<研究論文>

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 4, No. 2, December 1978

最小切斷損失에 의한 最適生產길이의 選定에 대한 動的計劃法應用

(An Application of Dynamic Programming to the Selection of Optimal Production Lengths Based on the Minimum Cutting Loss)

曹 圭 甲*

Abstract

The assortment problem with deterministic demand has been formulated so that a dynamic programming can be applied to find optimal production lengths that will minimize the sum of cutting losses. The original minimization problem can be reformulated as the maximization problem with a different objective function. This problem can be solved by the dynamic programming technique. A numerical example illustrates this approach. The ratio of computation amount of emumeration method to that of this dynamic programming is approximately n to 1.

I. 序 論

一般的으로 企業에서 製造設備 및 能力의 제약, 저장공간의 제한, 生產 및 저장에서의 經濟性등의 이유로 注文可能性이 있거나 심지어 자주 注文을 받는 모든 크기의 製品을 全部 生產한다는 것은 現實的으로 不可能하다. 간단한 예를 들면 鐵管을 生產하는 業體에서 同一한 直徑에 대하여 단지 몇가지의 標準길이의 鐵管을 生產하고, 생산되지 않는 길이의 鐵管에 대한 고객의 수요를 충족시키기 위해서는 그 보다 긴 길이의 鐵管을 切斷해서 대체시켜야 한다. 이 경우에 切斷에 의한 損失을 最小化하는 문제에 직면하게 된다. 따라서 標準의 生產 또는 在庫길이의 合理的 選定은 企業에서 生產 및 在庫管理의 측면에서 대단히 중요하다

本稿에서는 一次元의 경우 즉 製品의 길이에 限하여 주어진 일련의 길이와 각 길이에 대한 既知 또는 예측된 수요량이 주어졌을때 最小의 切斷損失로 주문을 充足시키는 문제의 해법에 관하여 고찰하고자 한다. Eiseman[1]은 이문제를 "trim problem"이라 하였고, Sadowski[3]는 "assortment problem"이라 명명하였다. Wolfson[4]은 行列을 利用하여 이문제의 解法을 개발하였고, Pentico[2]는 Wolfson과 Sadowski에 의하여 硏究한 결과의 확장으로서 確率的 需要를 가진 문제에 관하여 고찰하였다.

理論的으로 最適의 生產 또는 在庫길이를 선정하는 것은 모든 可能한 方法을 열거하므로써 결정할 수 있으나 實際에서는 거의 不可能한 것이다. 예들들면 n개의 길이로 부터 임의의 k개의 길이($k<n$)를 선정하는 때는 最長의 길이는 항상 선정해야하므로 결과적으로 全部 ${}_{n-1}C_{k-1}$의 방법이 있다. Wolfson[4] 이지적하였듯이 예를 들면 100개 중에서 10개를 선정하는 경우에 약 1.7×10^{12}의 계산이 요구되고 전자계산기를 使用하드라도 長時間이 소요된다.

따라서 本稿에서는 이 문제를 解決하는데 가능한 빨리 그리고 合理的인 계산회수로서 解答을 얻는 方法을 고찰하고자 한다.

* 釜山大學校 工科大學

Ⅱ. 問題의 定式化 및 解法

A. 問題의 假定 및 定式化

어떤 製品의 여러개의 길이의 集合 N과 각 길이에 대한 既知 또는 예측된 수요량이 주어진 경우에 모든 관련비용의 總和를 最小化하는 集合 N의 部分集合을 구하는 문제가 주어진 문제이다. 여나서 集合 N는 n개의 要素로 구성된 有限集合 즉 $N=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$이고 d_1은 最小의 길이를, d_n은 最大의 길이를 나타낸다고 가정한다. 따라서 $d_i(i=1, 2, \cdots, n)$는 $d_1<d_2<\cdots<d_n$의 관계를 가진 單調增加數列이다.

여기서 다음의 가정을 도입한다. 첫째로 最大길이 d_n는 最小길이 d_1의 倍를 초과하지 않는다. 即 $d_n<2d_1$의 관계가 成立한다고 가정한다. 이가정은 在庫의 切斷問題와 選定問題의 두가지가 同時에 일어남을 除外시키기 위해서이다. 두번째로 주문된 길이가 생산된 길이와 一致하지 않는 경우에는 切斷損失을 最小化하기 위해서 다음의 긴 길이로 부터 切斷하여 수요를 充足시킨다고 가정한다. 이가정은 實質的 見地에서 보면 매우 合理的이다. 세째로 在庫不足이 없는 경우만 고찰한다. 즉 모든 길이에 대한 수요는 既知 또는 예측된 수요이고 在庫不足이 일어나지 않는다고 가정한다.

이상의 조건을 가진 문제를 數式化하기 위해서 편의상 다음의 記號와 定義를 導入한다.

d_i : 주문된 길이

q_i : d_i의 주문량

q_{ij} : d_j로서 대치되는 d_i의 수량$(i\leq j,\ q_i=q_{ii})$

c_i : i번째 길이에 대한 단위길이당원가

b_{ij} : j번째 길이로서 i번째 길이를 대체시키는데 드는 단위당비용$(i\leq j,\ b_{ii}=0)$

TC : 全體費用

현재 n개의 주문된 길이 $(d_1, d_2, \ , d_n)$이 있다고 한다. 그중 k개의 길이 $(d_{j_1}, d_{j_2}, \ , d_{j_k})$만을 생산하려고 할때 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$으로 부터 그의 部分集合 $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$를 最適化方法으로 決定하려는 것이다. 가장 긴 주문길이 d_n과 d_{j_k}와 일치되어야 함은 쉽게 알 수 있다(即 $n=j_k$). $j_0=0$이라고 가정하면 주어진 문제는 다음 式을 최소화하는 문제로 나타낼 수 있다.

$$TC=\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=j_{l-1}+1}^{j_l}(d_{j_l}-d_i)q_ic_i+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}b_{ij_i}q_{ij_i} \quad (1)$$

式(1)에서 첫째項은 切斷損失에 관계된 비용을 둘째項은 代替費用을 각각 나타낸다.

일반적으로 어떤 特定한 期間동안의 全體需要量에 대한 자료로 부터 계획을 수립하므로 여기서 다시 切斷損失에 관계된 비용외에 다른 비용은 무시할 수 있는 정도로 작다고 가정한다. 물론 절단된 잔여량은 다시 利用하거나 판매하므로써 어느정도 보상이 될 수 있으나 이것도 무시하기로 한다.

결국 주어진 式(1)은 다음과 같이 단순화되고 이 식의 最小値를 구하는 문제로 귀착된다. 다음 式(2)를 편의상 基本式이라 부른다.

$$TC=\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=j_{l-1}+1}^{j_l}(d_{j_l}-d_i)q_ic_i \quad (2)$$

B. 解法의 유도

앞에서 고찰한 바와 같이 이 문제는 n개 중에서 k개를 택하는 組合의 문제이다. 그러나 고객의 수요를 충족시키기 위해서 最長의 길이는 반드시 선정되어야 하므로 결국 $n-1$개의 길이에 대하여 고찰해야 한다.

(1) 單一길이의 선정

單一길이의 선정에 대한 唯一한 解는 最長의 길이 d_n이다. 定義에 의해서 TC의 값은 $k=1$이고 $j_1=n$이므로 다음과 같이 주어진다. 즉,

$$TC=\sum_{i=1}^{n}(d_n-d_i)q_ic_i \quad (3)$$

이다. 이 경우는 선택의 여지가 없으므로 實際的으로는 別로 意味가 없다.

(2) 2개의 길이의 선정

n個中에서 2개의 길이를 선정하는 것은 式(2)를 最小化시키는 d_n과 다른 하나의 길이 d_{j_1}을 선정하는 것이다. 따라서 이 경우에는 다음 式을 最小化하는 것이다. 즉, 式(1)로 부터 $k=2$이므로 아래와 같이 주어진다.

$$TC(j_1|n)=\sum_{i=1}^{j_1}(d_{j_1}-d_i)q_ic_i+\sum_{i=j_1+1}^{n}(d_n-d_i)q_ic_i \quad (4)$$

式(4)를 定理하면 다음 式(5)를 얻는다.

$$TC(j|n)=\sum_{i=1}^{j_1}d_{j_1}q_ic_i+\sum_{i=j_1+1}^{n}d_nq_ic_i-\sum_{i=1}^{n}d_iq_ic_i \quad (5)$$

위 式(5)에서 마지막項의 값은 常數이므로 결국 구하고자 하는 문제는 다음式과 대등하게 된다.

$$\max_{j_1<n} TC'(j_1|n)=\sum_{i=1}^{j_1}d_{j_1}q_ic_i+\sum_{i=j_1+1}^{n}d_nq_ic_i$$

$$=d_n\sum_{i=1}^{n}q_ic_i-(d_n-d_{j_1})\sum_{i=1}^{j_1}q_ic_i \quad (6)$$

式(6)에서 첫째項의 값은 常數이고 또 둘째項에서 $d_n-d_{j_1}>0$이므로 주어진 문제는 결국 다음의 式으로 변환이 된다.

$$\max_{j_1<n} TC''(j_1|n)=-(d_n-d_{j_1})\sum_{i=1}^{j_1}q_ic_i \quad (7)$$

여기서 다음과 같이 정의된 함수 f, 即

$$f(j_1|n)=(d_n-d_{j_1})\sum_{i=1}^{j_1}q_ic_i$$

를 도입하면 式(7)은 다음과 같은 대등한 관계를 나타내는 식으로 변환이 된다.

$$\max_{j_1<n} f(j_1|n)=(d_n-d_{j_1})\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i \tag{8}$$

이제 주어진 문제는 式(8)에 나타낸 바와 같이 目的函數는 相異하나 最小化問題에서 最大化問題로 變換이 되었다. 따라서 주어진 문제는 다음과 같이 정의된 관계, 즉

$$f_1^*(n)=f_1^*(j_2)=\max_{j_1<n} f(j_1|n)$$

를 만족하는 $f_1^*(n)$을 찾는 문제로 귀착이 된다. 위의 유도과정에서 나타난 바와 같이 문제의 基本式의 最大化는 새로 정의한 함수 $f(j_1|n)$의 최대화문제와 대등하게 되었다.

(3) 3개의 길이의 선정

3개의 길이의 선정은 2개의 길이의 선정과 같이 基本式을 最小化하는 $d_n(=d_{j_3})$외에 d_{j_1}과 d_{j_2}의 두개를 더 선정하는 문제로써 이의 유도과정은 2개의 길이의 선정과 비슷하며, 다음 式을 최소화하는 것이다.

$$TC(j_1,j_2|n)=\sum_{i=1}^{j_1}(d_{j_1}-d_i)q_ic_i+\sum_{i=j_1+1}^{j_2}(d_{j_2}-d_i)q_ic_i$$
$$+\sum_{i=j_2+1}^{n}(d_n-d_i)q_i c_i \tag{9}$$

式(9)의 項들을 정리하면

$$TC(j_1,j_2|n)=d_{j_1}\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i+d_{j_2}\sum_{i=j_1+1}^{j_2} q_i c_i+d_n$$
$$\sum_{i=j_2+1}^{n} q_i c_i-\sum_{i=1}^{n} d_i q_i c_i \tag{10}$$

와 같이되고 式(10)의 마지막項의 값은 常數이므로 주어진 문제는 다음의 대등한 식으로 변환이 된다.

$$\max_{j_1<j_2<n} TC'(j_1,j_2|n)=d_{j_1}\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i+d_{j_2}\sum_{i=j_1+1}^{j_2} q_i c_i+d_n$$
$$\sum_{i=j_2+1}^{n} q_i c_i=-(d_n-d_{j_1})$$
$$\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i-(d_n-d_{j_2})\sum_{i=j_1+1}^{j_2} q_i c_i$$
$$+d_n\sum_{i=1}^{n} q_i c_i \tag{11}$$

式(11)에서 마지막項의 값은 常數이고, 또 $d_n-d_{j_1}>0$ $d_n-d_{j_2}>0$이므로 구하고자 하는 문제는 결국 다음의 대등한 式으로 變換이 되었다.

$$\max_{j_1<j_2<n} TC''(j_1,j_2|n)=(-)\left\{(d_n-d_{j_1})\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i\right.$$
$$\left.+(d_n-d_{j_2})q\sum_{i=j_1+1}^{j_2} q_i c_i\right\}$$
$$=(-)\left\{(d_{j_2}-d_{j_2})\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i\right.$$
$$\left.+(d_n-d_{j_2})\sum_{i=1}^{j_2} q_i c_i\right\} \tag{12}$$

앞의 경우와 같이 다음과 같이 정의된 함수 f, 即

$$f(j_1,j_2|n)=(d_{j_2}-d_{j_1})\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i+(d_n-d_{j_2})\sum_{i=1}^{j_2} q_i c_i$$

를 도입하면 式(12)의 最小化問題는 다음 식(13)과 같은 대등한 最大化問題로 바뀐다.

$$\max_{j_1<j_2<n} f(j_1,j_2|n)=(d_{j_2}-d_{j_1})\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i+(d_n-d_{j_2})$$
$$\sum_{i=1}^{j_2} q_i c_i \tag{13}$$

이제는 식(12)를 최소화시키는 대신 식(13)을 최대화시키면 되고 결국 다음관계

$$f_2^*(n)=f_2^*(j_3)=\max_{j_1<j_2<n} f(j_1,j_2|n)=\max_{j_2<n}$$
$$\{f_1^*(j_2)+f(j_2|n)\}$$

를 만족하는 $f_2^*(n)$를 구하면 된다.

(4) 일반적인 경우

일반적으로 $k(k<n)$개의 길이의 선정은 n-1개 중에서 k-1개를 선정하는 문제이며, 앞에서 유도한 것과 같은 技法으로 유도하면 된다. 이의 一般形을 구하기 위해서 앞의 결과를 요약하면 다음과 같다.

2개의 길이선정의 경우는 다음식, 即

$$f_1^*(n)=f_1^*(j_2)=\max_{j_1<n} f(j_1|n)$$

으로만 표시할 수 있다.

3개의 길이선정의 경우는 다음式, 即

$$f_2^*(n)=f_2^*(j_3)=\max_{j_1<j_2<n} f(j_1,j_2|n)=\max_{j_2<n}$$
$$\{f_1^*(j_2)+f(j_2|n)\}$$

으로 표시할 수 있다.

같은 방법으로 k개 길이의 선정의 일반형은

$$f_{k-1}(n)=f_{k-1}(j_k)=\max_{j_1<j_2<\cdots<j_{k-1}} f(j_1,j_2,\cdots j_{k-1}|n)$$
$$=\max_{j_{k-1}<n}\{f_{k-2}^*(j_{k-1})+f(j_{k-1}|n\}$$

와 같이 표시되며 결론적으로 이문제는 動的計劃法의 技法을 應用하면 求하고자하는 最適解가 얻어질 수 있음을 위의 반복적(recursive) 관계에서 알 수 있다.

(5) 例 題

Table 1. Data for numerical example

길이번호	길이(단위 : m)	주문량(단위 : 개)
1	12	2
2	13	3
3	14	7
4	15	4
5	17	2
6	18	5
7	20	6
8	22	3
계		32

이상에서 유도한 方法을 Wolfson[4]이 사용한 다음 표 1의 예제에 적용시켜서 계산과정을 例示하고자 한다. Wolfson의 결과와 比較하기 위해서 $c_i=1$로 가정한다.

(a) 單一길이의 선정

하나의 길이를 선정할 경우에는 가장 긴 길이를 선정하면 된다. 예제에서는 22m 길이를 32개 선정하면된다. 이경우 TC의 값은 식(3)에 의해서 173이 된다. 앞서 고찰한 바와 같이 單一길이의 선정은 現實的으로 의미가 없고 거의 이 같은 상황은 잘 일어나지 않는다.

(b) 2개의 길이의 선정

式(8)을 사용하여 계산한 결과가 다음 표 2에 나타나 있다.

Table 2. Selection of two lengths

i, j_1	d_{j_1}	Δd	q_i	Q	$f(j_1\|n)$
1	12	10	2	2	20
2	13	9	3	5	45
3	14	8	7	12	96
4	15	7	4	16	112*
5	17	5	2	18	90
6	18	4	5	23	92
7	20	2	6	29	58
8	22	0	3	32	0

단, $\Delta d=d_n-d_{j_1}$, $Q=\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i$

Table 3. Selection of the best j_1 given j_2

i, j_1	d_i	Q	$j_2=2$		$j_2=3$		$j_2=4$		$j_2=5$		$j_2=6$		$j_2=7$	
			Δd	f	Δd	f	Δd	f	Δd	f	Δd	f	Δd	f
1	12	2	1	2*	2	4	3	6	5	10	6	12	8	16
2	13	5			1	5*	2	10	4	20	5	25	7	35
3	14	12					1	12*	3	36*	4	48*	6	72
4	15	16							2	32	3	48*	5	80*
5	17	18									1	18	3	54
6	18	23											2	46
7	20	29												
8	22	32												
j_1*			1		2		3		3		3, 4		4	

단, $f=f(j_1|j_2)=\Delta d\sum_{i=1}^{j_1} q_i c_i$

이 표 2에서 $d_4=15$가 $d_3=22$에 추가하여 선정되었다. 결국 d_4를 16개, d_3을 16개 생산하면 된다. 列擧法에서는 7개의 表가 필요하나 여기서는 단지 1개의 表만 소요된다. 결국 계산량이 1/7로 감소되었음을 알 수 있다.

(c) 3개의 길이의 선정

먼저 모든 j_2 ($j_2=2,3,4,\cdots,7$)에 대한 최적의 j_1 값을 계산한다. 이 계산결과가 표 3에 주어져있다.

표 2와 표 3으로 부터 구하고자 하는 d_{j_1}과 d_{j_2}의 값을 얻을 수 있다. 表 2와 3의 결과를 결합시킨 것이 表 4에 주어져 있다.

表 4로 부터 $j_2=6$이 最大値 140을 가지므로 $d_{j_2}=18$이 선정되고, 表 3으로 부터 最適 j_1은 $j_1=3$ 또는 $j_1=4$의 두가지가 있으므로 $d_{j_1}=14$ 또는 $d_{j_1}=15$가 선정된다. 따라서 구하는 解는 d_3이 12개, d_6이 11개, d_8

Table 4. Selection of the best j_2

j_2	2	3	4	5	6	7	비고
$f(j_1\|n)$	45	96	112	90	92	58	표 2
$f(j_1\|j_2)$	2	5	12	36	48	80	표 3
계	47	101	124	126	140*	138	

이 9개 또는 d_4가 16개, d_6이 7개, d_8이 9개의 두 가지 경우의 最適解가 얻어진다.

여기서 우리는 3개이상의 길이를 선정할 경우에 여러개의 最適解가 存在할 수 있는 가능성이 있음을 알 수 있다.

4개, 5개등등 일반적으로 k개의 길이의 선정도 이상과 같은 動的計劃法의 技法을 使用하면 구할 수 있다. 그리고 위의 방법이 列擧法과 비교해서 그 계산량

이 약 $1/n$로 대폭 감소됨을 알 수 있다.

Ⅲ. 考察 및 結論

임의의 주어진 有限集合 N에 대해서 本稿에서 使用한 方法에 의해서 切斷損失을 最小化시키는 部分集合을 구할 수 있다. 만약 部分集合의 要素의 數가 增加하면, 即 標準生産 또는 在庫길이의 數가 增加하면 切斷損失은 감소할 것이나. 生産費와 在庫維持費가 增加할 것이다. 平均在庫維持費나 製品의 數에 따른 在庫維持費 및 다른 관련 비용에 관한 정보가 얻기가 힘드므로 實際問題에서 정확한 解를 얻기가 힘들지 모르지만 앞의 方法은 하나의 集合 N 뿐만 아니라 관심이 있는 여러개의 集合에 對해서 切斷損失에 관련된 비용을 계산하므로써 얼마나 많은 길이가 生産되어야 하는가를 決定하는데 도움을 줄 것이다.

앞에서 유도한 方法은 원래의 最小化問題를 最大化問題로 變換해서 動的計劃法의 技法을 使用하여 解를 얻었다 .그리고 최적$(k-1)$개의 길이의 集合은 반드시 최적 k개의 길이의 부분집합이 아님은 수치예제를 통하여 나타났다.

本稿에서 유도한 方法은 만약 集合 N이 n개의 요소로 구성된 경우에 列擧法과 비교해서 계산량이 약 $1/n$로 감소하며 따라서 전자계산기의 이용에도 보다 효율적이 될 것이다.

그러나 주어진 문제에 加한 가정을 차례로 제거하여 보다 일반화된 문제에 관한 硏究가 앞으로 이루어져야 할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

[1] Eiseman, K., "The trim problem," *Management Science*, Vol. 3, pp.279~284, July 1957.

[2] Pentico D. W., "The Assortment Problem with Probabilistic Demand," *Management Science*, Vol. 21, No.3, pp.286~290, November 1974.

[3] Sadowski, W., "A Few Remarks on The Assortment Problem," *Management Science*, Vol. 6, No. 1, pp.13~24, October 1959.

[4] Wolfson, M., "Selecting the Best Lengths to Stock," *Operations Research*, Vol.13, No.4, pp.570~585, July-August 1965.