

# 誘電體로 일부 채워진 直六面體 캐비티의 多重모드 解析

## (Multimode Analysis of a Rectangular Cavity Partially Filled with Dielectric)

金 彩 英\*, 羅 正 雄\*\*  
(Kim, Che Young and Ra, Jung Woong)

### 要 約

誘導體로 일부가 채워진 直六面體 캐비티의 多重 모드 특성을 그래프적 방법으로 解析하였다. 다중 모드 주파수는 3개의 연립 삼각함수 식을 그래프적으로 풀어 얻을 수 있다. 이 解析으로 誘導體로 일부 채워진 캐비티의 共振周波數는 빈 캐비티의 共振周波數보다 낮은 쪽으로 이동됨을 보일 수 있다. 그러나 이 주파수 이동이 상당히 크기 때문에 攪動方法을 사용할 수 없음을 보일 수 있다. 또한 그래프적 解析은 表面波 모드가 誘電體內에 存在함과 그 共振周波數를 쉽게 예언할 수 있음을 볼 수 있다.

### Abstract

Multimode characteristics of a dielectrically loaded rectangular cavity are analyzed by a graphical method. Coupled transcendental equations for multimode frequencies may be solved graphically. This shows that the resonant frequencies of the partially filled cavity with a dielectric are shifted toward lower frequencies compared to those of the empty cavity. It is shown that a perturbational scheme can not be employed to calculate multimode frequencies because of relatively large frequency shift. Existence of the surface wave modes in the dielectric and their resonant frequencies are easily predicted from this graphical method.

### 1. 序 論

마이크로웨이브 오븐의 캐비티는 음식물이 요리되는 곳으로 캐비티 內부의 電界分布는 될 수 있는 한 균일한 세기의 分布가 要求된다. 電界의 균일한 분포는 다중모드로 動作시킬 때 가능하며, 특히 음식물이 들어 있을 때의 캐비티의 다중모드 특성의 연구가 균등가열을 위해 필요하게 된다.

임의 형태의 음식물이 캐비티內에 존재할 때의 모드 해석은 수치계산의 방법으로는 거의 불가능하므로 變數分離가 가능한 그림 1과 같이 일부가 誘電體로 채워진 直六面體 캐비티를 선택하여 그 특성을 해석하려 한다. 이 결과로부터 임의 형태의 음식물이 존재하는 캐비티內에 모드 특성을 유추할 수 있게 되어 意義가 있게 된다.

誘電體가 일부 채워진 캐비티의 각 共振모드의 공진주파수는 초월함수식으로 表示되어 빈 캐비티의 表現式에 비하여 월등히 복잡하다. 이의 적절한 해석방법으로 그래프를 사용한 방법을 제안하려 한다.

直感的인 思考으로는 빈 캐비티의 모드 주파수 식이 알려져 있으므로, 攪動方法(perturbation method)

\* 正會員, 경북대학교 공과대학 전자공학과  
(Dept., of Elec., Colle., Eng., Kyung-Pook National Univ.)

\*\* 正會員, 한국과학원 전기 및 전자공학과  
(Dept., of Electrical Science KAIS)

接受日字: 1978年 11月 1日.

이 유효한 것으로 생각되지만, 이 그래프적 해석 결과로부터 왜 다중모드의 경우 섭동방법이 유효하지 못한가를 볼 수 있다. 섭동방법은 主 모드(dominant mode)에만 적용 가능하며, 高次 모드에서는 共振周波數가 빈 캐비티의 共振周波數로부터 큰 차이가 남을 볼 수 있으며 微小擾動으로 구할 수 없음을 볼 수 있다.

誘電體가 일부 채워진 直六面體 캐비티의 다중모드 특성의 연구는 본인들의 지식으로는 그 시도가 없는 것으로 알고 있으며<sup>(1)</sup>, 이의 그래프적 해석 방법을 제안하려 한다.

2. 모드 方程式

그림 1에 보인 캐비티내에서 電磁界는 Maxwell 方程式과 주어진 경계조건을 만족시켜야 한다. 특히 캐

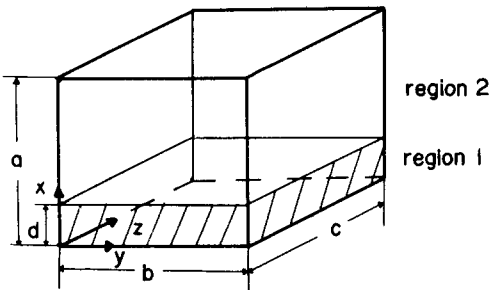


그림 1. 유전체로 일부가 채워진 직육면체 캐비티  
Fig 1. Rectangular cavity partly filled with a dielectric.

비티 경계면에서 接線成分 電界 및 垂直成分 磁界는 零이 되고,  $x=d$ 의 유전체 경계면에서는 接線成分의 電界 및 磁界가 연속이 되어야 한다.  $x=d$ 면의 경계조건을 파벳터(wave vector)  $k$ 의 접선성분의 연속조건으로 바꾸어 놓을 수 있으며, 이는

$$k_{y1} = k_{y2} \dots\dots\dots(1)$$

$$k_{z1} = k_{z2} \dots\dots\dots(2)$$

라 쓸 수 있다. 여기서  $k_y$  및  $k_z$ 는 파벳터의  $y$  및  $z$  성분이며, 1과 2는 各各 영역 1과 2를 표시한다.  $y=0$  및  $y=b$ 에서 接線成分 電界는 零이 되어야 하므로  $k_y$ 는

$$k_y = \frac{m\pi}{b} = k_{y1} = k_{y2} \dots\dots\dots(3)$$

라 쓸 수 있다. 여기서  $b$ 는 캐비티의  $y$ 방향 크기이며  $m$ 은 정의 정수이다. 같은 이유에서

$$k_z = k_{z1} = k_{z2} = \frac{n\pi}{c} \dots\dots\dots(4)$$

로서  $c$ 는 캐비티의  $z$ 방향 크기이며  $n$ 은 정의 정수이다.

$x$ 방향 파벳터 성분을 구하기 위하여 그림 1의 캐비티를 그림 2와 같은  $x$ 방향을 傳送方向으로 택하고  $y-z$  방향을 단면방향으로 택한 等價 傳送線 回路로 바꾸어 놓을 수 있다. 이 등가회로에서  $x$ 축 단면공

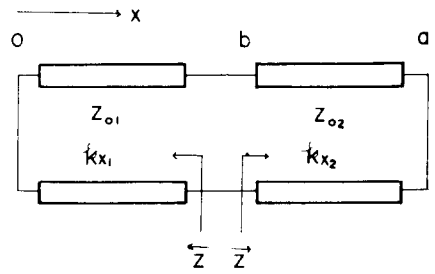


그림 2. 단면공진 전송선 등가회로  
Fig 2. Equivalent transmission line for transverse resonance.

진(transverse resonance) 조건을 이용하여  $k_x$ 를 구할 수 있다.<sup>(2)</sup> 이는 그림 2의  $x=d$ 에서 좌측으로 본 임피던스  $\hat{Z}$ 와 우측으로 본 임피던스  $\bar{Z}$ 의 합을 零으로 놓아 얻게 된다.

$$\bar{Z} + \hat{Z} = jZ_{o1} \tan(k_{x1} d) + jZ_{o2} \tan[k_{x2} (a - d)] = 0 \dots\dots\dots(5)$$

여기서  $Z_{o1}$  및  $Z_{o2}$ 는 영역 1 및 2의 특성 임피던스로서

$$Z_{o1} = \begin{cases} \frac{k_{x1}}{W\epsilon_0 \epsilon_r}, & \text{TM mode} \\ \frac{W\mu_0}{k_{x1}}, & \text{TE mode} \end{cases} \dots\dots\dots(6)$$

$$Z_{o2} = \begin{cases} \frac{k_{x2}}{W\epsilon_0}, & \text{TM mode} \\ \frac{W\mu_0}{k_{x2}}, & \text{TE mode} \end{cases} \dots\dots\dots(7)$$

이다.  $\epsilon_r$ 는 유전체의 상대 유전율,  $w$ 는 角周波數이며  $a$ 는  $x$ 방향으로의 캐비티의 크기이다.

매질 1 및 2는 非磁性 매질이라 가정하여 투자율  $\mu$ 는 공기중의 투자율  $\mu_0$ 를 사용하였다.

파벳터  $k$ 의 크기는  $k = w\sqrt{\mu\epsilon}$ 로  $w$ 의 함수로 주어진다. 영역 1 및 2에서 파벳터  $k$ 의  $x, y$  및  $z$  성분의 합으로  $k$ 를 표시할 수 있으며, 식 (3) 및 (4) 그리고 (5)의  $k_{x1}$  및  $k_{x2}$ 를 사용하면 공진 각주파수  $w$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r = k_{x1}^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2, \dots\dots\dots(8)$$

$$w^2 \mu_0 \epsilon_0 = k_{x2}^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \dots\dots\dots(9)$$

여기서  $k_{x_1}$  및  $k_{x_2}$ 는 식 (5)로부터

$$k_{x_1} \tan(k_{x_1} d) = -\epsilon_r, \quad k_{x_2} \tan[k_{x_2}(a-d)],$$

TM mode, ..... (10 a)

$$k_{x_1} \cot(k_{x_1} d) = -k_{x_2} \cot[k_{x_2}(a-d)],$$

TE mode ..... (10 b)

라 쓸 수 있다.<sup>(3)</sup> 따라서 공진 주파수는 TM mode의 경우 (8), (9) 및 (10 a)식을, 그리고 TE mode의 경우 (8), (9) 및 (10 b)식을 연립으로 풀어 주어진 ( $a, b, c, d$ ) 및 각 固有值( $m, n, k_x(\ell)$ )에 대하여  $w$ 를 구하면 된다. 특히 (10)식은  $k_{x_2}$ 가 허수가 되는 경우에도 解를 갖게 되며,

$$k_{x_2} = -j \sqrt{|k_{x_2}|^2} \dots\dots\dots (11)$$

를 代入하여 解를 얻는다.  $k_{x_2}$ 가 허수인 解는 본문에서 보이겠지만 誘電體 부분에 表面波 모드<sup>(4)</sup>가 존재하는 경우이다.

식(10)에서  $d=0$ 이면  $\tan(k_{x_2}a)=0$  (TM) 또는  $\cot(k_{x_2}a)=\infty$  (TE)로서 TM, TE 모드가 꼭 같이

$$k_{x_2} = \frac{l\pi}{a}, \quad l = 1, 2, \dots\dots\dots (12)$$

가 된다. 誘電體가 없는 빈 캐비티인 경우는 (9)식과 (10)식으로부터 共振 角周波數가

$$w = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \dots\dots (13)$$

이 됨을 볼 수 있다.

$d$ 가 0이 아닌 경우, 즉 캐비티의 일부가 誘電體로 채워진 경우는 共振 角周波數를 표시하는 식을 섭동방법에 의하여 근사적으로 유도하였으나<sup>(5)</sup>, 이는  $d$ 가  $a, b$  및  $c$ 에 비하여 대단히 적고  $\epsilon_2 \approx \epsilon_1$ 이며, 주 모드에 한한다. 이 攪動(perurbation)方式은 특별한 경우 주 모드에 대해서는 근사식을 쓸 수 있으나, 多重 모드의 공진 주파수를 구하는 목적에는 적절하지 못함을 보임과 동시에, 그래프를 利用하는 방법이 유용함을 보이려 한다. 특히 그래프적 解析方法은 공진 모드의 수를 계산하려는 목적으로 계산기를 사용할 때 효율적인 프로그램 방법을 提示할 수 있다.

### 3. 모드의 그래프적 解析

共振周波數를 구하기 위하여 TM mode에 대해서는 (8), (9) 및 (10 a)식을, TE mode에 대해서는 (8), (9) 및 (10 b)식을 풀면 된다. 이상 3개의 식에서  $k_{x_1}$  및  $k_{x_2}$ 를 제거하여  $w$ 에 대한 解를 얻으면 된다. 그래프적 해석 방법은 (8) 및 (9)식에서  $k_{x_1}$  및  $k_{x_2}$ 를  $w$ 의 함수로 표시한 후, (10)식에 이를 代入하면 (10)식의 좌변과 우변이 모두  $w$ 의 함수로 표시된다.  $w$ 의

함수로 좌변과 우변을 그래프로 表示하면 그 교차점의  $w$ 가 모든 多重 모드의 共振周波數가 된다.

주어진  $a, b, c$  및  $d$ 와  $m, n$  값에 대하여  $k_{x_1}$ 은 주파수  $f = \frac{w}{2\pi}$ 에 따라 (8)식으로 부터 쌍곡선적으로 변한다. (9)식으로부터 같은 條件에서  $k_{x_2}$ 도  $f$ 의 쌍곡선 함수로 표시된다. 이 관계를 그림 3에  $f$

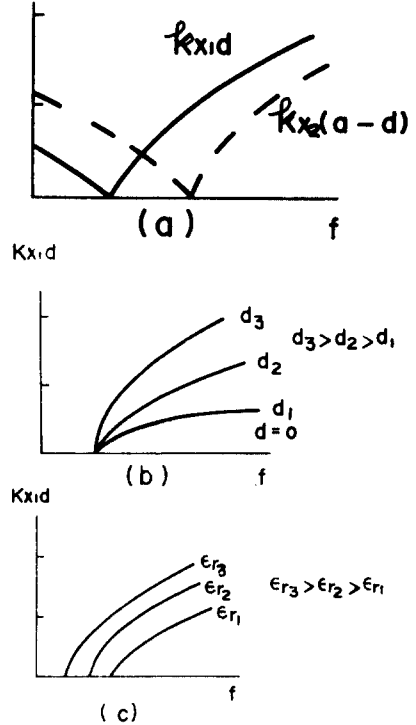


그림 3. 주파수  $f$ 의 함수로 표시한  $k_{x_1} d$  및  $k_{x_2}(a-d)$

- a)  $k_{x_1} d - f$  (실선그림),  $k_{x_2}(a-d) - f$  (점선그림)
- b)  $d$ 가 다를 때                      b) for various  $d$
- c)  $\epsilon_r$ 가 다를 때                      c) for various  $\epsilon_r$

Fig 3.  $k_{x_1} d$  and  $k_{x_2}(a-d)$  as a function of frequency  $f$ .

에 대한  $k_{x_1} d$  또는  $k_{x_2}(a-d)$ 로 표시하였다. 주파수가 낮아짐에 따라  $k_{x_1}$  및  $k_{x_2}$ 가 허수가 되며, 이 영역에서는  $\sqrt{|k_{x_1}|^2} d$  및  $\sqrt{|k_{x_2}|^2} (a-d)$ 로 그 크기만을 표시하였다. 특히  $d=0$ 일 때  $k_{x_1} d$ 는  $f$ 축이 되며 그림 3(b) 및 (c)에서 볼 수 있듯이  $d$ 가 증가함에 따라  $k_{x_1} d$ 도 증가하며,  $\epsilon_r$ 이 증가함에 따라  $k_{x_1} d$ 도 증가한다.

이들  $k_{x_1} d$  및  $k_{x_2}(a-d)$ 의 값을 식 (10 a)에 代入하면 (10 a)식의 좌변은  $k_{x_1} d$ 만의 함수로, 우변은  $k_{x_2}(a-d)$ 만의 함수로 표시할 수 있다.  $d \approx 0$ 인 경

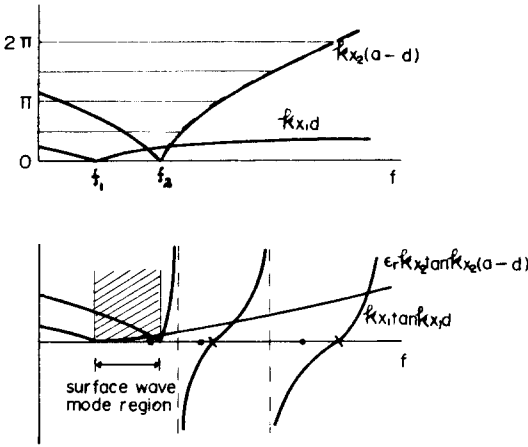


그림 4.  $d$ 가 작을 때의 다중모드 주파수의 그래픽 해석

Fig 4. Graphical analysis of the multimode frequencies for small  $d$ .

우를 생각해 보면 그림 4와 같이  $k_{x1}d$ 는 거의 0에 가까운 값을 가진 반면  $k_{x2}(a-d)$ 는 상당히 큰 값을 가지게 되어  $k_{x1} \tan(k_{x1}d)$ 는 거의 직선함수로 변하는 반면,  $\epsilon_r k_{x2} \tan[k_{x2}(a-d)]$ 는  $k_{x2}(a-d) = 0, \pi, 2\pi, \dots$ 에서 0을,  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$  등에서  $\pm\infty$  값을 갖는 그래프를 그리게 된다. 이 두 그래프상의 값 차이가 좁아지는 주파수가 곧 공진周波數로서, 그림 4의  $\bullet$ 로 표시되었다.  $d=0$ 인 빈 캐비티인 경우에는  $k_{x1}d$ 가 0이 되어  $\tan(k_{x1}d)$ 는 周波數 軸이 된다. 만일 그림 4의  $k_{x2}(a-d) \approx k_{x2}a$  라면  $\tan k_{x2}(a-d)$ 가  $f$ 軸과 교차하는 점은 거의 같을 것이며 공진周波數는  $\times$ 표와 같게 된다.

(9)식에서  $k_{x2}$ 가 0일 때의  $f$ 를  $f_2$ 라 하면  $f < f_2$ 에서 (10a)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$k_{x1} d \tanh(k_{x1} d) = \epsilon_r \sqrt{k_{x2}^2} d \tanh \left[ \sqrt{k_{x2}^2} (a-d) \right], \quad f_1 < f < f_2, \dots (14a)$$

$$- \sqrt{k_{x1}^2} d \tanh \left( \sqrt{k_{x1}^2} d \right) = \epsilon_r \sqrt{k_{x2}^2} d \tanh \left[ \sqrt{k_{x2}^2} (a-d) \right], \quad f < f_1, \dots (14b)$$

여기서  $f_1$ 은 (8)식에  $k_{x1} = 0$ 을 대입했을 때의  $f$ 값이다. 식(14)로부터  $f_1 < f < f_2$ 에서는 이 식의 解가 존재하지만  $f < f_1$ 에서는 解가 존재하지 않음을 알 수 있다. 여기서  $k_x$ 가 허수값을 가질 때  $-j\sqrt{k_x^2}$ 로 취함은  $e^{j\omega t}$ 의 존 시간함수를 생각할 때 傳播方向으로 감쇄하는 波를 의미한다. 따라서  $f_1 < f < f_2$ 에 한개의 공진周波數가 존재하며 이 모드는  $k_{x1}$ 은 실수  $k_{x2}$ 가 허수인, 즉 그림 1의 공기중에서는 감쇄하며 誘電體內에서는 定在波로서 존재하는 表面波 모드인 것이다.

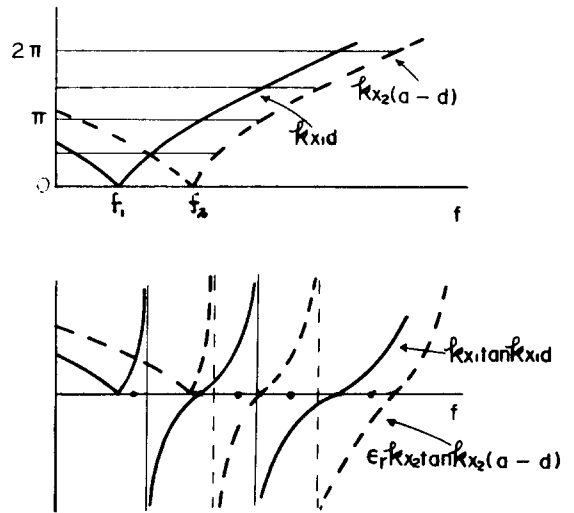


그림 5.  $d$ 가 클 때의 다중모드 주파수의 그래픽 해석 ( $k, d$  및  $k_{x1} \tan k_{x1}d$ 에 대하여, 점선은  $k_{x2}(a-d)$  및  $\epsilon_r k_{x2} \tan k_{x2}(a-d)$ 에 대한 곡선임)

Fig 5. Graphical analysis of the multimode frequencies for large  $d$ .

(- :  $k_{x1}d$  or  $k_{x1} \tan k_{x1}d, \dots : k_{x2}(a-d)$  or  $\epsilon_r k_{x2} \tan k_{x2}(a-d)$ )

$d$ 가 상당히 큰 값을 가지게 되면  $k_{x1}d$ 가 그림 5와 같이  $k_{x2}(a-d)$ 보다 더 큰 값을 갖게 되며,  $\tan k_{x1}d$  및  $\tan k_{x2}(a-d)$ 가 거의 같은 週期성을 갖는 그래프가 된다.  $f > f_2$ 에서는 두 그래프값의 차이가 좁아지는 점이 공진점이 되며,  $f < f_2$ 에서는 역시 表面波 모드가 존재하게 된다. 이 때 表面波 모드의 수는  $k_{x1}d$ 의 값이  $f = f_2$ 에서  $\frac{\pi}{2}$ 보다 적은 값을 가지면 1개가 존재하지만  $\frac{\pi}{2}$ 보다 큰 값을 가지면 2개 이상이 되고 그 값에 따라 數가 증가함을 알 수 있다.

실제 數值를 넣은 그래프의 例를 그림 6에 보인다. 그림 4.5 및 6으로부터, 캐비티의 크기가 주어졌을 때, 빈 캐비티의 공진周波數는 일부를 誘電體로 채운 캐비티의 경우보다 약간씩 낮은 쪽으로 이동되었음을 볼 수 있다.  $d$ 가 상당히 큰 값을 가질 때는 공진周波數가 빈 캐비티의 그것에 비해 많이 이동되지만 서로 對應하는 주파수를 찾을 수가 있다. 다만 誘電體가 일부 채워진 캐비티에 존재하는 表面波 모드는 빈 캐비티에는 존재하지 않아서 그 대응성을 찾을 수 없다.

가장 낮은 공진周波數를 갖는 主모드에 대해서는  $d$ 가 아주 작은 값을 가질 때 빈 캐비티의 그 공진周波數와 거의 같은 값을 갖는 것을 그림 4에서 볼 수

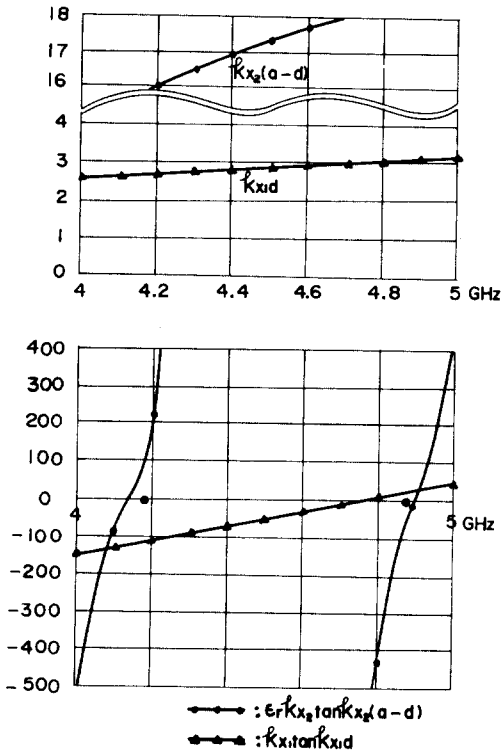


그림 6. 실제산 예  
 Fig 6. Numerical example.  
 ( $a = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 25 \text{ cm}$ ,  $c = 30 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ ,  
 $\epsilon_r = 10$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ )

있다. 따라서 이 경우에는 擾動理論을 적용하여 공진 주파수의 표현식을 근사적으로 얻을 수 있다. 그러나 高次 모드라든지  $d$ 가 어느 이상의 값을 가질 경우는 그림 5에서 볼 수 있듯이 공진 주파수가 빈 캐비티의 경우에 비해 크게 移動되기 때문에 擾動論의 解析이 실패하게 됨을 알 수 있다.

#### 4. 結 論

直六面體 캐비티의 一部가 誘電體로 채워지면 共振周波數는 빈 캐비티의 共振周波數에 비해 약간씩 낮은 周波數쪽으로 移動된다. 이들 共振周波數는 微小 擾動方法으로는 구하기가 거의 불가능하며, 그 理由를 그래프적인 방법으로 보여줬다. 또한 이 방법으로 간단히 表面波 模드의 存在를 예측할 수 있으며, 表面波 模드의 數도 쉽게 계산될 수 있다. 이러한 多重 模드의 共振周波數는 그래프를 그려봄으로써 어느 범위에 있는가를 곧 알 수 있다. 공진주파수 및 주어진 주파수 대역에서 존재할 수 있는 총 模드의 數를 계산기를 사용하여 계산할 경우 그래프적 해석 방법을 이용하면, 계산에 필요한 시간을 좀 더 효율적으로 사용할 수 있게 된다.

이 解析을 實驗의으로 확인 하였으며, 별도의 論文으로서 提出하려 한다.

#### 參 考 文 獻

1. T.G. Mihran, "Microwave Oven Mode Tuning by Slab Dielectric Loads", IEEE, Trans. on MTT, Vol. 26 No. 6, June 1978, pp. 381-387.
2. L.B. Felsen and N. Marcuvitz, Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall Inc. 1973, p. 216.
3. R.F. Harrington, Time Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1961, pp. 159-162
4. R.E. Collin, Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1960, Chapter 11.
5. J.A. Kong, Theory of Electromagnetic waves, Wiley-Interscience & Sons, New York, 1975, pp. 174-176.