<研究論文>

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 4 No.2 December 1978

政策分析을 위한 產業部門 需給模型과 그 解法

〈An Industrial Sector Model Formulation and its Computation for Policy Analysis〉

安 柄 勳*

Abstract

A modeling framework and its computational methodology for an industrial sector of the economy are investigated. The suggested industrial sector model is characterized by a programming (process analysis) representation of a production sector and an econometric estimation of the price sensitive (own and cross-prices) demands.

By introducing the price sensitive demands into the process analysis representation of the production sector, it becomes possible to analyze and plan the pricing policy, the optimal production schedules and capacity expansion plans within a single framework.

The computational scheme suggested in the report is based on the iterative approach each of which solves a separable convex programming problem.

1. 序 論

다수의 經濟問題들이 그림(1)에 例示된 것과 유사한 模形들을 통하여 分析, 硏究되고 있다. 이 그림은 特定 商品, 즉 「에너지」를 一定期間에 對하여 例示하고 있다. 흔히 供給函數는 曲線形(smooth curve)으로 나타나지만 그림(1)에 나타난 공급곡선은 계단형함수(step function)로 表示되었다.[1]

수요와 공급은 均衡價格(equilibrium price)를 통하여 均衡을 이루며, 균형가격점은 그림에서 빗금친 면적(純經濟便益 : net economic benefits)을 最大化하는 點으로 나타난다. 이 사실은 곧 市場均衡개념과 最適化(optimization) 개념간의 유사성을 明示하고 있다. 이 유사성은 그림에 例示된 單一品目市場의 경우뿐만 아니라 多種品目市場의 경우에도 적용될 수 있다.

本稿에서는 經濟의 特定產業部門에 있어서 線形計劃法으로 表示되는 生產部門과 計量經濟技法으로 추정된 市場需要函數로 表示되는 消費部門을 同時에 다룰 수 있는 均衡模型(equilibrium model)을 設定하고 이에 수반되는 解法을 제시하고자 한다. 이러한 均衡模形은 通常使用되는 費用最小化 線形計劃模型에서 進一步한 것이라 볼수 있다. 흔히 利用되는 方法은 品目들의 市場需要量을 外生的으로 결정하고, 이를 最小費用으로 充足시키는 生產計劃 및 資源分配方式을 導出하고 있

---

* 韓國科學院

1) 생산자의 수보다는 소비자의 수가 월등 많은 경우가 많다. 따라서 소비자의 수요행태(behavior)는 통상 계량경제기법을 이용하여 통계적으로 처리되어 連續微分可能函數(continuously differentiable function)로 要約 될수 있는 반면, 生產者의 공급량은 주로 技術的인 工程分析(technological process analysis)에 의하여 推定되고 있다. 特히 生產部門이 線型計劃模型으로 되면, 限界費用曲線이 계단형함수로 표시됨은 線形經濟理論에서 잘 알려진 사실이다.

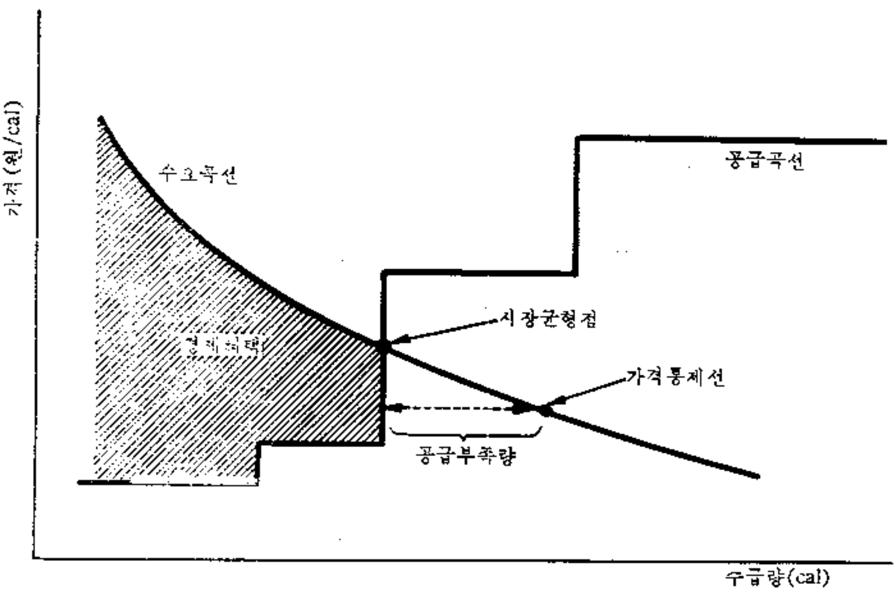

그림 1. 시장균형점과 최적화관계

다. 하지만 本稿에서 제시하는 均衡模型은 소비자의 수요행태 特히 市場價格에 대한 反應을 감안하여 적정 시장가격(균형가격)도 內生的으로 決定하여 준다. 즉 均衡模型에 제공되는 수요부문자료는 固定수요량이 아니라 價格彈力度가 있는 수요곡선이 된다. 또한 特定品目에 對한 수요곡선은 自己價格만의 함수가 아니고, 代替可能한 품목들의 가격들에도 영향을 받는다. 後에 說明이 되겠지만, 대체효과가 감안된 수요곡선을 利用할 경우는 市場均衡價格決定은 그림(1)에 例示된 단일 품목의 경우와는 달리 最適化개념과 相通되지 않는 수가 있다. 이러한 경우에는 解法上에 어려움이 있게 되며, 보다 효율적인 解法개발의 必要性이 나타나게 된다. 代替效果를 排除시킨 경우의 均衡模型設定과 그 解法들은 이미 여러著者들에 의해 硏究되었다. Duloy와 Norton은 멕시코의 농업부문을 分析함에 있어 공급부문은 선형계획모형(linear programming model)으로 표시하고, 수요부문은 品目間의 代替效果를 고려하지 않은 自己價格彈力度만을 감안한 수요곡선으로 表示하였다. 이 경우의 市場均衡價格點은 經濟잉여가치(economic surplus)가 極大化되는 점이되어, 均衡價格點을 찾는데 最適化技法을 使用할수 있었다. Kennedy도 世界原油 및 精製石油製品市場을 分析함에 있어 精油部門은 선형계획모형으로 表示하고, 精製石油製品들에 대한 수요는 線形市場需要曲線(linear market demand curve)으로 表示하였다. 그러나 Kennedy의 市場需要曲線에도 代替效果가 감안되지 않았다. 결국 이러한 수요곡선을 이용한 均衡模型은 二次函數最適化問題(quadratic program)로 바꾸어 풀수 있어 解法上 어려움이 없게 된다. 上記模型들은 自己價格彈力度를 감안하였다는 點에서 固定市場需要量(fixed demands)을 直接 模型에 入力시키는 경우에 비해 進一步했다고 볼수 있겠으나, 代替效果 또는 交叉彈力度(cross price elasticity)를 고려하지 못했다는 點에서 불때에는 最終需要品目(end-use products)間의 代替效果가 무시될 수 없는 産業部門(例 : 에너지産業의 석탄, 석유 또는 전기間의 代替可能性)에 對한 模型으로서는 適合하지 못하다 하겠다.

多數의 産業部門들에 代替效果가 있음을 고려하고, 産業政策 特히 消費部門에 關한 政策을 立案하기 위해서는 代替效果에 대한 充分한 理解가 重要문제임을 감안하여, 本稿에서는 보다 일반적인 模型을 제시하고, 이 模型을 處理할 수 있는 解法(algorithm)을 제시하고자 한다. 이 解法은 美國에너지省에서 개발한 美國에너지體系模型(PIES model)에 使用되었던 解法의 基本아이디아를 使用하였다(1976 National Energy Outlook 참조). 美에너지省 模型의 構造는 선형계획生産模型과 計量經濟的需要模型으로 要約되기보다는 多數의 小模型(submodels : crude oil model, coal supply model, refinery model, electricity generation models and various demand models)들로 이루어져 있으며, 이들을 體系的으로 連結시켜 에너지産業全般에 걸친 종합적理解를 위한 반복적解法(iterative algorithm)을 개발하였다. 이 解法의 기본개념을 利用하여 線形計劃生産——計量經濟需要로 要約시킨 産業모형에

적용될 수 있는 一般解法을 개발하여 보기로 한다.

먼저 모형을 소개하고, 그 모형의 解法上의 문제점들을 지적한 후 최종적으로 本稿의 解法을 紹介하기로 한다.

2. 產業部門 需給模型

전술한 바와 같이, 공급부분을 線形計劃法에 의한 費用最小化問題로 表示하고, 수요부문은 代替效果를 감안한 價格彈力性的인 市場需要曲線으로 要約되는 경우를 생각하자. 수요와 공급은 市場價格을 통해 相互영향을 주며 均衡價格은 수요와 공급이 平衡을 이루는 點으로 정의하자.

가. 生產部門

生產部門 特히 技術 및 資本集約的인 重化學工業등에 대한 政策은 흔히 技術的 工程分析技法(technological process analysis)을 利用한 다음과 같은 費用最小化線形計劃問題를 利用하여 分析될 수 있다.

즉, n개의 工程 또는 生產施設을 고려하면,

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&\text{minimize}\quad c^T x \quad (\text{費用最小化目的函數})\\
&\text{subject to}\quad A_r x \geqq -q_r \quad (\text{素材制約式})\\
&\qquad A_{int} x \geqq 0 \quad (\text{中間財制約式})\\
&\qquad A_d x \geqq q_d \quad (\text{需要制約式})\\
&\qquad x \geqq 0
\end{aligned}
$$

로 表示된다.

위에서 q_r은 素材들의 공급가능량을 나타내는 벡타이고, q_d는 最終生產品目들의 市場需要量을 나타내는 벡타이며, $c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$는 工程들을 單位용량 운영하는데 필요한 諸般費用(賃金, O & M 費用等)을, $x=(x_1, \cdots x_n)$는 各工程의 生產水準을 나타내며, A_r, A_{int} 및 A_d는 각기 단위 공정作動時 필요한 素材量, 中間財量 및 最終製品算出量을 表示하는 I—O 係數들을 나타낸 行列(matrix)들이다. 市場需要量을 變化시키면 그에 對應하는 工程別 最適生產計劃量도 바뀌게 되며, 現在 q_d는 常數値로 주어진 形態이지만 후에 市場需要函數 $Q_d(\cdot)$가 주어지면, q_d는 $Q_d(\cdot)$로 代置되게 된다. 附記하여 둘 것은 需要制約式 $A_d x \geqq q_d$에 對應하는 雙對最適解(v_d라 하자)(optimal dual variables 또는 shadow prices)는 長期限界生產費用(long run marginal costs of production), 더나아가 自由경쟁體制下에서의 供給者價格으로 간주될 수 있다.

나. 需要部門

市場需要曲線은 主로 計量經濟技法에 의한 回歸分析(regression analysis)에 의해 주어진다. 어느 特定品目에 對한 需要量 決定은 品目自體의 市場價格에만 좌우되는 것이 아니고, 代替可能한 他品目들의 價格變化에도 영향을 받는다. 市場에 m개의 品目들이 供給되고 있다하면 품목 i에 대한 수요량 q_{di}는

(2) $q_{di}=Q_{di}(p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_m)$ p_i: 품목 i의 가격

와 같이 多變數函數로 表示된다. $p=(p_1, \cdots, p_m)$, $q_d=(q_{d1}, \cdots, q_{dm})$ 및 $Q_d(\cdot)=(Q_{d1}(\cdot), \cdots, Q_{dm}(\cdot))$로 하면 市場需要曲線들은

(3) $q_d=Q_d(p)$

로 간결히 표시된다.

價格變數 p外에도 所得水準, 人口增加率等이 獨立變數로 포함이 되겠으나, 이들은 어느 기준치(reference point)에 固定시켰다고 가정하자.

위의 벡타수요함수 $Q_d(\cdot)$는 실제응용시 여러形態의 構造를 갖겠으나, 通常 常價格彈性度 需要曲線(constant elasticity demand curve)으로 表示되어

$$\ln(q_{di}/q_{di}^{\circ})=\sum_{j=1}^{m} E_{ij}\ln(p_j/(p_j^{\circ})\quad i=1, \cdots, m$$

로 된다. 위에서 E_{ij}는 p_j°와 q_i°를 기준치로 하여 算出된 품목 i의 품목 j價格에 대한 交叉彈性値를 나타내고 있으며, E_{ii}는 품목 i의 自己價格彈性値를 표시하고 있다. 一般的으로 E_{ij}, $i \neq j$, 는 零이 아닌 값을 갖는다.

다. 市場均衡關係

수요와 공급은 市場均衡價格에 의해 平衡을 이룬다. 實際市場機能은 各種 市場外的 制約, 市場情報의 不確實 등으로 인해 完全均衡을 이루기 힘든 것이 사실이나, 本稿에서는 基本 개념의 소개를 目的으로 하는 만큼, 市場機能의 完全 및 自由경쟁체제를 가정한다. 이러한 가정하에서 市場均衡點은 공급자가격과 수요자가격이 一致되고, 수요와 공급이 平衡을 이루는 點이 된다. 전술한 바와같이 공급자가격은 선형계획모형(1)의 경우 수요제약식 $A_d x \geqq q_d$에 대응하는 쌍대변수 v_D에 해당하므로 市場均衡모형은 다음의 式들로 要約된다.

$$
(3)\quad
\begin{cases}
\text{공급부분}: \min\ c^T x \\
\qquad \text{s.t.}\ A_r x \geqq -q_r \\
\qquad\qquad A_{int} x \geqq 0 \\
\qquad\qquad A_d x \geqq q_d : v_d(\text{쌍대변수}) \\
\qquad\qquad x \geqq 0 \\
\text{수요부문}: q_d=Q_d(p) \\
\text{균형조건}: p=v_d
\end{cases}
$$

이를 좀더 간단히 表示하면,

$$
(4)\quad \begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s.t.}\ \ A_r x \geqslant -q_r \\ \qquad A_{int} x \geqslant 0 \\ \qquad A_d x \geqslant Q_d(v_d) : v_d(\text{쌍대변수}) \\ \qquad x \geqslant 0 \end{cases}
$$

一見 市場均衡模型(4)는 線形計劃問題의 一種으로 보이나 雙對變數 v_d가 原模型(primal problem)에 나타나기 때문에 線形計劃問題라 볼 수 없다. 따라서 線形計劃技法外의 다른 方法을 適用하여야 한다. 예를들어 上記模型을 同一解를 갖는 非線形問題로 바꾸어 준다던지, 市場價格을 적정値로 가정하여 반복적 技法(iterative approach)을 사용한다던지 할 수 있겠다.

라. 市場均衡과 經濟혜택(economic benefits) 極大化

單一品目市場에서 市場均衡價格은 경제혜택(economic benefit=消費者잉여가치+生産者잉여가치) 즉 그림(1)에서 빗금친 부분의 면적을 극대화시키는 點임을 지적하였다. 이 개념을 一般化시키기 위하여 多品目市場을 생각하여 보자. 만일 이 多品目市場에 對해서도 적절한 경제혜택개념이 定義될 수 있다면 市場模型(3)은 경제혜택極大化問題로 전환시킬 수 있게 된다. 흔히 경제혜택(economic surplus)는 단일 品目의 경우 수요곡선하의 "면적"에서 공급곡선下의 "면적을 뺀 면적과 일치되고 있다. 하지만 多品目의 경우는 "면적"개념이 수요곡선 $Q_d(\cdot)$가 特定條件을 만족시키지 않으면 정의가 되지 않는다. 수학적으로 表現하여 벡타함수 $Q_d(\cdot)$가 線積分可能(line integrable)하지 않으면 경제혜택이 定義되지 않는다. 즉 $Q_d(\cdot)$의 微分行列(Jacobian)이 대칭행렬(symmetric matrix)이 되지 않으면 안된다. 하지만 만일 $Q_d(\cdot)$가 선적분가능이면 單一品目의 경우와 같이 市場均衡模型은 경제혜택極大化問題로 전환시킬 수 있다. $Q_d(\cdot)$의 微分行列이 대칭이면, 그 逆函數(存在가정) $P_d(\cdot)$의 微分行列도 대칭이 되어 그 선적분 $g_d(\cdot)$는 아래 式으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$g_d(q)=\int_0^q P_d(r)\cdot dr$$

最適化理論의 Kuhn-Tucker 條件을 通해 검토해 보면 市場均衡模型(3)은 아래와 같이 볼록형 最適化問題(convex programming problem)로 전환시킬 수 있음을 알 수 있다. 즉,

$$
(5)\quad \begin{aligned} &\min_{x,q}\ c^T x - g_d(q) \\ &\text{subject to}\ \ A_r x \geqslant -q_r \\ &\qquad\qquad A_{int} x \geqslant 0 \\ &\qquad\qquad A_d x - q \geqslant 0 \\ &\qquad\qquad x \geqslant 0 \end{aligned}
$$

일단 市場均衡模型을 위와 같이 最適化問題로 바꿀수 있으면, 市場均衡點은 最適化技法(optimization algorithms)을 이용하여 찾아 낼수 있게 된다.

위에서 살펴본 경제혜택극대화문제로의 전환은 수요함수 $Q_d(\cdot)$의 선적분가능성 가정하에 가능하였다. 實際問題의 경우 계량경제기법으로 추정한 수요곡선 $Q_d(\cdot)$는 선적분이 可能하지 않은 수가 많이 있다. 이는 선적분가능성이 $Q_d(\cdot)$의 미분행렬의 대칭성과 일치하고, 그 미분행렬의 대칭성은 대체가능한 두 품목간의 상호가격의 변화에 대한 상대방 품목 수요량의 반응도(交叉彈力度自體를 말하는 것이 아님을 유의) 즉, 품목들 i와 j간에 $\partial q_i/\partial p_j$ 및 $\partial q_j/\partial p_i$가 一致하여야 하기 때문이다. 이들 반응도의 一致는 기대하기 힘든게 사실이며, 이는 곧 市場均衡問題(3)을 경제혜택극대화문제(5)로 전환시킬 수 없다는 解法上의 어려움을 제기하게 된다.

마. 反復的 技法

市場均衡模型(3)을 線形計劃技法으로 直接풀지는 못하겠지만, 反復的으로 풀 수 있지 않은가 궁금하게 된다. 즉 市場均衡價格形成과정(market price adjustment process)으로서 알려진 Marshalian 가격형성과정 또는 Walrasian 가격형성과정에서 시사하고 있는 거미줄理論(Cobweb process)을 곧 解法으로 使用하는 경우를 생각할 수 있다. 이들 반복적개념을 本稿의 市場均衡模型(3)에 적용하면 다음과 같은 단계를 밟게 된다. 즉,

제 1 단계 : 임의의 가격 추정치 p^0를 이용하여 $q^0=Q_d(p^0)$를 구한다. $k=1$로 잡는다.

제 2 단계 : 前期反復에서 求해진 p^k를 이용하여 $q^k=Q_d(p^k)$를 求하여 아래의 線形計劃問題를 준다.

$$
\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{subject to}\ \ A_r x \geqslant -q_r \\ &\qquad\qquad A_{int} x \geqslant 0 \\ &\qquad\qquad A_d x \geqslant q^k \\ &\qquad\qquad x \geqslant 0 \end{aligned}
$$

제 3 단계 : 위의 LP에서 制約式 $A_d x \geqslant q^k$에 대응하는 最適雙對變數의 값 v^k를 구한다(이 값은 매우 용이하게 구해진다). 만일 $v^k=p^k$이면, 市場均衡價格이 求해진 것이 되므로 反復作業은 종결된다. 만일 $v^k \neq p^k$이면, v^k들 p^{k+1}로 놓고 제 2 단계로 돌아간다.

이 반복기법은 每반복시 선형계획문제를 풀기때문에 계산상 有利하게 보인다. 그러나 不幸하게도 이 方法은 每반복시 求해지는 價格 p^k가 市場均衡點(p^*라 하자)으로 수렴하지 않는 경우가 있다. 수렴하지 못하는

이유는 單一品目의 경우(그림 (1)참조)에서 쉽게 알수 있다. 초기 推定値 p°를 어느 값에 잡느냐에 따라 다르겠으나, 생산자 공급곡선에 나타나는 계단(step: 선형계획에 의한 생산부문모형에 필수적으로 나타나는 현상) 때문에 市場均衡點으로 수렴하지 못하고 주변에 존재하는 계단의 상단과 하단사이를 계속 반복하게 될 수가 있다. 이러한 發散(divergence)의 可能性을 理解하지 못하거나 留意하지 못하고, 위의 반복기법을 이용하였다가 실패하는 경우가 종종 있다.

위의 (라)항과 (마)항에서 얻을 수 있는 결론은 一般的인 市場均衡模型을 처리할 수 있는 解法은 (마)항에서 제시된 方法外의 것이어야 한다는 것이다.

3. 解法(A Suggested Algorithm)

제시될 解法의 기본아이디아는 전술한 (라)항의 경제해택극대화의 개념과 (마)항의 반복적 방법을 절충하여, (라)항에서 요구되는 수요곡선의 선적분가능성, (마)항에서 야기되는 發散문제를 해결해보자는데 있다.

즉 市場均衡問題(3)을 經濟혜택극대화 문제로 직접 전환은 못한다 하더라도 주어진 市場需要函數 $Q_d(\cdot)$를 線積分可能한 다른 近似函數로서 대치하여 近似경제혜택극대화문제로 전환할 수 있게 한 후, 最適化技法을 利用하여 近似市場均衡價格(approximate market equilibrium price)을 求한 다음 이 근사균형가격을 이용하여 새로운 $Q_d(\cdot)$의 근사함수를 設定하여, 이에 대응하는 근사경제혜택극대화문제를 풀어 새로운 價格을 求한다. 이러한 단계를 반복하여 궁극적으로 實際市場均衡價格이 구해지도록 하자는 것이다. 좀더 定式化하여 論해보자.

市場수요함수 $Q_d(\cdot)$의 근사함수로서 多數의 후보가 있겠으나, 그중 가장 간단하고 解法上 便利한 것은 微分行列(Jacobian)이 대각선형(diagonal)으로 되는 것으로서 다음과 같다. 즉, 품목 i에 대한 근사 수요함수는

$$q_i(p, p^\circ) = Q_{di}(p_1^\circ, \cdots, p_{i-1}^\circ, p_i, p_{i+1}^\circ, \cdots, p_n^\circ)$$

로 설정하자. 이 式은 品目 i의 수요량을 自己價格 p_i만의 함수로 되게 하고, 他品目價格들은 p°에 고정시킨 경우가 된다. 유의할 것은 $\hat{q}(p^\circ, p^\circ) = Q_d(p^\circ)$가 만족되고, 벡타함수 $\hat{q}(\cdot, p^\circ)$는 線積分이 可能한 함수라는 점을 유의하자. 이 근사함수 $\hat{q}(\cdot, p^\circ)$의 역함수가 存在한 다하고 이를 $\hat{p}(\cdot, p^\circ)$라고 하면 이 逆函數도 선적분가능함은 쉽게 알 수 있다. 따라서 원래의 市場均衡模型(3)에 나타나는 수요함수 $Q_d(\cdot)$를 $\hat{q}(\cdot, p^\circ)$로 代置하면, 近似市場均衡模型은 다음과 같은 볼록형최적화문제가 된다. 즉,

$$\begin{aligned}
&\min_{x,q}\ c^T x - \int_0^q \hat{p}(r, p^\circ)\cdot dr \\
&\text{subject to } A_r x \geqq -q_r \\
(6)\quad &\qquad A_{int} x \geqq 0 \\
&\qquad A_d x - q \geqq 0 \\
&\qquad x \geqq 0
\end{aligned}$$

로 된다. 特記할 사항은 目的函數의 두목째 項은 q_i에 대해 분리(separable)할 수 있기때문에, 위문제는 쉽게 線形化(linearization)시키어 線形計劃解法을 적용시킬 수 있다는 것이다. 문제(6)에 나타나는 p°는 反復的으로 풀경우 前期反復에서 주어지는 값이 된다.

위의 사항들을 綜合하여 열거하면 아래와 같다.

解法(Algorithm)

제 1 단계 : 初期 市場價格 p°를 임의로(過去의 資料나 專門家의 意見등을 고려) 推定하여, 수요량 $q^\circ = Q_d(p^\circ)$를 결정한다 (k=1로 잡는다).

제 2 단계 : 市場需要曲線 $Q_d(^\circ)$에 對한 近似函數 $\hat{q}(\cdot, p^k)$ 및 그 逆函數 $\hat{p}(\cdot, p^k)$를 導出하여 分離可能볼록形最適化問題

$$\begin{aligned}
&\min_{x,q}\ c^T x - \int_0^q \hat{p}(r, p^k)\cdot dr \\
&\text{subject to } A_r x \geqq -q_r \\
(7)\quad &\qquad A_{int} x \geqq 0 \\
&\qquad A_d x - q \geqq 0 \\
&\qquad x \geqq 0
\end{aligned}$$

를 풀어 最適解 x^k, q^k 및 制約式 $A_d x - q \geqq 0$에 對應하는 最適雙對變數 v^k(곧 長期限界生產費用 또는 自由경쟁體制下의 供給者價格)를 求한다.

제 3 단계 : 만일 $v^k = p^k$이면, 이는 곧 구하고자 하는 市場均衡價格이 되므로 最終단계인 제 4 단계로 간다. 만일 $v^k \neq p^k$이면, $p^{k+1} = v^k$로 하여 제 2 단계로 가서 反復作業을 계속한다

제 4 단계 : 市場均衡價格 p^k및 均衡需給量 $q^k = Q_d(p^k)$를 얻게되며, 同時에 수급량 q^k를 공급하는 最適生產計劃 x^k도 알 수 있다.

위의 解法을 實際問題에 應用하기 위해 다음의 몇가지 事項을 고려해보도록 하자. 첫째, 上記 反復技法은 前述한 「거미줄」理論에 근거한 反復技法에서 線形計劃生產模型의 供給曲線에 나타나는 「계단」으로 因한 發散可能性이 없어지게 된다. 이는 問題(7)에서와 같이 非線形目的函數를 사용하므로써 線形計劃生產模型에서 통상 나타나는 限界生產費用의 急變現象(bang bang phenomenon)을 除去시킬 수 있는데 연유한다. 둘째, 發散可能性을 줄이는 대신 매반복시 非線形問題(7)을

풀어야 하는 계산상의 不利한 點이 있음을 否定할 수 없지만 문제(7)의 非線形目的函數를 살펴보면 近似函數 $\hat{p}(\cdot, p^k)$의 微分行列이 대각선형이 되므로 그 線積分은 q_i들에 대해 분리가능(separable)함을 알 수 있고, 이 분리가능한 目的함수는 용이하게 線形化(linearization)될 수 있어 結果的으로 模型(7)은 線形計劃法으로 풀 수 있게 된다. 셋째, 求하고자 하는 市場均衡價格에 수렴할 때까지 問題(7)을 反復的으로 풀어야 하는 데서 오는 실제응용상의 電算機使用時間에 對한 問題이다. 만일 문제(7)을 一回푸는 데 所要되는 時間이 每 反復時 同一하다면 本稿에서 提示한 解法은 理論上으로는 흥미있을지 모르나 實際應用面에서 별로 가치가 없다 하겠다. 多幸히 問題(7)을 푸는데 소요되는 時間은 回數를 거듭할수록, 즉 市場均衡價格에 接近해 갈수록 점차 減小하게 된다. 이는 문제(7)의 制約式이 反復回數에 관계없이 同一하고 目的函數만이 k에 따라 변한다는 데 基因한다. 즉 $k-1$번째에 求해진 最適解는 k번째에는 最適解는 되지 못한다하더라도 最適解를 求하는데 필요한 初期解(initial basic feasible solution)役割을 하게 되어, 계산상의 효율을 크게 증가시킨다. 또한 市場均衡價格에 接近해 갈 수록 目的函數의 매개변수(parameters) 값들이 前期反復時 값들과 매우 近似하게 되어 最適解를 求하는 데 요구되는 「피봇팅」(pivoting)回數가 감소되거나 전혀 필요없게 되어 所要電算時間이 감소된다. 本稿의 解法을 利用한 例題에서는 市場均衡價格에 도달하는데 필요한 총전산기 사용시간은 初期反復時에 心要한 時間의 約 2倍정도 밖에 되지 않았다(Ahn 참조). 마지막으로 反復作業終結條件 $v^k = p^k$을 만족할 때 p^k가 실제 求하는 바의 市場均衡價格인지 여부를 알아야 한다. 理論的으로 철저한 증명을 하기 위해서는 多數의 最適化理論을 利用하여야하지만 槪念的으로 어렵지않게 確認해볼 수 있다. 즉 $v^k = p^k$가 만족되면 $p^{k+1} = p^k$되어 $k+1$번째 풀어야하는 문제(7)은 k번째 문제와 완전 同一하게 되어 $v^{k+1} = v^k$로 됨은 쉽게 알 수 있으며, 결국 $p^{k+2} = p^{k+1} = p^k$를 얻게 되고, 이 市場價格値는 反復回數를 거듭하더라도 變化가 없게되어 市場均衡點의 基本定義에 부합된다. 따라서 終結條件 $v^k = p^k$는 곧 p^k가 구하고자하는 市場均衡價格이 되기 위한 充分條件이 된다.

위의 몇가지 사항을 감안할 때 本稿에서 제시된 解法은 實際應用面에서 매우 有用하게 使用될 수 있는 요소들을 갖추고 있다. 한가지 첨부할 것은 市場需要函數 $Q_i(\cdot)$에 代替效果가 포함되지 않는 경우에는 $Q_i(\cdot)$에 대한 근사함수 $q(\cdot, \hat{q}^0)$는 同一한 함수가 되어, 단 1回의 反復作業이면 市場均衡價格을 구할 수 있게 되어있다.

4. 結 語

特定產業에 대한 需給政策 또는 最適流通構造의 設定, 또는 特定生產業體에서의 運營分析을 爲하여 線形計劃法을 利用하는 例가 많이 있다. 그러나 大部分의 경우 消費者 또는 需要部門에 대해서는 外生的으로 決定된 수요자가격에 대한 需要量을 最少費用으로 조달하는 方法을 취하고 있어, 소비자 또는 수요부문의 공급자가격에 대한 수요탄력성이 반영되지 않아 적정가격설정에 필요한 자료가 도출되지 않고 있다. 本稿에서는 價格彈性的인 수요, 나아가서는 代替效果도 감안된 수요행태, 費用最小化를 目的으로한 線形計劃生產模型들을 同時에 處理할 수 있는 市場均衡論에 立脚한 解法을 提示하여 보았다. 本稿模型의 基本구조를 따라 提示된 解法을 利用하면 最適生產計劃뿐아니라 最適시설投資계획(生產能力增加에 依한 市場價格變化에 따른 수요량 변화도 감안된)과 效率的인 價格政策(均衡價格이 反映된)에 관한 分析도 가능하게된다. 또한 特定政策案을 模型內의 媒介變數들의 變化로 把握한 후 感應度分析을 하면 政策遂行에서 基因하는 제반 影響을 檢討해 볼 수 있겠다.

참 고 문 헌

Ahn, B. H., *Computation of Market Equilibria for Policy Analysis: The Project Independence Evaluation System Approach,* Garland Publishing Company, N.Y., New York (forthcoming in 1979)

Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

Duloy, J.H. and Norton, R.D., "CHAC, a programming model of Mexican agriculture," in *Multi-level Planning: Case Studies in Mexico,* edited by L.M. Goureux and Alan S. Manne, North-Holland Publishing Company, 1973.

Hogan, W.W., "Energy Policy Models for Project Independence," *Computers and Operations Research,* vol. 2, Pergamon Press, 1975.

Kennedy, M., "An Economic Model of the World Oil Market," *The Bell Journal of Economics and Management Science,* vol. 5, no. 2, 1974.

Samuelson, P.A., *Foundation of Economic Analysis,* Cambridge, Massachusettes, A Harvard University Press, 1947.