

< 論 文 >

구속표면을 가지는 반무한체에 대한 평저편치의 압입의 연구

金 東 垣*

(1979年 6月 27日 接受)

Study of Flat Punch Indentation to Semi-infinite Body with Partially Constrained Free Surface by Moire Method

Dong Won Kim

Abstract

Experimental and numerical results concerning the flat punch indentation to semi-infinite body with partially constrained free surface are presented. The distributions of slip line directions are predicted by Moire fringe analysis using Vinckier's method.

A numerical study is made of the same problem by finite element method and the results are compared with the experimental results.

It is shown that the contour feature of possible slip line field is similar to that of well-known Prandtl indentation solution.

1. 서 론

압입현상은 재료의 경도시험과 밀접한 관련이 있으며 재료의 가공 성형과도 관계가 있다. 평저(平底) 편치의 반무한체에 대한 압입 문제를 강소성체(剛塑性體) 이론으로 다룬 연구에는 Prandtl의 유명한 슬립라인해와 Hill의 수정해가 잘 알려져 있다.¹⁾

일반적으로 편치의 압입문제에서 재료를 탄소성체로 가정하여, 이론적으로 해석하는 것은 매우 힘들므로, 상기한 슬립라인해의 가치는 과소평가 될 수 없는 것이며, 특히 항복점하중이나, 압입시의 재료 유동등을 살펴볼데 있어 극히 유용하다. 한편 평저편치의 양측의 자유표면의 일부가 강체 구속을 받는 경우의 압입 문제 (Fig. 1)에 대하여는 아직까지 연구업적이 거의 없으며,²⁾ 슬립라인해는 미지로 남아있다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 경우의 슬립라인해를 얻는 것을 궁극적인 목적으로 삼고, 이와같은 슬립라인해의 특징을 구명하고자, 모아레법에 의한 실험적수법과 유한요소법에 의한 압입시험의 시뮬레이션을 통

*正會員, 서울大學校 工科大學

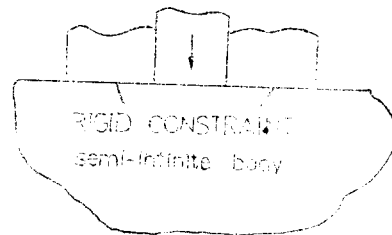


Fig. 1. Flat punch indentation to semi-infinite body with partially constrained free surface.

하여, 가능한 슬립라인장의 특징을 살펴보는 데 주력하였다. 이리하여 먼저 모아레 격자를 프린팅하여둔 알루미늄의 분할 시편을, 특별히 설계 제작한 압입 시험 장치에 넣어, 평면스트레인 조건하에서 압입시험을 수행한 후, 변형된 시편의 모아레 무늬를 관찰, 촬영하여 Vinckier 법³⁾에 의하여 최대전단 응력 방향 분포를 분석하였다.

또한 Yamada 등이 개발한 평면 문제에 대한 탄소성 해석 프로그램⁴⁾을 이용하여, 상기한 모아레 시편의 압

입시험에 대응한 유한요소법에 의한 수치 해석을 수행하여 모아레 실험 결과와 비교하였다. 이리하여 상기 문제의 슬립라인해에 관한 유용한 특징을 부분적으로 구명하였으며, 본 연구에서의 수법이 슬립라인해의 전면적 예측에 유익한 자료를 제공할 수 있음을 알게 되었다.

II. 실험

2.1 실험방법

2.1.1 실험장치 및 실험 방법

Fig. 2와 같은 특별히 설계 제작한 압입장치를 사용하여 2개로 분할한 시편 ①의 분할면에 수직인 방향의 변형을, 견고한 강철 상자형 용기속에서 구속판과 볼트로 구속하여 평면스트레인 조건을 충족 시키도록 노력하였다. 또한 구속 표면은 펀치 ②를 관통시킬 수 있는 구속편 ③으로 실현하였다. 펀치의 압입은 30t 유압식 만능시험기로 행하였다.

압입량은 다이얼 계이저로 측정하여 펀치의 하강량이 미리 정한 압입량에 달하면 바로 제하(除荷)하였다. 펀치 압입량은 0.8—1.5mm 범위로 주었다. 또 시험편과 펀치는 표면을 아세톤으로 탈지 하였으며 펀치 양측의 구속편과 시험편의 접촉면은 존슨 왁스(Johnson's wax. No. 122)로 윤활하였다.

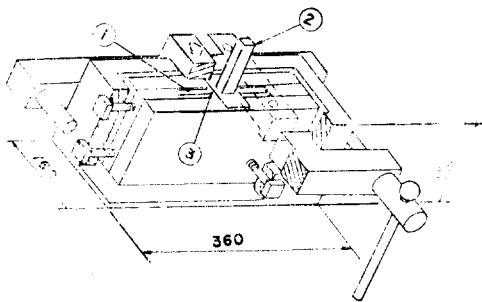


Fig. 2. Schematic drawing of experimental apparatus. ① Specimen, ② Punch (indenter), ③ Constraining plate

2.1.2 시편재료

시편의 순 알루미늄인고트로부터 6면체 블록을 절삭하여 얻은 다음, 압연기로 압하율 50%까지 압연하여, 두께 13mm의 판재를 만들어 이를 절단하여 소정치수의 시험편으로 가공하였다. 시험편 재료의 조성은 다음과 같다.

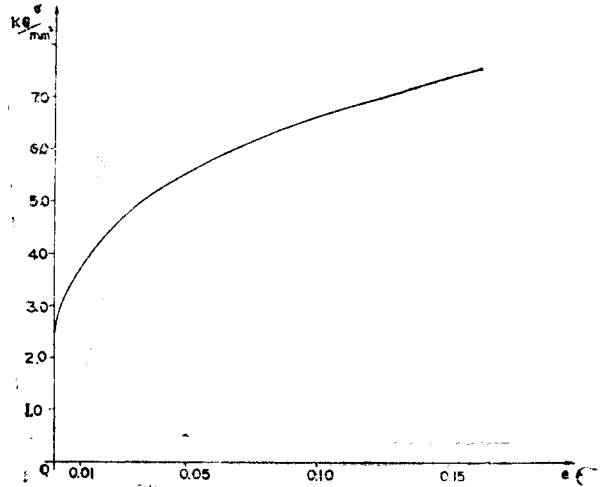


Fig. 3. Stress-strain curve of specimen material

Al 99.36%, Fe 0.23%, Cu 0.05%, Si 0.32%, Mn 0.01%, Mg 0.03%. Fig. 3은 시편재료의 인장시험에 의한 진응력 대수 스트레인곡선(어닐링상태)이다.

2.1.3 시편

직 6면체형의 분할시편의 치수는 길이 160mm, 높이 70mm, 두께 10mm로 하였다. 알루미늄 시편은 밀링가공한 후, 450°C에서 1시간 어닐링을 하였으며, 샌드 페이퍼(1500 Cw Silicon carbide 2C)로 연마한 후, 표면에 모아레용 그리드(grid)를 프린팅하였다. 그리드는 주로 리니어그리드를 채택하였고 분할시편의 한쪽에는 시편의 길이 방향으로 평행하게 리니어 그리드를 입히고, 나머지 시편에는 길이 방향에 대하여 직각으로 리니어 그리드를 프린팅 하였다. 스퀘어 그리드를 프린팅 할때는 분할 시편의 한쪽에만 그리드를 입혔다. 총 20조의 알루미늄 시편과 4조의 연(鉛) 시편을 제작하였다.

2.1.4 펀치와 구속편

펀치는 고탄소 강재(高炭素鋼材)를 사용하였으며, 표면은 연삭하였다. 그 형상은 20×20mm 단면과 12×20mm 단면의 2가지로 하였다. 구속편은 상기의 펀치 단면과 동일한 4각형 구멍을 가진 강판이며, 펀치는 이 구멍을 관통한다. 펀치 양측으로 구속편 이면에 구속 작용을 하기 위한 평행한 돌기가 마련되어 있고, 구속편은 압입장치의 상표면에 걸쳐지게 되어 있다. (Fig. 2참조) 따라서 구속편 하표면은 펀치의 운동과

상관없이 정지좌표공간내에서 일정위치에 머물게 된다.

2.1.5 변형상태의 측정

변형은 모아레 법으로 측정하였다. 시편에 그리드를 입히는 방법은 그리드 시이트를 사용하는 방법과 진공 프린팅을 하는 방법을 다같이 시도 하였다. 전자의 경우, Kyowa 제의 200line/cm의 그리드 시이트를 순간 접착제(CC-15A)로 시편에 붙인다음, 시이트를 벗기고 그리드만을 남기도록 하였다. 후자는 회전도로 진조기로 시험편에 감광액을 도포하여 진공 프린팅 장치내에서 시편과 그리드 원판을 밀착 시켜 로광(露光)을 행하고 현상, 염색하여 시편에 그리드를 입히는 방법이다.

사용한 장치는 TOKYO TESTING MACHINE Co. 제의 모아레무늬 스트레인 측정장치 일식이다. 결과적으로 전자의 경우가 다소 무늬가 선명한 편이나, 시편에 접착제가 불필요하게 접착되는 경향이 있고, 이의 제거가 용이하지 않으며, 분할 시편의 상호 밀착을 해치는 결점이 있다. 이리하여 대부분의 시편에서 후자의 방법이 주로 사용 되었다.

2.2 모아레무늬에 의한 변형의 해석

모아레법에 의한 변형의 해석 방법에는 여러가지가 있으나 본 연구에서와 같이 궁극적으로 슬립라인해의 발견에 주목적을 두는 경우, Vinckier의 해석 방법⁵⁾은 가장 직접적이고 효과적이다. 이 방법에 의하면 한쪽의 분할시편에 각각 수평 및 수직 방향의 평행선 그리드를 입힌다음 변형 후 생긴 한쪽의 모아레무늬 사진을 분석하면 된다. 변형이 미소한 경우 Vinckier의 이론으로부터 최대전단 응력 방향을 다음식으로 구할 수 있음이 알려져 있다.⁵⁾

$$\tan 2\phi = \frac{2}{\tan \beta_x - \tan \beta_y} \quad (1)$$

여기서 ϕ 는 최대전단 스트레인(또는 최대전단응력) 방향(수평축인 x 축에 대한 경각)을 나타내며, 그 방향

은 β_x, β_y 의 측정만으로 구하여 진다. β_x, β_y 는 모아레 무늬의 그리드 방향에 대한 각도(부록, Fig. 12참조)이므로 모아레무늬의 수가 적더라도, 비교적 정확하게 많은 점에서의 측정이 가능하다. 이 방법은 본래의 Vinckier의 방법보다도 간편하고 슬립라인의 방향분포를 구하는데 유용하게 이용 될 수 있으므로 본 연구에서도 이방법을 사용하였다. 구체적인 측정 방법으로는 한쪽의 변형후의 모아레 무늬 사진에서 수평 그리드(x 의 그리드) Fig. 12(a)에서는 좌반부, 수직그리드(y 의 그리드, (Fig. 12(b))에서는 대응하는 우반부의 30mm×30mm의 구역을 측정 대상으로 삼았다. 이들 구역은 각각 시편의 수직 중심선과 시편상면에 접한 구역이다. 수평 그리드의 경우는 이구역에서 2mm 간격의 수직선을 따라가며 이들 수직선과 모아레 무늬와의 교점에서의 β_x 를 측정하고, 각 수직선상에서 측정치를 최소자승법으로 커브트 핏팅(curve fitting)한다음, 수직선상의 2mm 등간격점에서의 값을 계산으로 구하였다. 수직 그리드의 경우는 반대로 같은 구역에서 2mm 간격의 수평선을 따라가며, 이들 수평선과 모아레무늬와의 교점에서의 β_y 를 측정하고, 각 수평선상에서, 커브트 핏팅 한다음 수평선상의 2mm 등간격점에서의 값을 계산으로 구하였다. 이리하여 이 측정구역에서는 x, y 의 2mm 간격마다 β_x 와 β_y 값을 알게되고 (1)식으로 ϕ 값을 계산 하였다. β_x 와 β_y 의 측정은 모아레무늬를 촬영한 필름을 전용의 사진확대 투영기(Moire Pattern Coordinate Measuring Device, TYPE MTTA-1-1, TOKYO TESTING MACHINE MFG. CO. LTD.)에 올려놓고 각도 측정용 원판을 돌려가며 측정하였다. 이 사진확대투영기는 디지털 마이크로미터와 디지털 카운터 및 프린터를 가지고 있어, 사진상의 직선 거리는 1 μ 까지도 읽을 수 있게되어 있다.

2.3 실험결과

Fig. 4.5는 이와 같은 실험으로 얻은 시편의 모아레

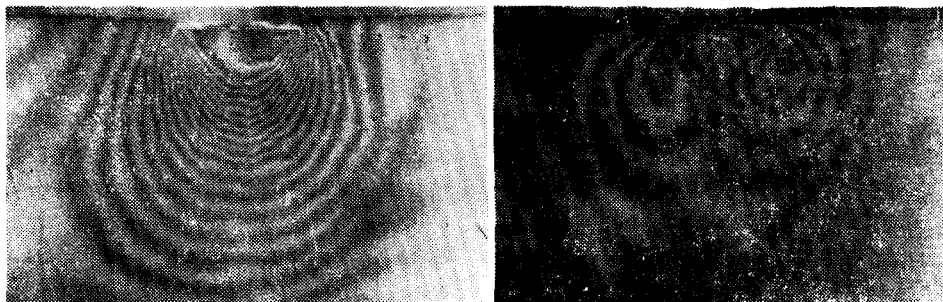
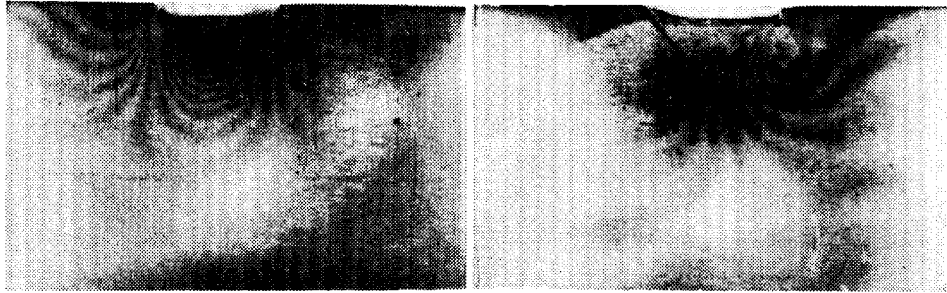


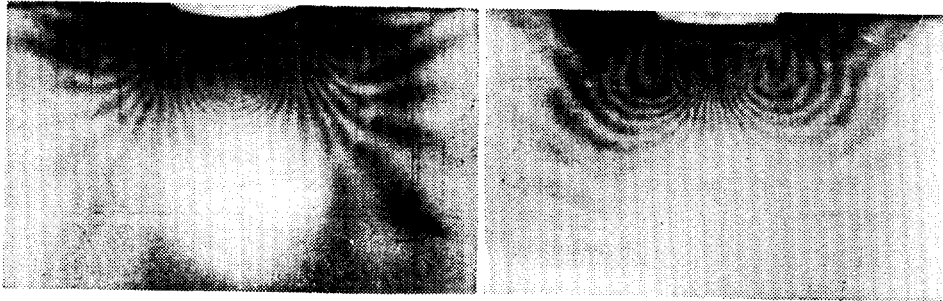
Fig. 4. Moiré fringe ($P/R=20/10$) at light indentation



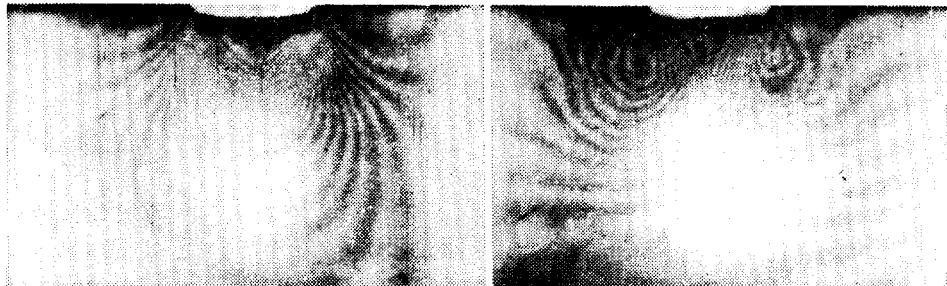
(a) $P/R=12/8$ (no prestrain)



(b) $P/R=20/10$



(c) $P/R=20/15$



(d) $P/R=20/5$

Fig. 5. Moiré fringe at heavy indentation

무늬 사진들이다. 이들은 쇄기형 펀치로 평면스트레인 조건하에서 수행한 압입시험에서 Nakamura⁵⁾ 등이 얻은 모아레무늬 사진들과 대체로 흡사하다. 그러나 쇄기형 펀치의 경우에 비하여 펀치좌우의 표면 근처의 변형이 훨씬 발달되어 있다. 이리하여 펀치 형상이나 경계조건의 차이에도 불구하고 변형 양식에도 일련의 공통성을 가질 가능성이 있다.

변형은 구속이 없는 경우의 잘 알려진 슬립라인장해로 예상되는 변형 영역에 비하면 압입 방향으로 깊이 변형이 확대되어 있다.

실험에 있어서 시험편의 전반적 변형을 살피기 위하여, 실험전과 직후에 시험편의 길이를 시험 높이에 따라 수개소에서 측정하였던바, 실험전후의 길이 변화는 평균적으로 0 ± 0.1 mm 범위에 분포 되어 있었다.

슬립라인장에 상당하는 최대전단스트레인선을 찾는 데 가장 적합한 변형증분을 찾기 위하여 1차 압입량 (prestrain)을 1.5~3.0mm, 2차 압입량(변형증분)을 0.6~1.0mm 사이에서 수단제로 변화시켜 실험한 결과 일차 압입량이 가장 큰 3.0mm의 경우라도 2차 압입량이 0.6mm 정도에서는 변형이 불충분하여 모아레무늬를 얻기가 곤란하였다. 대체로 1차 압입량 1.5~2.0mm, 2차 압입량은 1.0~1.5mm 범위가 적당함을 알았으며 Fig. 4는 1차 압입량 1.5mm 2차 압입량 1.0mm의 경우, Fig. 5, (a)는 1차 압입량 0.2차 압입량 1.0mm의 경우이며, (b), (c), (d)는 1차 압입량 2.0mm, 2차 압입량 1.5mm의 경우이다.

1차 압입량을 주는 경우는 압입후 다시 시험편을 연마한 다음 모아레 그리드를 프린팅하여 2차 압입량을 주었다. 압입량의 증감에 따라 변형의 기본 모양드는 큰 변화가 없으나, 변형 영역은 확대되는 경향이 뚜렷하다.

구속편과 시험편간의 윤활은 무윤활의 경우와 손쉬운 윤활을 도포하는 경우의 두가지로 실험하였으나, 일반적으로 마찰 상태의 다소의 변화는 변형에 거의 영향을 미치지 않는 것으로 나타났으며, Nakamura⁵⁾ 등의 쇄기형 펀치의 압입실험에서 관찰한 결과와 일치한다.

Fig. 6. 의 (a), (b), (c) 및 (d)는 최대전단 응력방향 (슬립라인 방향) 분포이며, 각각 Fig. 5의 (a), (b), (c), (d)에 대응한다.

최대전단 응력 방향은 제 2절에 설명한 방법으로 모아레무늬 사진의 분석결과로 얻은 ϕ 값을 디지털 플롯터(Tektronix 4661)로 직접 그리게 한 것이다. 가능한 슬립라인장의 모양은 구속이 없는 경우의 잘 알려진 Prandtl의 초기항복시의 슬립라인해와 흡사한 윤곽을

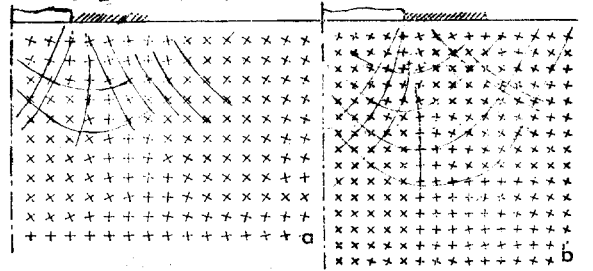
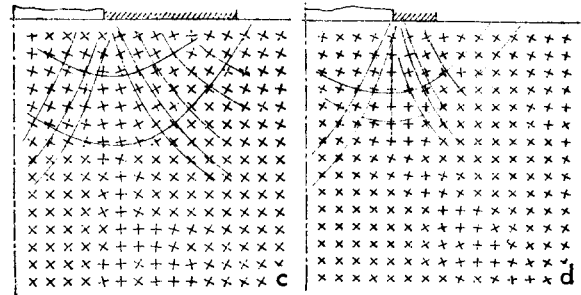
(a) $P/R=12/8$ (no prestrain)(b) $P/R=20/10$ (c) $P/R=20/15$ (d) $P/R=20/5$

Fig. 6. Distributions of maximum shear stress directions by Moire analysis.

가지며, 전기한 쇄기형 펀치의 경우의 모아레무늬로부터 분석한 슬립라인장파도 유사성을 가짐을 알 수 있다. 또한 전반적인 슬립라인장의 모양은 펀치폭/구속폭(P/R)의 비에 불구하고 공통적인 유사점을 가지고 있음을 알 수 있다. 그러나 유심선형부(有心扇形部)에 해당하는 중심부에서 좌우의 경계슬립라인의 골물반경의 부호가 반대가 되어 있는 것은 주목할 점이며, 이는 (b)의 경우 특히 명확하게 나타나 있다. 이것은 이 선형부 내에 응력불연속선의 존재를 암시하는 것으로 생각된다.

한편 이상과 같은 전반적인 특징에도 불구하고, 구속표면 근처의 슬립라인장의 모양은 불확실하며, 보다 정밀한 실험이 요청된다.

Ⅲ. 유한요소법에 의한 해석

모아레실험은 정밀도에 한계가 있으며, 특히 모아레 시험편은 AI 재료로서 현실적인 탄소성재료 이므로 모아레 실험 결과에는 탄성변형의 영향이 작용하고 있다.

본 연구는 강소성체 가정에 입각한 슬립라인해의 구득에 궁극적인 목표를 두고 있으므로, 강소성체를 전체

로한 유한요소법에 의한 수치 해석도 유효한 연구방법이 될 수 있을 것으로 생각하여 이하에서와 같이 수치 해석을 수행하였다. 사용한 계산 프로그램은 Yamada⁴⁾ 등이 개발한 증분 이론에 입각한 평면문제의 탄소성 해석프로그램이며, 3각형 1차요소를 채용하고, 연립 1차 방정식의 해법에는 공역경사법을 사용하고 있다. 이 프로그램은 3각형요소를 사용하며 평면응력 문제와 평면 스트레인 문제의 어느 것이나 풀수 있고, 또 탄소성체뿐 아니라 강소성체에 대하여도 적용할 수 있다. 또 계산시간을 단축하기 위하여 하중배수의 개념을 도입하여, 매계산 단계에서의 하중증분을 조절하여 최소한 1개 이상의 요소가 항복하도록 하고 있다. 이 프로그램은 미소변형문제에는 무리 없이 사용할 수 있으며 이는 초기 항복시의 슬립라인장을 찾는 목적에는 적합한 프로그램이라고 생각된다. 수치계산에서 사용한 요소분할의 1예를 Fig. 7.에 표시한다. 직 4각형을 대각선으로 4개의 3각형으로 분할한 방식을 채용하였으며, 이는 Nagtegaal⁶⁾ 등의 최근의 제안에 따른 것이다.

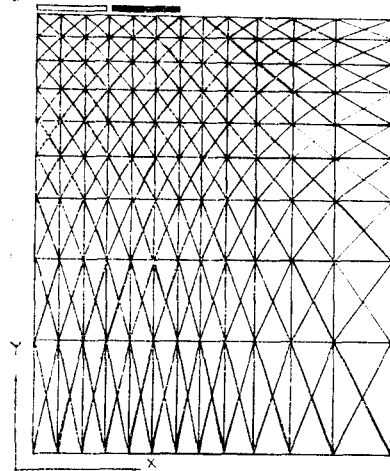


Fig. 7. Finite element mesh

계산은 KIST 전산개발센터의 IBM 3032를 사용하였으며, 계산시간은 매회 15—18분을 요하였다.

표 1. 계산 조건 (4 Cases of calculation)

계산 번호	요소수	절점수	mm 계산범위 (시편상 면적)	mm 펀치폭 2	mm 구속폭	탄소성 강소성	kg/mm ² 중탄성 계수	kg/mm ² 항복 응력	계산스 테이지 수	kg 최대 하중	항복 요소 수	펀치하 절점번호	구속폭하 절점번호
1	432	238	50×62	10	10	강소성	1×10 ⁷	5.0	90	5845	159	1, 2, 3, 4	5, 6, 7
2	432	238	40×54	6	8	강소성	1×10 ⁷	5.0	90	5220	225	1, 2, 3, 4	5, 6, 7, 8
3	432	238	40×54	10	10	강소성	1×10 ⁷	5.0	105	5701	224	1, 2, 3, 4, 5	6, 7, 8, 9, 10
4	432	238	40×54	10	10	강소성	1×10 ⁷	5.0	89	5170	222	1, 2, 3, 4, 5	6, 7, 8, 9

표 1.은 4가지의 계산예에서의 계산조건을 표시한 것이다. Fig. 7.은 표 1의 계산번호 1에 대한 것이다. 또 표중 절점번호는 Fig. 7에서 시편 표면상의 절점들로서 좌단으로부터 1, 2, 3, ...의 순서로 되어 있다.

구속부와 시편표면과의 사이는 마찰이 없는 경우에 한하여 계산 하였으며, 경계조건으로서는 펀치에 접한 절점들은 변위가 지정되는 것으로 하고, 구속부에 접하는 절점들은 원칙적으로 수직변위가 없고 수평변위는 자유로운 것으로 가정하였다.

계산번호 1과 2의 차이는 구속폭의 차이뿐이며, 계산번호 3, 4와 1과의차는 후자의 경우 펀치 및 구속부를 합한 수평방향폭을 6등분한데 비하여 전자에서는 9열로 분할한 점이다. 계산번호 3과 4의 차이는 후자의 경우, 절점 6과 7을 수직방향으로 구속하지 않고 자유로운 변위를 허용한 점이다. 이와 같이 하므로써 응력

특이점인 펀치와 구속부와의 경계점에서의 응력 상태가 보다 신뢰성이 높게 계산됨을 확인할 수 있었다. 이 계산 프로그램이 원래 탄소성 해석프로그램으로 작성되어 있으므로, 중 탄성계수(Young 을)를 1×10⁷kg/mm²로 크게 줌으로써 강소성체근사를 피하였다. 계산 진행결과 항복역이 확대되어, 어떤 단계에 이르르면, 전면적인 제하(除荷)가 일어나고 계산은 자동적으로 정지된다. 표중 계산스테이지수는 이와같은 계산종료시의 계산스테이지(stage) 수이며, 최대하중은 이때의 펀치하중치, 항복요소수는 이때까지의 항복 요소의 총수이다.

Fig. 8.은 계산번호 1의 경우의 소성항복의 진행상황을 나타내며, 모아레실험에서 관찰한 시편의 소성항복역의 모양과 매우 가깝게 일치하고 있다.

Fig. 9.는 계산번호 1의 경우의 하중—변위 선도

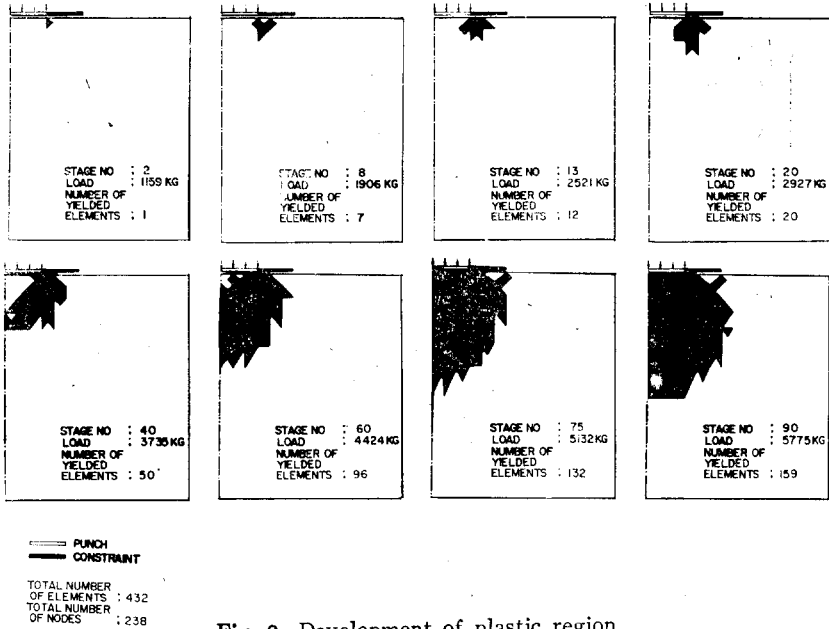


Fig. 8. Development of plastic region

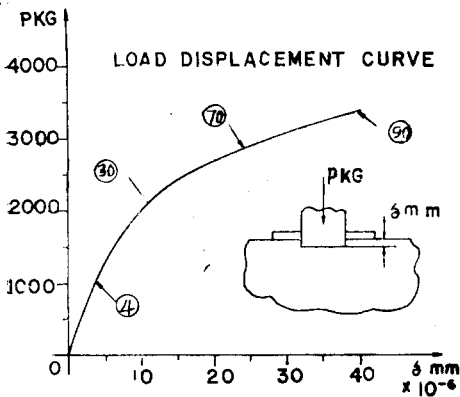


Fig. 9. Load-displacement curve

이다. 다음 이들 계산 결과로 얻은 응력분포로부터 각 요소에서의 최대전단응력 방향을 계산하여, 전기한 디지털플로터로 최대전단응력방향(슬립라인 방향)을 기록시켰다. (Fig. 10, 11). 슬립라인 방향을 나타내는 십자선의 중심은 각 요소의 중심점(重心點)에 취하였다.

Fig. 10은 표 1의 계산번호 2에 대한 것이며, Fig. 11은 계산번호 1을 개량한 계산번호 4의 경우이다.

이들을 보면 모아래 실험결과로 얻은 그림 6의 경우보다 유한 요소법으로 계산한 경우에 최대전단응력 방향분포의 보다 뚜렷한 규칙성을 보게 된다.

또한 유심 선형장의 존재를 거의 확신할 수 있다. 유

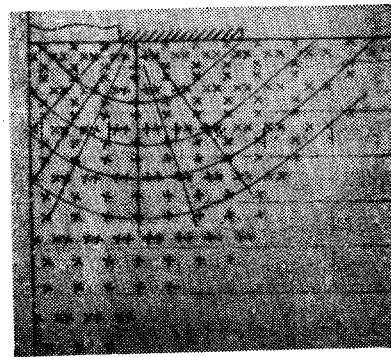


Fig. 10. Distributions of maximum shear stress directions by FEM ($P/R=12/8$)

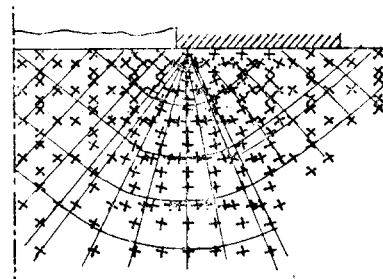


Fig. 11. Distributions of maximum shear stress directions by FEM ($P/R=20/10$)

심 선형장의 정점이 펀치 모서리에서 벗어난 것은 요소 분할에 관계가 있는 것으로 사료되며, 요소를 보다 세분하면 펀치 모서리 점에 접근할 것이다.

그러나 전반적인 슬립라인장의 윤곽이 거의 명확히 들어남에도 불구하고, 구속표면인접부의 분포상태는 불분명하다. 이는 요소 분할과 절점들의 경계조건과 밀접한 관련이 있는 것으로 보이며, 보다 자세한 연구가 필요하다.

IV. 결 론

펀치 양측에 구속표면을 가지는 경우의 평저펀치의 압입에 관한 슬립라인장을 구하기 위하여, 모아레실험과 유한요소법에 의한 수치해석을 병행하여, 다음의 사실을 밝혔다.

(1) Vinckier 법에 의한 모아레 실험결과의 해석은 시편내의 최대전단응력 방향 분포를 살피는데 유용하다.

(2) Yamada 등이 개발한 평면 문제에 관한 탄소성 해석 프로그램은 강소성체의 초기 전면항복에 대한 슬립라인장을 구명하는데 참고가 될 수 있다.

(3) 유한요소법에 의한 해석결과가 모아레법에 의한 해석결과 보다도, 슬립라인 분포의 구명에 보다 높은 정도를 가진다.

(4) 펀치 양측에 구속표면이 있는 경우에도 전체 슬립라인장의 윤곽형상은 구속이 없는 경우의 초기항복시의 프란틀(Prandtl)의 슬립라인장과 매우 유사한 것이 될 가능성이 있다. 이는 P/R의 값에 따라 큰 차이가 없다.

(5) 슬립라인장을 확정적으로 구명하려면, 구속표면 근처의 슬립라인 방향분포를 보다 세밀하게 구명할 필요가 있으며, 이는 유한 요소의 보다 세분화와, 구속부의 절점들의 경계조건의 개선이 관건이 될 것으로 사료 된다.

끝으로 본 연구는 1978년도 과학재단 연구비의 지원으로 수행되었음을 밝혀두며, 동 재단에 사의를 표하는 바이다.

또한 본연구 수행에 협력하여준 서울대학교 공과대학 대학원생들, 특히 조덕성, 김형원, 최형철, 김권희 제군과 실험장치 제작에 노고가 컸던 기계설계학과 유지현씨에게 사의를 표한다.

참 고 문 헌

1. R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*,

Chap. 9. pp. 254, Oxford at the Clarendon Press. 1971.

2. 金東垣, 拘束條件을 가지는 半無限體에 對한 押入에 關한 研究, 대한기계학회지 제15권, 제1호, pp. 41~49, 1975.

3. A. Vinckier and R. Dechaene, Use of the Moiré Effect to Measure Plastic Strains, *Trans, ASME*, D. 82, pp. 426~434, 1960.

4. 山田嘉昭, コンピュータによる 構造工學講座 II -2A, 塑性・粘彈性, pp 180, 培風館, 1972.

5. M. Nakamura and Y. Tozawa, On Metal Flow by Indentation of the Indentor under Plane Strain Condition, *J. Jap. Soc. Tech. Plast.* Vol. 17. No. 180., pp. 23, 1976.

6. J.C. Nagtegaal, D.M. Parks and J.R. Rice, On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 4., pp. 153-177, 1974.

부 록

(1) 식의 유도

Fig. 12는 이때 변형된 그리드와 미변형으로 좌표축에 고정된 그리드 및 그로부터 생긴 모아레 무늬를 나타낸다. 그러면 겹보기의 스트레인 e'_x, e'_y 는 다음식으로 표시 된다.

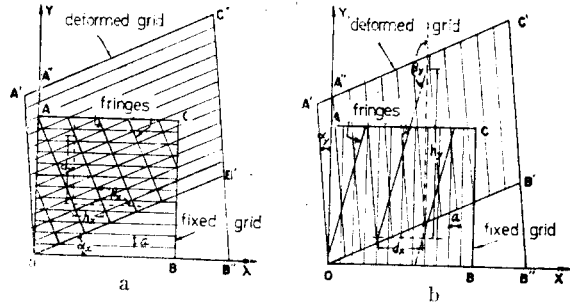


Fig. 12. Notation used in Moire strain analysis.

(a) group of lines parallel to x-axis (x-grid)

(b) group of lines parallel to y-axis (y-grid)

$$e'_x = \frac{a}{d_x - a}, \quad e'_y = \frac{a}{d_y - a} \quad (1)'$$

대수 스트레인 ϵ_x, ϵ_y 는 e'_x, e'_y 와 진정한 공칭스트레인 ϵ_x 와 ϵ_y 와의 관계로부터 다음식으로 계산된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= l_n(1 + e_x) = l_n \{ (1 + e'_x) \cos \alpha_y / \cos(\alpha_x - \alpha_y) \} \\ \epsilon_y &= l_n(1 + e_y) = l_n \{ (1 + e'_y) \cos \alpha_x / \cos(\alpha_x - \alpha_y) \} \end{aligned} \quad (2)'$$

또 전단스트레인 γ_{xy} 는

$$\gamma_{xy} = \tan(\alpha_x - \alpha_y) \quad (3)'$$

여기서 α_x, α_y 는 다음식으로 계산된다.

$$\tan \alpha_x = a / \left(h_x + \frac{a}{\tan \beta_x} \right) \quad (4)'$$

$$h_x = -d_y / \tan \beta_x \quad (5)'$$

식 (1'), (4') 및 (5')로 부터

$$\tan \alpha_x = -e'_y \tan \beta_x \quad (6)'$$

마찬가지로

$$\tan \alpha_y = -e'_x \tan \beta_y \quad (7)'$$

지금 최대전단 스트레인 (또는 최대전단응력) 방향을 구하려면, 변형이 미소하므로, 식 (1')는

$$e'_x = a/d_x, \quad e'_y = a/d_y \quad (a \ll d_x, d_y \text{ 이므로}) \quad (8)'$$

식 (2'), (3')은 $\alpha_x, \alpha_y = 0$ 이므로

$$e_x = e'_x, \quad e_y = e'_y \quad (9)'$$

$$\epsilon_x = e_x, \quad \epsilon_y = e_y \quad (10)'$$

$$\gamma_{xy} = \tan(\alpha_x - \alpha_y) = \tan \alpha_x - \tan \alpha_y \quad (11)'$$

최대전단 스트레인 방향의 x 축에 대한 각도 ϕ 는 식 (9'), (10'), (11')로 부터

$$\tan 2\phi = \frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{\gamma_{xy}} = \frac{e'_y - e'_x}{\tan \alpha_x - \tan \alpha_y} \quad (12)'$$

여기서 2차원 변형의 조건 $e'_x = -e'_y$ ($=\epsilon_x = -\epsilon_y$)를 식 (12')와 (6'), (7')에 대입하여 정리하면

$$\tan 2\phi = \frac{2e'_y}{\tan \alpha_y - \tan \alpha_x} = \frac{2}{\tan \beta_x - \tan \beta_y} \quad (13)'$$