

分割最適電力潮流計算

論 文
28-10-1

Decoupled Optimal Load Flow

梁 興 錫* · 朴 永 文** · 李 鳳 容*** · 白 榮 植****

(Heung Suk Yang, Young Moon Park, Bog Yuong Lee, Young Sik Paik)

Abstract

Decoupled optimal load flow was achieved from the original work by Dommel and Tinney. The main feature contains suitable optimal step size determination and successful avoidance of functional inequality constraints. An application to a real-scale power system showed 0.5 [%] savings in cost, amounting about 3 billion Won annually and feasibility of on-line operation.

1. 序 論

油價 上昇의 幅이 커질 수록, 電力系統의 燃料費 節減은 절실한 課題로서, 1日 燃料費가 16億[원]의 水準이라고 할때, 0.1[%]의 費用節減이라 하더라도, 年間約 6億[원]에 達하는 經濟性이 豫想되고 있다.

燃料費의 經濟性에 대해서는 從來等增分燃料費法 또는 送電損失까지 고려하는 페널티技法(Penalty Factor Technique)이 널리 사용되고 있고,^{1,2)} 페널티技法에서는 損失方程式에 의하여 經濟計算을 하고 있으나, 여기에는

- 1) 損失方程式에서는 有効電力만을 고려
 - 2) 損失方程式에 사용되는 소위 B定數가 몇 가지 近似인 假定下에서 결정된 값
- 이라는 主要한 缺點을 갖는다.

이러한 缺點을 解決하여 完全한 解를 얻으려는 많은 研究가 發表되고 있으나,^{3,4,5,6,7)} 그 중 가장 成功인 것으로 評價되고 있는 것은 Dommel 및 Tinny⁵⁾에 의해서 發表된 “最適潮流計算(Optimal Load Flow)”으로서, 主要 特徵은 뉴튼潮流計算을 基本으로 해서 最適值을 찾는 데 傾斜法(Gradient Method)을 사용한 점 및 不等式制約을 처리하기 위해서 페널티 函數를 사용한 점을 들 수 있다.

* 正金員: 서울大 工大 電氣工學科教授 · 工博 (當學會會長)
 ** 正會員: " " "
 *** 正金員: 弘益大 工大 副教授
 **** 正金員: 明知大 專任講師
 接受日字: 1979年 7月 10日

本 論文에서는 이 방법을 다시 改善하여, 뉴튼潮流計算⁸⁾을 基本으로 하고, 일반적으로 그 처리가 어려운 페널티 函數를 排除하여 傾斜法만에 의해서 最適值을 얻고자 한다.

2. 뉴튼分割漸流計算^{8,9)}概要

電力系統의 狀態는 母線方程式(Nodal Equation)으로 표시되며, 未知數를 벡터 x 로 指定值를 벡터 y 라고 할 때,

$$g(x, y) = 0 \tag{1}$$

로 주어진다. 이 非線形方程式은 反復回數 k 에 대하여 $g(x^k, y) \neq 0$ 이므로 테일러급수로 전개하여 다음의 改善된 값을 구한다.

$$\Delta x^k = -J^{-1}(x^k)(g(x^k, y)) \tag{2}$$

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k \tag{3}$$

단, J 는 자코비안 행렬 이외같이 未知數 x 를 收斂시키는 방법이 뉴튼潮流計算이다.

그러나 電力系統에서는 有効電力과 電壓相差角 및 無効電力과 電壓間에는 밀접한 관계가 있으나, 有効電力과 電壓 및 無効電力과 電壓相差角간에는 상호영향이 적다는 성질을 이용해서, (2)식을 두 개의 식으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\Delta P = H \Delta \delta \tag{4}$$

$$\Delta Q = L \Delta V / V \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \text{단, } H_{km} &= L_{km} = V_k V_m (G_{km} \cdot \sin \delta_{km} - B_{km} \cdot \cos \delta_{km}) \quad m \neq k \\ H_{kk} &= -B_{kk} V_k^2 - Q_k \end{aligned}$$

$$L_{kk} = -B_{kk} V_k^2 + Q_k$$

그리고 P 는 有効電力, Q 는 無効電力, δ 는 電壓相角, V 는 母線電壓, G 와 B 는 각각 母線어드미탄스의 有効分과 無効分을 表示한다.

(4), (5)와 같이 式을 分割하여, $\Delta\delta$ 와 ΔV 를 收斂시켜 解를 求하는 것이 뉴턴分割潮流計算이며, 分割로 인한 記憶容량의 減少와 計算速度的 向上이 主要強點이 된다.

3. 分割最適潮流計算

目的函數인 總燃料費는 보통 다음과 같이 주어진다.

$$f = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i P_i + c_i P_i^2) \quad (6)$$

단, n =발전기 數

a_i, b_i, c_i =비용계수

P_i =발전기 出力

이 때의 等式制約條件은 (1)로 주어지나, 指定值 y 중에서 制御하고자 하는 量을 벡터 u (發電機 出力, 電壓調整母線의 電壓), 制御할 수 없는 量을 벡터 P (負荷)로 나누면 (1)式은

$$g(x, u, P) = 0 \quad (1)'$$

로 표시된다.

따라서 最適化의 問題를 다음과 같이 要約할 수 있다.

$$\min f = \sum_i (a_i + b_i P_i + c_i P_i^2) \quad (7)$$

subject to $g_P(x, u, P) = 0$

$$g_Q(x, u, P) = 0$$

단, P, Q 는 각각 有効電力 및 無効電力項을 表示.

(7)式의 f 에는 基準母線(Slack Bus)의 出力이 포함되고, 이 出力은 電壓과 相角에 의해서 결정되므로 x 의 함수가됨을 염두에 두고, 타그란주 未定係數를 導入하여

$$L(x, u, P) \triangleq f(x, u) + \lambda_P^T g_P(x, u, P) + \lambda_Q^T g_Q(x, u, P) \quad (8)$$

을 定義하면, 이 式의 最小條件으로부터

$$\frac{\partial L}{\partial x_P} = \frac{\partial f}{\partial x_P} + \left(\frac{\partial g_P}{\partial x_P}\right)^T \lambda_P = 0 \quad (9-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_Q} = \frac{\partial f}{\partial x_Q} + \left(\frac{\partial g_Q}{\partial x_Q}\right)^T \lambda_Q = 0 \quad (9-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_P} &= \frac{\partial f}{\partial u_P} + \left(\frac{\partial g_P}{\partial u_P}\right)^T \lambda_P + \left(\frac{\partial g_Q}{\partial u_P}\right)^T \lambda_Q \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_P} + \left(\frac{\partial g_P}{\partial u_P}\right)^T \lambda_P = 0 \end{aligned} \quad (9-3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_Q} = \frac{\partial f}{\partial u_Q} + \left(\frac{\partial g_P}{\partial u_Q}\right)^T \lambda_P$$

$$+ \left(\frac{\partial g_Q}{\partial u_Q}\right)^T \lambda_Q = 0 \quad (9-4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_P} = g_P(x, u, P) = 0 \quad (9-5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_Q} = g_Q(x, u, P) = 0 \quad (9-6)$$

을 얻고(具體的인 式은 附錄 I 參照), (9-5)와 (9-6)이 等式制約條件인데 이 條件은 潮流計算에 의해서 滿足되며, 그 結果에서 (9-1)과 (9-2)의 $\frac{\partial g_P}{\partial x_P}$ 및 $\frac{\partial g_Q}{\partial x_Q}$ 인 자코비안 行列이 變도의 계산을 하지 않고 引用될 수 있다. 그러면,

$$\lambda_P = - \left(\frac{\partial g_P}{\partial x_P}\right)^T T^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_P} \quad (10-1)$$

$$\lambda_Q = - \left(\frac{\partial g_Q}{\partial x_Q}\right)^T T^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_Q} \quad (10-2)$$

이 결정되어 (9-3)과 (9-4)에 代入하여 함수 L 의 u 에서의 傾斜가 결정되고, 이 傾斜가 許容範圍內이면 計算이 終結되며, 아닌 경우는 傾斜法에 의하여 改善된 u 를 결정한다. 즉,

$$u_P^{new} = u_P^{old} + \Delta u_P \quad (11-1)$$

$$u_Q^{new} = u_Q^{old} + \Delta u_Q \quad (11-2)$$

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \Delta u_P \\ \Delta u_Q \end{bmatrix} = -\alpha \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial u_P} \\ \frac{\partial L}{\partial u_Q} \end{bmatrix} \quad (11-3)$$

이와같은 計算過程의 흐름이 그림 1에 圖示되어 있다. 그림에서 時間이 걸리는 부분은 段階 (2)뿐이며, 反復 計算回數의 減少가 또한 매우 필요함을 알 수 있다.

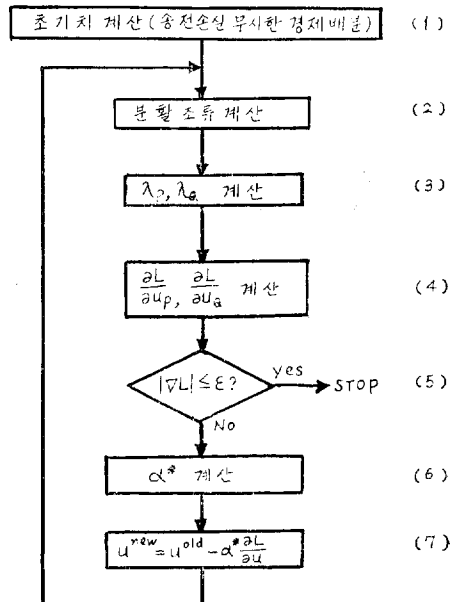


그림 1. 개략적인 계산과정

4. 不等式制約

發電機 出力이나 指定母線電壓은 주어진 上下限을 滿足해야 한다.

$$u_i^{\min} \leq u_i \leq u_i^{\max}$$

이렇게 하기 위해서, 變化를 원하는 방향을 r_i 라고 할 때,

$$r_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\partial L}{\partial u_i} < 0 \text{ and } u_i = u_i^{\max} \\ 0 & \text{if } \frac{\partial L}{\partial u_i} > 0 \text{ and } u_i = u_i^{\min} \\ -\frac{\partial L}{\partial u_i} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

인 r_i 에 대해서, $\Delta u_i = \alpha r_i$ 인 増分이 결정된다. 그러나, u_i 가 指定電壓인 경우에는, 電壓의 上下限의에 同時에 無効電力의 上下限이 滿足되어야 하므로, 페널티制約項을 고려하거나, 無効電力의 調整機能이 상실되면 그 것을 單純한 負荷로 간주하는 방법⁹⁾ 등을 고려할 수 있다.

本 論文에서는 後者의 방법을 택하였고, 이 때 無効電力 非調整 田線數의 變化에 따라서 자코비안 行列의 次元(Dimension)이 變化하므로, 이에 따라 指定電壓 母線의 數도 自動적으로 變化되도록 機能을 부여하였다. 이렇게 함으로써, 페널티制約項을 다루어야 하는 번거로움을 피하였으며, 페널티制約項이 目的函數에 미치는 영향을 排除하였고, 制約이 만족되지 않을 때의 반복되도록하는 反復計算도 피할 수 있었다.

5. 傾斜法에서의 適正스텝(Optimal Step Size)

函數가 最小化의 方向 $-\alpha \frac{\partial L}{\partial u}$ 로 u 의 값이 變化할 때, α 에 대해서 2차식으로 표시되는 것으로 假定하면,

$$L(x, u - \alpha \frac{\partial L}{\partial u}, P) = A + B\alpha + C\alpha^2 \quad (14)$$

로 표시되고, 係數 A, B, C 를 알았을 때,

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = B + 2C\alpha = 0$$

$$\therefore \alpha^* = -\frac{B}{2C} \quad (15)$$

에 의해서 適正스텝이 결정된다. 그러나, 係數를 정하는 방법에 따라서 α^* 의 표현도 달라지며 그 성질도 달라진다. 주요한 것으로 다음의 네 경우를(附錄 II 參照) 생각할 수 있다.

$$\alpha^* = -\frac{2(A-L_1)}{B} \quad (16-1)$$

$$\alpha^* = \frac{B\alpha_1^2}{2(B\alpha_1 + A - L_1)} \quad (16-2)$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha_1 L'(\alpha_2) - \alpha_2 L'(\alpha_1)}{L'(\alpha_2) - L'(\alpha_1)} \quad (16-3)$$

$$\alpha^* = \frac{4L_1 - 3A - L(2\alpha)}{4L_1 - 2L(2\alpha) - 2A} \times \alpha \quad (16-4)$$

단, $L_1 = L(\alpha = \alpha_1)$

$$L'(\alpha_2) = \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_2} (> 0)$$

$$L'(\alpha_1) = \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_1} (< 0)$$

네 식을 비교해 보면, (16-1)을 除外하고 모두, 일반적으로 매우 작은 값인 α 와의 演算을 필요로 하고 있으며, 따라서 그만큼 작은 誤差에도 민감하여 不安定할 것이 豫想된다. 특히 (16-3)에서는 L 의 微分을 사용하기 때문에, 微分이 解析적으로 正確히 表現되는 경우에는 상관 없으나, 本 論文의 경우 基準母線의 有効出力이 다른 母線의 상태에 따라서 민감하게 영향을 받고, 또 送電損失 및 그 變化分까지를 L 라는 函數에 正確히 反映시킬 수 없기 때문에, 微分値의 解析의 表現이 상당한 誤差를 가질 수 밖에 없다. 이런 이유에서 (16-3)의 사용은 처음부터 除外하였다.

(16-2)와 (16-4)에 대해서는 여러 각도에서 試驗하여 보았으나, 결과는 어느 것이나 豫想대로 不安定하여 처음부터 解가 發散하였다.

(1-1)은 式 자체에 不安定한 要素가 없음은 물론, α^* 의 결정이 反復계산없이 단 한 번에 이루어짐으로서 計算速度가 문제가 되고 있는 本 論文에 매우 適合하다고 할 수 있다.

6. 實規模系統에의 適用

母線數 51, 5,200[MW]의 負荷水準 및 154[kv]와 345[kv]의 連系系統에 대하여 適用하였다.¹⁰⁾

表 1에 費用에 대한 結果를, 表 2에 無効電力에 대한 結果를 收錄하였다.

表 1에서, 經濟配分된 初期值(送電損失을 무시한 經濟負荷配分)를 基準으로 해서, 本 結果는 0.509[%]의 費用節減을 達成하였으며, 이 값은 1日 燃料費 16億 [원]에 대하여 年 29.7億 [원]의 金額에 해당된다.

無効電力에 대한 表 2의 結果는 모든 母線電壓이 平準化되려는 傾向을 보여주고 있으며, 막연히 높은 電壓만을 維持하려는 一般의인 概念이 잘 못 되었음을 나타내고 있다. 母線番號 35와 41인 경우에는 낮은 電壓을 높여주고 있다.

역시 實規模系統인 母線數 14, 4,575[MW]의 負荷水準 및 220[kv]와 345[kv]로 構成된 系統에 대한 適

기준부하=52.02
단위=P.U.

表 1. 費用 計算 結果

반 복 회 수	비 용	송 전 손 실	α^*	비 고
0	10083.9	0.993842	—	경제배분된 초기치(기준)
1	10051.5	0.962416	2.65116×10^{-3}	
2	10037.4	0.949473	7.26377×10^{-4}	
3	10034.7	0.956183	7.1979×10^{-4}	
4	10032.6	0.957878	1.35745×10^{-4}	20.509[%] 절감

表 2. 母 線 의 電 壓 變 化

단위=P.U.

모선번호	초 기 전 압	최 종 전 압	비 고	모선번호	초 기 전 압	최 종 전 압	비 고
1	1.0	0.999639	—	27	1.036424	1.043672	▲
2	1.029575	1.0279575	—	28	1.023333	1.023333	—
3	1.016260	1.015654	▽	29	0.933310	0.934320	▲
4	1.012147	1.011957	▽	30	0.944880	0.934878	▽
5	0.992652	0.991533	▽	31	0.980633	1.000475	▲
6	0.996932	0.995712	▽	32	1.007382	1.032347	▲
7	1.022231	1.022221	—	33	1.004243	1.027541	▲
8	0.955666	0.963771	▲	34	0.945139	0.952777	▲
9	0.986743	0.987993	▲	35	0.906424	0.912815	▲
10	1.0	1.0	—	36	1.009074	1.006751	▽
11	0.971779	0.970479	▽	37	1.06239	1.025711	▲
12	1.009326	1.008512	▽	38	1.023512	1.036165	▲
13	1.006908	1.005749	▽	39	1.014979	1.036318	▲
14	1.014454	1.013878	▽	40	1.029486	1.039977	▲
15	1.001911	1.0	▽	41	0.915587	0.924288	▲
16	0.972304	0.971634	▽	42	0.987717	0.964278	▽
17	1.005248	1.003711	▽	43	0.991446	0.971689	▽
18	0.993228	0.992282	▽	44	1.039925	1.026218	▽
19	0.986145	0.988321	▲	45	1.018888	1.015546	▽
20	1.0	1.003702	▲	46	0.975075	0.977252	▲
21	1.014449	1.013428	▽	47	1.030177	1.027213	▽
22	1.0	1.002416	▲	48	0.977934	0.981615	▲
23	1.023232	1.039637	▲	49	0.989955	0.988983	▽
24	1.023037	1.049999	▲	50	1.012275	1.010697	▽
25	1.027903	1.025065	▽	51	1.03	1.0	▽
26	1.0	1.0	—				

註 : ▽=감소, ▲=증가, —=불변

用結果는, 有効電力단의 最適化에 의해서 불과 0.03 [%]의 費用節減을 얻었음에 대해서, 有効電力과 無効電力을 同時에 最適化하는 경우에 0.237[%]의 費用節減을 達成하여, 有効電力단에 의한 경우보다 무려 10 배의 利得을 보여 주었다.

한 편, 計算時間은 FACOM BOS/VS를 사용하여 演算時間 6分5秒가 所要되었는바, 여기에는 서브루우틴의 出入時間과 入力資料의 계산시간이 포함되어, 最

適化 및 潮流計算만에 소요된 시간은 反復回數 1回當 10[秒]정도로써 初期值 計算을 除外한 4회의 反復收斂에 대해서 40[秒]가 所要되었다. 현재의 온라인용 計算은 이보다 10배 이상의 빠른 速度로 進行되기 때문에 計算機에 의한 所要時間은 4[秒]정도가 豫想되어, 分單位가 對象이 되는 經濟運用에 능히 實用化가 가능한 것으로 展望된다.

7. 結 論

本論文에서는 이미發表되어 있는 最適電力潮流計算⁵⁾ 알고리즘을 擴張하여 分割最適電力潮流計算 알고리즘을 開發하여 實規模系統에 適用하였으며, 그 主要結果는 다음과 같다.

- 1) 分割潮流計算에 의하여 最適化의 目標을 達成하였다.
- 2) 傾斜法에서의 主要因子가 되는 正스텝 α^* 의 特性을 明白히 하였다.
- 3) 開發된 本 알고리즘을 實規模系統에 適用하여, 年約 30億[원]의 費用節減을 達成하였고, 系統 전체의 電壓프로필을 改善할 수 있었다.
- 4) 有効電力과 無効電力의 同時 最適化가 반드시 필요함을 보였고, 本 알고리즘에 의하면 별도의 無効電力制御는 필요치 않다.
- 5) 本 알고리즘의 온라인 適用可能性을 提示하였다. 그러나, 變壓器의 負荷時電壓調整裝置의 自動制御는 本 論文에서 다루지 못하였으며, 今後 우리나라의 154-345[kv]의 彈力的인 運用을 위해서 이 부분이 더 研究되어야 할 것이며, 潮流計算프로그램을 整備하여 온라인 適用이 더욱 확실하도록 개선할 필요가 있다.

參 考 文 獻

[1] W.D. Stevenson, Jr.: "Elements of Power System Analysis" 3rd Ed. McGraw-Hill Kogakusha 1975

[2] H.H. Happ: "Optimal Power Dispatch-A Comprehensive Survey" IEEE Trans. PAS-96, pp. 841~854, 1977

[3] T. Dillon and K.Morstzyn: "Active and Reactive Load Scheduling in a Thermal Power System in the Presence of Top-changing Transformers using Nonlinear Programming" EE Trans. Australia, pp. 67~70, 1972.

[4] A.M. Sasson "Combined use of the Powell and Fletcher-Powell Nonlinear Programming Methods for Optimal Load Flow" IEEE Trans. PAS-88, pp. 1530~1537, 1969

[5] H.W. Dommel and W.F. Tinney: "Optimal Power Flow Solutions" IEEE Trans. PAS-87, pp.1866~1876, 1968

[6] J.L. Bala, Jr. and A. Thanikechalam "An

Improved Second Order Method for Optimal Load Flow" IEEE Trans. PAS-92, pp.1239~1244, 1973

[7] A.M. Sasson et al "Optimal Load Flow Solution using Hessian Matrix" IEEE Trans. PAS-92, pp. 31~41, 1973

[8] B. Stott and O. Alsac "Fast Decoupled Load Flow" IEEE Trans, PAS-93, pp.859~867,1974

[9] 梁興錫, 朴永文 "報告書—韓電 온라인 過負荷감시 프로그램의 개발에 관한 연구" 1976

[10] 梁興錫外, "報告書—最適電力潮流計算 프로그램 개발에 관한 연구" 1979. 2.

[11] 關根泰次, "電力系統解析理論" pp.199~234 日本電氣書院 1975

[12] R.L. Fox "Optimization Methods for Engineering Design" pp. 51~56, Addison-Wesley 1969

<附錄 I : 式 (14)~(15)>

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{p_i}} &= \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \\ &\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + b_i p_i + c_i p_i^2) + a_s + b_s p_s + c_s P_s^2 \right\} \\ &= (b_s + 2c_s p_s) \frac{\partial p_s}{\partial \theta_i} \\ &= (b_s + 2c_s p_s) |V_s V_i Y_{ij}| \\ &\quad \sin(\theta_{ij} - \delta_j) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{q_i}} &= \frac{\partial f}{\partial V_j} V_j \\ &= (b_s + 2c_s p_s) \frac{\partial P_s}{\partial V_j} V_j \\ &= (b_s + 2c_s p_s) |V_s V_j Y_{ij}| \\ &\quad \cos(\theta_{ij} - \delta_j) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_{p_m}} &= \frac{\partial f}{\partial p_m} = b_m + 2c_m p_m \\ \frac{\partial f}{\partial u_{q_m}} &= \frac{\partial f}{\partial V_m} V_m \\ &= (b_s + 2c_s p_s) |V_s V_m Y_{im}| \\ &\quad \cos(\theta_{im} - \delta_m) \end{aligned} \tag{19}$$

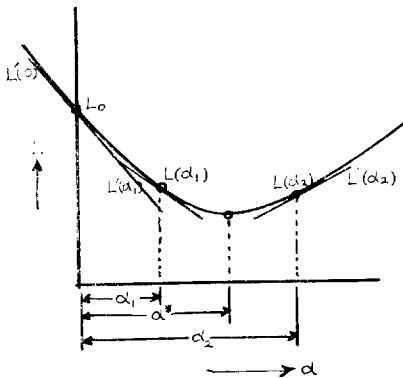
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_{p_m}} &= \frac{\partial L}{\partial p_m} = b_m + 2c_m p_m - \lambda_{p_m} \\ \frac{\partial L}{\partial u_{q_m}} &= \frac{\partial L}{\partial V_m} V_m \\ &= \frac{1}{V_m} \{ (b_s + 2c_s p_s) |V_s V_m Y_{im}| \\ &\quad \cos(\theta_{im} - \delta_m) \\ &\quad + \sum_i \lambda_{q_i} \sum_i |V_i V_i Y_{ii}| \\ &\quad \sin(\theta_{ii} + \delta_i - \delta_i) \} \end{aligned} \tag{20}$$

(9-1) 및 (9-2)에서의 $\frac{\partial g_p}{\partial x_p}$ 및 $\frac{\partial g_0}{\partial x_0}$ 는 潮流計算의 結果에서 얻어지는 자코비안(Jacobian)이므로 그대로 引用해서 사용한다.

<附錄 II : 適正스텝 α^* 의 決定>

函數 L 을 最小化의 方向으로 2次式으로 假定하면, 그림 2와 같이 되어, L 이 最小로 되는 α^* 가 存在한다. 즉,

$$L(\alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2$$



따라서 係數 A, B, C 를 결정하려면 3개의 정보가 必要하다.

$$L(\alpha=0) = A = L_0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = B - 2C\alpha \Big|_{\alpha=0} = B \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \text{또 } L(\alpha) &= L_0 + \sum \frac{\partial L}{\partial u_i} \Delta u_i \\ &= L_0 - \alpha \sum \left(\frac{\partial L}{\partial u_i} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{결국 } \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = B = -\sum \left(\frac{\partial L}{\partial u_i} \right)^2 \tag{25}$$

係數 C 를 정하는 것이 문제인데, 다음 방법들을 생각할 수 있다.

$$1) L(\alpha=\alpha_1) \triangleq L_1 = A + B\alpha_1 + C\alpha_1^2 \tag{26}$$

$$\therefore \alpha_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(A - L_1) \cdot C}}{2C}$$

그런데 根號의 內部가 零이면

$$\alpha_1 = -\frac{B}{2C} = \alpha^*$$

이므로 C 가 결정된다.

$$C = \frac{B^2}{4(A - L_1)} = \frac{B^2}{4(L_0 - L_1)} \tag{27}$$

$$\therefore \alpha^* = -\frac{2(L_0 - L_1)}{B} \tag{16-1}$$

2) (26)식에서 直接¹¹⁾

$$C = \frac{L_1 - A - B\alpha_1}{\alpha_1^2}$$

$$\therefore \alpha^* = -\frac{B}{2C} = \frac{B \cdot \alpha_1^2}{2(B\alpha_1 + L_0 - L_1)} \tag{16-2}$$

그러나 이 α^* 는 같은 (26)식에서 求하긴 했으나, 本 文에서 言及한 바와 같이 不安定하였다.

3) 微分値를 使用하여¹¹⁾

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = B + 2C\alpha_1 < 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = B + 2C\alpha_2 > 0$$

인 α_1 과 α_2 에 대해서, B 와 C 를 구하면,

$$B = \frac{\alpha_1 L'(\alpha_2) - \alpha_2 L'(\alpha_1)}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$2C = \frac{L'(\alpha_1) - L'(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$\therefore \alpha^* = \frac{\alpha_1 L'(\alpha_2) - \alpha_2 L'(\alpha_1)}{L'(\alpha_2) - L'(\alpha_1)} \tag{16-3}$$

4) 3개의 값으로부터¹²⁾,

$$L_0 = A$$

$$L(\alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2$$

$$L(2\alpha) = A + 2B\alpha + 4C\alpha^2$$

이상 세 식에서,

$$A = L_0$$

$$B = \frac{4L(\alpha) - 3A - L(2\alpha)}{2\alpha} \tag{28}$$

$$C = \frac{L(2\alpha) + A - 2L(\alpha)}{2\alpha^2} \tag{29}$$

$$\therefore \alpha^* = \frac{4L(\alpha) - 3A - L(2\alpha)}{4L(\alpha) - 2L(2\alpha) - 2A} \cdot \alpha \tag{16-4}$$