檢査

‘코리아 테스트 센터’研究室에서 製作 標準化한 ‘標準化 새 綜合 學力檢査’의 나型 算數科가 使用되었다.

이 檢査의 特徵은 算數科에서 知識, 理解, 問題解決力의 學業成就도를 分析的으로 評價할 수 있게 한 점이다.

이 檢査는 A와 B의 두 集團에 實驗授業 以前에 實施하여 두 集團의 能力이 같은지를 알아보는 데 利用되었다.

### C. 學習 興味檢査.

李 相魯가 製作 標準化한 ‘標準化 學習 興味 診斷檢査’를 使用했다.

이 興味檢査의 特徵은 國語, 算數, 社會, 自然, 實科, 藝能으로 區分되어 있어서 興味도를 分析的으로 檢査할 수 있게 한 점이다.

이 檢査는 A와 B의 두 集團에 實驗前과

實驗後에 實施하여 興味の 變化가 있는지를 알아보는 데 이용되었다.

### D. 學力檢査

서울 教育大學 附屬 國民學校에서 製作한 ‘算數科 學習目標 到達測定을 위한 評價資料’에서 本 研究와 關聯이 있는 評價 問題만 뽑아서 實驗授業 後 A와 B의 두 集團에 實施하여 學力の 差異가 있는지를 알아보는 데 利用되었다. 그리고, 學力の 把持率(記憶率)을 알아보기 위해서 1個月 後에 學力檢査를 다시 實施해 보는 데 利用되었다.

### E. 準據檢査 結果

實驗前 A, B, 두 集團의 準據檢査의 結果는 다음과 같다.

#### (1) 標準化 知能診斷檢査 結果

區分	N	M	SD	비고
A	60	117.4(84%)	12	
B	60	118.2(85%)	12	
差異의 意義度	CR <sub>M</sub> =0.4, p>0.1 意義없다.			

〈解釋〉學年初 學級編成때, 知能과 學力을 考慮하여 差異없게 編成했기 때문에 本 檢査에서도 A, B 두 集團의 差는 CR<sub>M</sub>=0.4, p>0.1로 意義없는 差로 나타났다.

#### (2) 標準化 새 綜合 學力檢査結果(算數)

區分	N	M	SD
A	60	62(88%)	6.8
B	60	61(86%)	7.0
差異의 意義度	CR <sub>M</sub> =0.8, p>0.1 意義없다.		

〈解釋〉A, B 두 集團의 算數科 學力檢査의 差는 CR<sub>M</sub>=0.8, p>0.1로 意義없는 差로 나타났다.

#### (3) 標準化 學習 興味 診斷檢査

實驗前 두 集團의 算數科에 對한 興味도를 調査해 보았다. 標準化學習 興味診斷檢査에서 本 研究와 關聯이 있는 算數科만 調査해 보았더니 다음과 같았다.

이 檢査紙에서 가령 百分位點數로 45%이면 우리나라全體 學生을 100名으로 잡았을 때 이 學生보다 그 領域에 더 높은 興味를 가진 學生은 55名이고, 興味가 더 낮은 學生은 44名이라는 점을 밝히고 있었다. 따라서, 어떤 領域의 興味가 百分位點數로 25% 以下면 그 領域에 별로 興味가 없다고 보아야 하며, 25~75%까지는 그 領域에 對한 興味程度가 普通水準이고 75% 以上이면 높다는 結果 解釋을 내리도록 하였다.

(標準化 學習 興味 診斷檢査 結果: 算數)

百分位點	集團 A(一般→特殊)	集團 B(特殊→一般)
75%以上	18(30%)	17(28%)
25%~75%	33(55%)	35(58%)
25%以下	9(15%)	8(14%)
計	60(100%)	60(100%)

〈解釋〉本 檢査에서 두 集團 A와 B의 算數科에 對한 學習 興味度는 75% 以上이 A 集團 30%, B 集團 28% 이고, 25% 以下가 A 集團 15%, B 集團 14%로 差異없는 것으로 나타났다. 實驗前 算數科에 對한 興味度는 두 集團에 差異가 없었다.

#### 4. 實驗 計劃

##### A. 實驗授業 計劃

四學年 二學期 '7도형의 이동'에서 本 研究와 關聯이 있는 部分을 文教部 教師用 指導

書에 依據 8時間(40分 單位授業)에 걸쳐 指導한다.

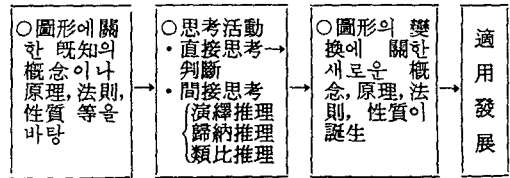
本 研究의 實驗授業도 A와 B의 두 集團에 다음 計劃에 依據, 같은 內容의 實驗授業案을 作成하여 本 研究者가 交代로 實驗授業을 實施한다.

(實驗 授業 計劃表)

區分 次期	A(一般→特殊)	B(特殊→一般)
1	線系圖形의 簡單한 位相의 性質	合同變換으로서의 平行 移動
2	平面圖形의 簡單한 位相의 性質	合同變換으로서의 回軸 移動
3	平面圖形의 簡單한 射影的 性質	같은 三角形의 性質
4	같은 三角形의 性質	같은 直四角形의 性質
5	같은 直四角形의 性質	平面圖形의 簡單한 射影的 性質
6	合同變換으로서의 平行 移動	線系圖形의 簡單한 位相의 性質
7	合同變換으로서의 回軸 移動	平面圖形의 簡單한 位相의 性質
8	A <sub>1</sub> : 獨立的으로 整理, A <sub>2</sub> : 包含的으로 整理	B <sub>1</sub> : 獨立的으로 整理, B <sub>2</sub> : 包含的으로 整理

#### B. 實驗授業 過程

授業過程은 어디까지나 圖形의 變換學習을 分析과 綜合을 主軸으로 하는 論理的인 思考



(學習 指導 過程)

概念 形成 學習		發見 學習	
圖形의 變換에 關한 用語나 記號		圖形의 變換에 關한 原理, 法則, 性質	
1. 基礎	○ 提示段階에 나타나는 여러가지 凡例들의 概念을 再生하기	1. 基礎	○ 새 教材와 關聯이 있는 既知의 概念이나 原理, 法則 등을 再生하기
2. 課題 意識	○ 學習 目標 意識하기	2. 課題 意識	○ 새 教材를 發見的 推理로 促進케 하는 問題로 變形하여 意識하기
3. 提示	○ 새 教材를 抽象化하는데 必要한 素材, 條件, 凡例, 資料 등을 提示하기	3. 豫想	○ 既知의 學習內容을 바탕으로 하여 새 學習 教材의 結果를 豫想하기
4. 概念化	○ 分析과 綜合을 主軸으로 하여 共通의 人 屬性 發見하기 ○ 數學的인 用語나 記號로 言語化, 文字化하기	4. 檢證	○ 論理的인 推論을 通하여 豫想을 檢證하기 ○ 數學的인 用語나 記號로 言語化, 文字化하기
5. 適用	○ 새 概念 活用하기 ○ 새 概念을 既知의 概念 속의 編入하기	5. 適用	○ 發見된 結論을 類似的인 事態에 適用하고 既知의 學習內容에 編入하기

力이 效率的으로 길러 질수 있도록 一貫性 있게 組織한다.

授業過程에 對한 基本的인 것을 大體 圖解 하면 6p의 3번째 표와 같다.

위와 같은 基本的인 生覺을 가지고 圖形의 變換에 關한 用語나 記號等의 概念은 '概念形成學習'으로 授業을 組織하고, 原理, 法則, 性質 等을 찾는 學習은 發見學習의 過程으로 授業을 組織한다.<sup>14)</sup>

學習의 類型에 따른 學習指導 過程은 6p의 마지막 표와 같다.

위와 같은 實驗授業案 作成要領 根據에 따라 實驗 授業案을 作成하고, 實驗授業 計劃에 따라 實驗授業을 實施한다.

### C. 次特別 實驗 授業案

—附錄參考—

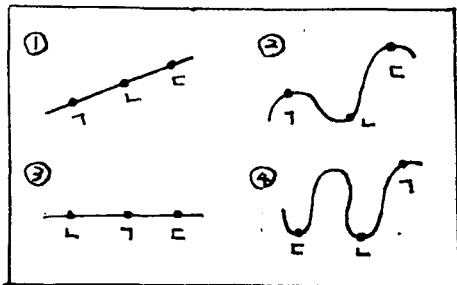
## V. 結果 解釋

### 1. 實驗 授業 反省

#### A. 線系圖形의 簡單한 位相의 性質

(1) 基礎段階에 三學年 때 學習한 閉曲線이 아닌 線을 辨別하고, 閉曲線의 性質을 찾아보게 했는데, 몇몇 兒童이 閉曲線의 定義(曲線 위에 있는 한 點을 出發點으로 하여 線을 한 번만 지나서 出發點으로 되돌아 올 수 있는 曲線)를 言語로 表現하는 데 조금 서투른 것을 明確하게 認識시켰다.

(2) 提示段階에는 教科書 問題를 바로 提示하지 않고 아래 그림과 같이 4個의 線위에



3個의 點을 각기 다르게 찍은 線을 같은 것과 같지 않은 것을 3:1의 비율로 提示하고 線위의 點의 連結이 같은 것끼리 모아보게 하였다. 兒童들이 比較的 쉽게 點 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 順序로 된 線을 辨別하였다.

여기에서 學習이 不振한 兒童이 몇몇이 '곧은 선'과 '굽은 선'으로 辨別 했는데 教師의 個別指導로 矯正되었다.

(3) 概念化 段階에서는 大部分의 兒童들이 '모양과 線의 길이는 달라도 點이 놓인 位置와 順序는 서로 같다'는 점을 發見했다. 여기에서 '位相의 性質'이라는 用語 대신에 '線分을 고무줄이라 생각하고 마음대로 늘이거나 줄여도 바뀌지 않는 性質을 찾아보자'는 것으로 指導가 可能했다.

(4) 適用段階에 教科書 pp. 129~130 高速道路 案內圖를 活用하여 쉽게 圖形의 簡單한 位相의 性質을 理解하도록 하고 位相的으로 같은 線系圖形 찾기를 學習하였다.

高速道路가 그려진 地圖를 提示하고 여러 都市를 가기 위해서 어디어디를 거쳐야 하는가를 알아보게 했다.

이와같은 旅行코스를 實驗授業案에 나타난 直接指導 (가)그림에서 알아보게 하다가 不便함을 느끼게 하여 (나), (다)의 그림과 같이 道路網만을 그려서 알아보자고 하였다. 그 結果 地圖에서 알아 본 (가)그림과 (나), (다)에서 알아본 것과 같은 것임을 發見하였다. 여기에서 兒童들은 具體的인 操作을 통하여 不變의 性質을 알게 되어 線系圖形의 簡單한 位相의 性質에 對한 基礎的인 素養을 가질 수 있게 되었다고 본다.

마지막 段階의 練習問題는 實驗授業에 參與한 모든 兒童이 解決할 수 있었으며, 또, 다른 問題를 提示해 달라는 要求가 있었다.

(5) 一般에서 特殊로의 實驗授業班에서는 조금 抵抗을 받는 것 같았다. 그 理由는 兒童이

14) 釜山敎大附屬, 算數科 새로운 學習 要素의 指導法. 부산 동백사, 1976.

들이  $\frac{1}{8}$ 次時로서 처음부터 一般的인 圖形을 바로 提示했기 때문에 生疏한 學習內容을 把握하는 데 조금 힘들었던 것 같았다. 그러나, 特殊에서 一般으로의 實驗授業班에서는  $\frac{7}{8}$ 次時로서 신변에서 자주 볼 수 있는 特殊한 圖形에서 指導되어 왔기 때문에 自然스럽다는 느낌을 받은 것 같았다.

#### B. 平面圖形的 簡單한 位相的 性質

(1) 基礎段階에 線系圖形的 簡單한 位相的 性質을 再生시켰다. 모양과 길이는 달라도 線이 連結되어 있는 狀態는 같다는 事實을 쉽게 찾아내었다.

(2) 提示段階에 教科書 131 페이지의 고무밴드와 고무관을 活用하여 平面圖形的 簡單한 位相的 性質을 理解할 수 있게 하였다. 고무밴드, 고무관의 實物을 가지고 直接 具體的인 操作을 通하여 다음대로 늘이거나 줄여보고 바뀌지 않는 不變의 性質을 찾아보게 했다.

(3) 概念化 段階에 처음 圖形과 比較 觀察하게 하여 이들 圖形에서 變換 性質과 變하지 않는 性質을 알아보고 고무밴드나 고무관을 四方으로 늘여보았을 때, 모양과 크기는 달라도 바뀌지 않는 성질(閉曲線, 點의 位置, 順序)을 쉽게 찾아내었다.

(4) 適用段階에는 고무풍선에 教科書 132 페이지의 그림과 같이 싸인펜으로 그리고 바람을 넣어 처음 그림과 比較시켜 보게 했다. 눈과 입은 閉曲線이고 코와 눈썹은 閉曲線이 아님을 쉽게 찾아내었고, 바람을 넣기 前과 같은 것임을 發見했다.

마지막 段階에 位相的 性質을 더욱 깊이 理解할 수 있게 하기 위하여 問題를 提示하고 共通的인 性質을 찾을 수 있게 하였더니 大部分의 兒童이 쉽게 解決하는 편이었다.

(5) 여기에서도 一般에서 特殊로의 實驗授業班이  $\frac{2}{8}$ 次時 때문인지 特殊에서 一般으로의 實驗授業班보다 抵抗을 받았다.

#### C. 平面圖形的 簡單한 射影的 性質

(1) 基礎段階에 책받침 모양을 평평한 면에

그림자를 비치게 하여 여러 種類의 四角形的의 定義를 想起시켰다.

(2) 提示段階에 환등기로서 연필과 책받침으로 그림자 놀이를 하였다. 먼저 연필을 여러 가지 方向에서 비치 보고 그림자가 어떻게 달라지는가를 관찰하게 했다. 그리하여 線分의 길이는 變하지만 끝은 線分은 不變이라는 것을 發見했다. 다음에는 책받침을 여러 가지로 비치 보게 하여 그 모양이 어떻게 변하고 있는가를 觀察시켰다. 책받침의 모양은 여러 가지로 변했으나 사각형은 變하지 않음을 발견했다.

(3) 概念化 段階에 射影變換의 不變의 性質로서 ‘點의 位置, 順序는 變하지 않습니다.’ ‘角의 크기는 變합니다.’ ‘線分은 變하지 않으나 그 길이는 變합니다.’ ‘平行은 平行이 안 됩니다.’ ‘넓이는 변합니다.’ ‘수직관계는 변합니다.’ 등의 發表로서 理解가 된 것 같았다.

(4) 適用段階에 여러 개의 圖形을 提示하고 그림자에 依해서 같은 圖形끼리 모아보는 學習을 通해서 射影變換의 概念을 보다 더 明確하게 形成시켰다.

教授用語에 있어서 ‘射影變換’이라는 말을 사용하지 않고 ‘그림자를 利用하여 모양을 바꾼 것’이라고 했다.

그림자에 依해서 變하지 않는 性質은 點은 點으로, 線分은 線分으로, 四角形은 四角形으로, 閉曲線은 閉曲線으로, 點들의 連結關係 등은 不變임을 發見했고, 線分의 길이, 角의 크기, 넓이, 수직관계, 평행관계 등은 變한다는 것을 發見했다.

(5) 位相變換의 學習指導에서 나타난 바와 같이 射影變換에서도 特殊에서 一般의 實驗授業班보다 一般에서 特殊의 實驗授業班이 學習의 成果面에서 앞서지 못한 것 같았다.

#### D. 얇은 三角形의 性質

(1) 基礎段階에 直觀에 依하여 變별할 수 있는 얇은 도형을 알아보게 했다. 이 境遇에 얇음비는 생각할 수 없으나 얇음비에 대한 基



礎素地를 기른다는 立場에서 指導했다.

(2) 提示段階에 教科書 138 페이지 아래 그림을 提示하고, 두 ㉮은 三角形을 본을 떠서 接쳐보고 ㉮은 三角形 사이의 關係를 理解할 수 있게 했다.

(3) 概念化段階에 授業案의 그림과 같이 平行이 될 때에 한해서 두 圖形은 ㉮은 圖形이 됨을 쉽게 理解했다.

여기에서 不變의 性質찾기에서 ‘角의 크기는 바뀌지 않았읍니다.’ ‘點의 位置와 順序는 그대로 입니다.’ ‘크기는 달라질 수 있읍니다.’ 등의 發表를 할 수 있었다.

(4) 適用段階에 教科書 139 페이지의 그림과 같이 ㉮음의 中心에서 그어진 放射形 直線 위에 ㉮은 三角形을 그리고 이들 사이의 關係를 通하여 ㉮은 變換의 性質을 보다 明確하게 認識시켰다.

(5) 一般에서 特殊로의 實驗授業班과 特殊에서 一般으로의 實驗授業班은 成果面에서 큰 差異없는 反應을 보였다.

#### E. ㉮은 直四角形의 性質

(1) 基礎段階에 前時學習內容인 ㉮은 三角形의 性質을 再生시켰다. ㉮음의 中心에서 그어진 放射形 直線 위에 ㉮은 三角形 3個를 그려보고 각 변이 平行이 되고, 角의 크기가 바뀌지 않는 점을 서로 포개어 보는 活動으로 再認識시키고 不變의 性質도 發表시켰다.

(2) 提示段階에 教科書 140 페이지의 그림을 提示하고 對角線을 基準으로 포겔 때, 對角線이 포개어지면 ㉮은 直四角形이 되고 포개어지지 않으면 ㉮은 直四角形이 되지 않음을 調査시켰다.

(3) 여기에서도 ㉮은 變換의 不變의 性質을 ㉮은 三角形에서와 같은 內容을 發表했다.

(4) 適用段階에는 ㉮음의 中心을 外部, 內部, 閉曲線위에 두고 간단한 作圖를 通하여 ㉮음의 性質을 보다 明確하게 認識시켰다. 實際 作圖와 具體的인 操作을 通하여 서로 ㉮은 圖形을 찾을 수 있게 했다.

(5) 前時와 같이 A 班과 B 班의 學習意慾, 興味度, 參與度 등에서 差異없는 反應을 보였다.

#### F. 圖形의 平行移動

(1) 基礎段階에 直觀에 依한 合同인 圖形을 辨別하게 하여, 서로 꼭 포개어지는 合同인 圖形은 對應角의 크기, 線分의 길이가 모두 合同임을 再生시켰다.

(2) 提示 1 段階에 線分을 具體的인 操作으로 平行移動시켜 이에 對한 뜻을 理解할 수 있게 했다.

概念化 1 段階에 平行移動한 線分은 合同인 것을 알아보게 하여 線分은 平行移動에 依하여 변하지 않음을 發表시켰다.

(3) 提示 2 段階에 平行移動한 三角形을 提示하여 平面圖形의 平行移動의 뜻을 理解할 수 있게 했다.

概念化 2 段階에 平行移動한 平面圖形이 合同인 것을 알고 이를 通하여 平面圖形은 平行移動에 依하여 변하지 않는 性質(모양과 크기는 平行移動에 依하여 변하지 않음)을 言語로 大部分의 어린이들이 發表할 수 있었다.

(4) 適用段階에 作圖를 通하여 合同變換의 性質을 보다 明確하게 認識시켰다.

처음에는 모눈종이에서 알아보고, 차츰 白紙에서 그려보고 여기서 화살표 方向과 크기가 있는 量으로 發展시켜서 理解시켰다.

(5) 圖形의 平行移動은 生活周邊에서 흔히 볼 수 있는 것이었기 때문에 A 와 B 의 두 班 모두가 좋은 成果를 올렸다.

#### G. 平面圖形의 回轉移動

(1) 基礎段階에 合同變換의 平行移動에 對하여 想起시켰다. 여기에서 不變의 性質 ‘모양과 크기가 바뀌지 않는 點’을 強調했다.

(2) 提示段階에 實驗授業案의 그림을 提示하고 回轉移動에 依하여 變하지 않는 것을 調査하게 했다.

(3) 概念化段階에 바뀌의 點, 線分, 平面圖形을 나타내어 實際로 바뀌를 回轉시켜 보게

함으로써 변하지 않는 性質(모양과 크기가 같음)을 言語로 表現할 수 있게 하였다.

(4) 適用段階에 바람개비의 點, 線分, 角, 三角形 등을 그리고 回轉하는 모양을 관찰하게 하여 圖形의 回轉移動의 뜻을 보다 明確하게 理解시키고 數學的인 用語로서도 表現할 수 있게 했다.

(5) 前時와 같이 A와 B의 두 集團의 學習 成果面에서의 差異는 없었다.

#### H. 簡單한 平面圖形의 變換

##### (1) 獨立的인 指導

여러 가지 圖形의 變換을 서로 別個의 것으로 보고 各各의 性質을 한번 더 再強調시켰기 때문에 斷片的인 知識의 注入에 지나지 않

았다.

##### (2) 包含的인 指導

位相變換의 特殊한 것이 射影變換이고, 射影變換의 特殊한 것이 닮음變換, 닮음變換의 特殊한 것이 合同變換으로 一貫性있게 統合的으로 指導했기 때문에 全體的인 構造가 잘 把握되었다고 본다.

#### 2. 檢 證

實驗授業을 實施하고 A와 B의 두 集團의 學力 및 興味 診斷檢査를 實施해 보았더니 다음과 같았다.

##### (1) 學力 檢査

A와 B 集團의 學力檢査 結果는 다음과 같다.

(學力 檢査 結果 表: %)

區 分 檢査要素	問項數	A(一般→特殊)				B(特殊→一般)			
		A <sub>1</sub> (獨立的)		A <sub>2</sub> (包含的)		B <sub>1</sub> (獨立的)		B <sub>2</sub> (包含的)	
		1次	2次	1次	2次	1次	2次	1次	2次
○位 相 的 性 質	6	84	78	90	89	85	80	96	95
○射 影 的 性 質	5	83	78	87	85	86	79	95	93
○ 닮 음 性 質	6	86	80	92	90	88	80	98	94
○合 同 性 質	8	88	82	94	91	90	81	100	98
平 均	25	85	79	91	89	87	80	97	95

〈解釋〉 全體의으로 보아 B 集團이 A 集團보다 效果의이었고, B 集團 中에서도 包含的인 指導가 더 成果가 있었다.

그리고, 1,2次의 檢査結果에서 把持力이 A

와 B 두 集團 모두가 獨立的인 指導보다 包含的인 指導가 效果的이었다.

좀 더 具體的으로 알아보기 위하여 다음과 같은 差의 意義度를 알아보았다.

(學力 檢査 結果: 100점 단점)

區 分 集 團	A(一般→特殊)				B(特殊→一般)			
	A <sub>1</sub> (獨立的)		A <sub>2</sub> (包含的)		B <sub>1</sub> (獨立的)		B <sub>2</sub> (包含的)	
	1次	2次	1次	2次	1次	2次	1次	2次
M	85	79	91	89	87	80	97	95
SD	8.8	9.8	8.4	8.5	8.6	9.0	7.9	8.2
N	30	30	30	30	30	30	30	30
全 體	1次: M=88, SD=8.6, N=60 2次: M=84, SD=9.2, N=60				1次: M=92, SD=8.3, N=60 2次: M=88, SD=8.6, N=60			

〈解釋〉 ① 一般에서 特殊로의 指導와 特殊에서 一般으로의 指導의 比較

A와 B集團의 1次 學力檢査 結果의 差는  $CR_M=2.59$ ,  $0.005 < p < 0.01$ 로 檢 意義있는 差로 나타났고, 2次에서도  $CR_M=2.45$ ,  $0.02 < p < 0.01$ 로 檢 意義있는 差로 判明되었다. 이것은 一般에서 特殊로의 指導보다 特殊에서 一般으로 指導가 效果의이었음이 立證되었다(가설 1 검증).

② 獨立的인 指導( $A_1+B_1$ )와 包含的인 指導( $A_2+B_2$ )의 比較.

( $A_1+B_1$ )과 ( $A_2+B_2$ )의 1次 學力評價 結果의 差는  $CR_M=5.19$ ,  $p < 0.005$ 로 檢 意義있는 差로 나타났고, 2次에서도  $CR_M=8.04$ ,  $p <$

$0.005$ 로 檢 意義있는 差로 判明되었다.

이것은 獨立的인 指導보다 包含的인 指導가 效果의이었음이 立證되었다(가설 2 검증).

③ 〈1次〉와 〈2次〉의 比較.

包含的인 指導가 獨立的인 指導보다 把持力이 더 持續되었음이 差의 意義度 檢證에서 判明되었다.

以上을 要約해 보면 '圖形的 變換學習은 特殊에서 一般(合同→답음→射影→位相)의 順序로 指導하되, 包含的으로 指導하는 것이 學力向上에 크게 도움을 준다는 것이 立證되었다.

(2) 標準化 學習 興味診斷檢査

實驗前과 實驗後의 算數科 興味度を 調査해 보았더니 다음과 같았다.

(標準化 學習 興味 檢査 結果: ( )안은 %)

區 分	A(一般→特殊)				B(特殊→一般)			
	A <sub>1</sub> (獨立的)		A <sub>2</sub> (包含的)		B <sub>1</sub> (獨立的)		B <sub>2</sub> (包含的)	
	前	後	前	後	前	後	前	後
75% 以上	9(30)	10(33)	9(30)	17(57)	9(30)	12(40)	8(27)	21(70)
25%~75%	16(53)	15(50)	17(57)	10(33)	17(57)	16(53)	18(60)	9(30)
25% 以下	5(17)	5(17)	4(13)	3(10)	4(13)	2(7)	4(13)	0(0)
計	30(100)	30(100)	30(100)	30(100)	30(100)	30(100)	30(100)	30(100)

〈解釋〉 一般에서 特殊로의 指導보다 特殊에서 一般으로의 指導가 더 學習興味도가 높았고, 獨立的인 指導보다 包含的인 指導가 더 재미있다는 것이 立證되었다. 즉, 特殊에서 一般으로 指導하되, 包含的인 指導가 더 興味도가 높았음이 判明되었다.

## V. 結論 및 論議

假說 檢證의 結果를 基礎로 하여 結論을 맺으려 한다.

〈假說 1〉 圖形的 變換學習을 特殊에서 一般으로 指導하는 것이, 一般에서 特殊로 指導하는 것보다 學習成度가 높을 것이다.

假說 1을 檢證한 結果  $CR_M=2.59$ ,  $0.005 < p < 0.01$ 로 檢 意義있는 差로 나타났다.

이것으로 보아 特殊에서 一般으로의 指導가 一般에서 特殊로의 指導보다 效果의이었음이 立證되었다. 把持력을 보기 爲한 1個月 後 2次 學力檢査에서도 같은 結果를 가져왔다.

〈假說 2〉 圖形的 變換學習을 包含的으로 指導하는 것이 獨立的으로 指導하는 것보다 學習成度가 높을 것이다.

假說 2를 檢證한 結果  $CR_M=5.19$ ,  $p < 0.005$ 로 檢 意義있는 差로 나타났다.

이것으로 보아 圖形的 變換끼리 相互關聯지어 包含的으로 指導하는 것이 獨立的으로 指導하는 것보다 效果的이었음이 立證되었고, 특히 1個月 後 2次 學力檢査에서도 把持力이 包含的인 指導가 效果的이었다.

以上の 假說 檢證의 結果를 綜合하면, 다음

과 같은 이 研究의 結論이 導出된다.

圖形의 變換學習의 指導는 特殊에서 一般으로 指導(合同→닮음→射影→位相)하되, 이들 사이의 不變의 性質을 調査하여 서로 關聯지어 包含的으로 指導하는 것이 效果的이다.

### 參考文獻

- 具光祖 外. 現代化를 위한 算數教育. 서울古今文化社. 1971.  
數學教育學會. 數學教育 37 號. 서울敎學社. 1977.  
安位鍾. 算數科教育. 同和文化社. 1973.  
R. R. 스텝. 敎學學習의 心理學, 東京新曜社. 1973.

- 前田隆一. 算數と數學. 敎育綜合研究所. 1972.  
遠山啓 外. 兒童心理學. 東京金子書房. 1974.  
佐藤俊太郎. 子どもの圖形認識. 日本數學敎育學會 論究 V.  
Johnson, D. A. Topology, NCTM, Enrichment Mathematics for the Grades. 1963. pp. 148~164  
NCTM. Topics in Mathematics for the Elementary School Teachers. 1964.  
NSSE. Mathematics Education. 1971.  
MSG. Mathematics for the Elementary School, Student Texts, Teacher's Commentary 1965.  
SRA. SRA Elementary Mathematics Program, Teachers Guide. 1968.

### Abstract

## A Study of the Sequence of Figure Transformation Learning

By Sung Teak Park

This study aimed at studying the sequence of the Figure Transformation Learning, inquiring relationship among these transformations and then researching whether there is the difference of the learning ability or not between by teaching them as it is independent and by teaching them as it is contains.

(Hypothesis 1)

It may be more effective to teach The Sequence of Transformation Learning by beginning with peculiar field, ending with general field than vice versa

At the result of verification— $CR_M=2.59$ ,  $0.005 < p < 0.01$ —significant difference appeared. At the sight of the above it is proved more effective to teach them by beginning with peculiar field, ending with general field.

(Hypothesis 2)

It may be more effective to teach the Figure Transformation Learning the way it contains than the way it is independent

At the result of verification— $CR_M=5.19$ ,  $p<0.005$ —significant difference appeared. It is proved more effective to teach the Figure Transformation Learning the way it contains than the way it is independent.

Synthesizing two hypothesises of the above, the conclusion is following

The Figure Transformation Learning should be taught by beginning with peculiar field, ending with general field (congruent transformation→similar transformation→projective transformation→topological transformation). To teach it the way it contains is more effective.