韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1978. 12 Vol. XVII No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1978. Vol. XVII No. 1

集合算에 依한 Boolean Algebra 電子回路의 指導

沈 敬 輔

Ⅰ. 緖 言

電子計算機는 科學技術分野에서 뿐만 아니라 産業, 經濟, 社會, 敎育, 軍事 등 모든 分野에서 一大變革을 일으켰다. 그것은 단순히 계산문제를 迅速히 풀어내거나 事務處理의 기계화, 自由化에 그치는 것이 아니라, 高速性, 信賴性, 情報의 變換, 전송, 연산, 加工, 기억능력, 意思決定能力을 가짐으로써 오늘날 科學文明의 必須要素가 되었다. 그의 基礎理論은 回路의 原理이다.

또 論理는 思考의 骨格으로써 記號에 의하여 視覺化되고 客觀化된다. 數學에서 記號에 힘에 의하여 思考를 높이고 큰 效果를 얻는다는 것은 말할 必要도 없다. 그러므로 論理的 思考란 무엇인가, 어떠한 法則性을 가진 것인가 하는 문제는 數學敎育에 있어서 큰 문제로 되에 왔다. 數學에 있어서 個個의 命題의 妥當性은 論證에 의하여 보인다. 즉 처음에 定해진 公理系로부터 허락된 推論의 規則을 有限回 반복되어 그 命題가 나온다는 것이 보여질 때 그 명제는 타당하다고 한다.

이를 위해서 論理가 必要하다. 또 數學의 연습문제를 풀 때도 결국 論理가 쓰인다. 그러나 論理法則에 따라서 생각하는 것을 學生이 반드시 自覺하는 것은 아니다.

高等學校 學生에 있어서 절대로 必要한 것은 이 充分히 自覺되지는 않는 論理的 思考에 使用되는 論理를 명확히 인식하고 意識的으로 이것을 使用케 하고 이미 잘 알고 있는 집합개념을 사용하여 이들을 정의하고 집합에서 성립하는 모든 公式을 論理公式으로 바꾸어서 지도할 수 있다.

Bool 代數는 集合이나 論理體系의 一般化로서 論理回路의 製作에 必須的인 것이다. 이것은 思考의 基本的인 型式的 法則性을 定式化한 것으로써 Switch 回路와의 同型性 때문에 記號 論理學의 원리를 自動기구의 설계에 응용하게 한다. 數學에서 抽象的·型式的이라고 생각되는 記號論理學이 automation의 廣範한 發展, 전자계산기, 자동제어 장치 등의 급속한 發達을 가져와 여러 方面에 강력하게 應用되고 있다.

本稿는 集合에서 出發하여 論理를 理解하고 이것으로부터 Bool 代數로, 다시 Bool 代數로부터 回路를 이해시키는 方法을 논하고자 하는 것이다.

Ⅱ. Boolean Algebra

1. 부울대수

Bool 代數 B는 다음 공준을 만족하는 집합이다.

i) B는 2種의 二項 演算 ∨과 ∧을 가지며 이들은 巾等律, 交換律, 결합률, 配分律을 만족한다.

ii) B는 한개의 二項關係(≦)를 가지며 이것은 反射的·反對稱的·推移的이고 同時性을 만족한다.

iii) B는 一般限界로 되는 두 元 0와 1을 가지며 이들의 join 및 meet는 앞에서의 join

과 meet의 규칙(⑩과 ⑪)을 만족한다.

iv) B는 한개의 單項연산(complement)를 가지며 그것은 相補性, 雙對律, 復歸律을 만족한다.

정의로부터 明白히 임의의 집합 I의 power set는 Bool 대수이다.

位相空間 X의 regular open set 全體의 집합은 부울 대수를 이룬다([4]p.72). 부울 대수의 보기는 많이 있지만 여기서는 命題代數에 대해서만 論하기로 하자. 命題代數는 $(\wedge, \vee, \sim, \rightarrow)$로써 하나의 부울 대수가 됨은 明白하다.

2. 부울함수

代數에서 사용하는 文字에 實數와 變數가 있듯이 命題에도 명제 정수와 명제 변수가 있다. 命題定數는 定해진 命題를 表示하는 文字이고 命題變數는 任意 命題를 代入할 수 있는 文字이다.

각 명제 변수의 變域은 T, F의 두 값이고 한개의 論理式에 의해서 정해진 命題의 値域도 T, F의 두 값이다. 따라서 眞理함수는 2變數의 2値함수이다.

命題變數를 부울변수, 명제함수를 부울함수라고 부른다.

진리함수를 φ라고 하면 명제 變數 p에 대하여 p가 眞이면 $\varphi(p)=1(=T)$,

p가 僞이면 $\varphi(p)=0(=F)$.

간략을 기하기 위하여 $\varphi(p)=1$일 때 $p=1$, $\varphi(p)=0$일 때 $p=0$라 한다.

i) 論理記號의 Bool 함수에 의한 表現

① $\varphi(\sim p)=1-\varphi(p)$ 즉 $\sim p=1-p$

② $\varphi(p\wedge q)=\min(\varphi(p), \varphi(q))$

$=\varphi(p)\varphi(q)$ 즉 $p\wedge q=pq$

③ $\varphi(p\vee q)=\max(\varphi(p),\ \varphi(q))$

그런데 $p\vee q\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)$이므로

$\varphi(p\vee q)=\varphi[\sim(\sim p\wedge\sim q)]$

$=1-\varphi(\sim p\wedge\sim q)=1-\varphi(\sim p)\cdot\varphi(\sim q)$

$=1-(1-\varphi(p))(1-\varphi(q))$

$=\varphi(p)+\varphi(q)-\varphi(p)\varphi(q)$즉, $p\vee q$

$=p+q-pq$

④ $\varphi(p\rightarrow q)=\varphi(\sim p\vee q)=1-\varphi(p)+\varphi(p)\varphi(q)$

즉, $p\rightarrow q=1-p+pq$

⑤ $\varphi(p\leftrightarrow q)=1-\varphi(p)-\varphi(q)+2\varphi(p)\varphi(q)$

즉, $p\leftrightarrow q=1-p-q+2pq$

⑥ $\{\varphi(p)\}^2=\varphi(p)$ 즉, $p^2=p$

ii) Bool 함수의 응용

命題變數 $p_1, p_2, \cdots, p_r$에 관한 2개의 論理式을 $A=A(p_1, \cdots, p_n)$ $B=B(p_1, \cdots, p_n)$라하고 A, B로 표시된 Bool 함수

$A:(p_1, p_2, \cdots, p_n)$에서 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$로

$B:(p_1, p_2, \cdots, p_n)$에서 $B(p_1, p_2, \cdots, p_n)$로

를 생각할 때

$A\rightarrow B$가 tautology 즉 $A\rightarrow B$일 必要充分條件은 $\varphi(A)\leq\varphi(B)$ 즉 $A\leq B$인 것이다.

또 $A\leftrightarrow B$일 必充條件은 $\varphi(A)=\varphi(B)$이다.

〈보기 1〉 $p\wedge q=\min(p, q), p\vee q=\max(p, q)$

$\therefore p\wedge q\rightarrow p_2\ p\rightarrow p\vee q$

〈보기 2〉 $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)=(p\rightarrow q)(p\rightarrow r)$

$=(1-p+pq)(1-p+pr)$

$=1-p+pqr$

$(p\rightarrow q\wedge r)=1-p+p(q\wedge r)$

$=1-p+pqr$

지금까지 論한 바와 같이 부울함수란 두개의 구별되는 값 0 또는 1을 변수로 갖는 함수로써 2진법으로 표현된 수의 처리나 논리회로의 설계에 매우 필요하다.

여기서 0 또는 1은 일반 대수에서 말하는 수치가 아니고 다만 두개의 상태를 구별하기 위한 표시임을 강조해야 할 것이다.

즉 0은 僞의 상태라면 1은 眞의 상태를 의미하고 0이 회로가 열린 상태라면 1은 회로가 닫힌 상태를 의미한다.

이밖에도 2개의 구별되는 상태를 수리적으로 취급할 때는 부울대수를 적용할 수 있음을 알게 될 것이다. 따라서 부울대수는 어느 주어진 전제하에서 두 상태 중 어느 상태가 되는지를 알기 위한 수학적 방편인 것이다.

부울 변수를 X라 하면

$$X=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

이므로 다음 식들이 성립한다.

$X\vee\overline{X}=1 \qquad X\vee 0=X$

$X \wedge \overline{X} = 0 \quad X \wedge 0 = 0$

$X \vee 1 = 1 \quad X \vee X = X$

$X \wedge 1 = X \quad X \wedge X = X$

여기서 X에 0 또는 1을 代入해 보면 ∨나 ∧은 우리가 사용하고 있는 ＋나 ·과는 전혀 다른 새로운 산법임을 알게 될 것이다.

iii) Bool 함수의 眞値表

① $f(X)=\overline{X}$(not) ② $f(x\cdot y)=X\vee Y$(or)

X	$f(x)=\overline{X}$
0	1
1	0

·	Y	$f(x\cdot y)=X\vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

③ $f(X\cdot Y)=X\wedge Y$(and)

X	Y	$f(X\cdot Y)=X\wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$f(X\cdot Y)=X\wedge\overline{Y}$(and-not)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

三變數의 Bool 함수 中에는 다음과 같은 것들이 많이 쓰인다.

⑤ $f(X\cdot Y\cdot Z)=XZ\vee Y\overline{Z}$

Z	X	Y	XZ	$Y\overline{Z}$	$f=XZ+Y\overline{Z}$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

여기서 부울 함수의 진치표는 명제 함수의 진리표와 완전히 일치함을 알게 된다(가령 0에 F를, 1에 T를 代入함으로써).

Ⅲ. 回路(circuit)

전자계산기에서 정보의 變換, encording decording 기억, 전송, 연산 등 일체의 기능은 2종의 구별되는 상태의 論理的 처리에 의하여 수행되며 따라서 전자계산기는 일종의 논리기계라 할 수 있다.

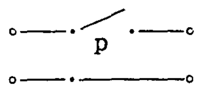
그러므로 계산기의 기능과 동작을 이해하기 위하여는 논리회로를 이해해야 한다. Bool 대수를 사용하여 전자계산기의 논리적 설계와 스윗칭 회로망을 만듬으로써 시작한다.

1. 부울대수와 스윗칭 회로망

스윗칭 회로망 開閉상태를 Bool 대수로써 표현하면 극히 편리하다.

①

p	∼p
T	F
F	T



p	p′
on	off
off	on

p의 接點과 p′의 接點이 反對의 動作을 하도록 하면 된다.

p′를 p의 補 Switch라고 한다.

② 合接

위에서와 같이 명제 p, q에 대응하는 Switch를 P, Q라 하고

명제 —[眞↔on— / 僞↔off—]—Switch

와 같이 대응시키면

合 接 (논리식) —[眞—흐른다 / 僞—흐르지 않는다—]— 전 류 (회로)

으로 대응된다.

이것을 다시 표로 표시하면 다음과 같다.

p	q	p∧q	P	Q	전 류
T	T	T	on	on	흐른다
T	F	F	on	off	흐르지 않는다.
F	T	F	off	on	흐르지 않는다.
F	F	F	off	off	흐르지 않는다.

따라서 Switch 회로는 다음과 같다.

∘—— [P] ——— [Q] ——∘

보기를 들어 合接의 결합법칙을 Switch 회로를 만들어 설명할 수도 있다.

∘——[P——Q]——R——∘ $(p\wedge q)\wedge r$

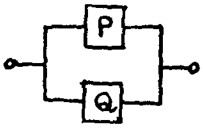
∘——P——[Q——R]——∘ $p\wedge(q\wedge r)$

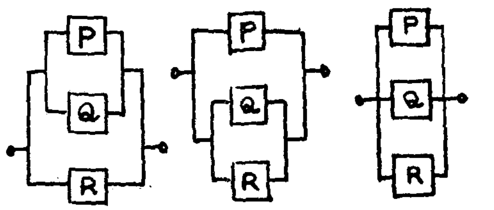
∘——P——Q——R——∘ $p\wedge q\wedge r$

③ 離接

p	q	$p \vee q$	P	Q	전 류
T	T	T	on	on	
T	F	T	on	off	흐른다
F	T	T	off	on	
F	F	F	off	off	흐르지 않는다

離接에 관한 결합법칙은 다음 Switch 회로를 보면 알 수 있다.





$(p \vee q) \vee r$ $p \vee (q \vee r)$ $p \vee q \vee r$

2. 논리 회로

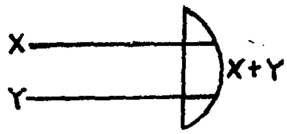
부울 함수로 표현할 수 있는 것은 모두 논리 회로가 성립한다. 논리 회로는 부울 대수식의 표현에 입각하여 구성된 회로로서 그 회로의 실제 장치가 무엇으로 되어 있건 상관하지 않는다.

어떤 논리 회로를 실제의 전기 회로, 자기 회로, 전자 회로로써 구현할 수 있는가 하는 것은 별개의 문제이지만 가장 강조되어야 할 사항은 실제회로로 제작하려는 모든 회로는 일단 논리회로를 거쳐서 검토 제작된다는 것이다.

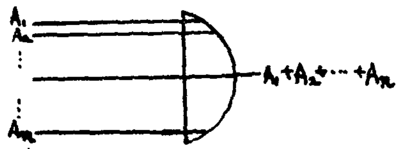
다시 말하면 논리회로는 실제 사용되는 전자회로보다 더욱 광범위한 분야를 다루고 있는 것이다.

여기에 전자회로를 이해시키기 위해서는 논리회로를 도입할 필요가 있다. 부울함수와 대응하는 논리회로의 diagram을 다음과 같이 표시한다.

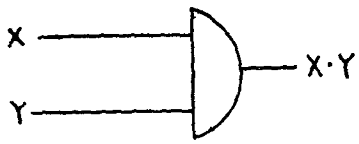
① $f(X \cdot Y)=X+Y$ (or Gate)



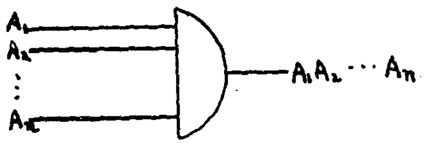
$f(A_1, A_2, \cdots, A_m)=A_1+A_2+\cdots+A_m$



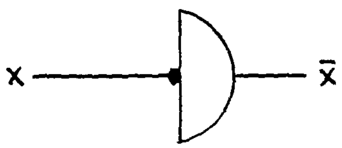
② $f(X \cdot Y)=X \cdot Y$ [And Gate]



$f(A_1, A_2, \cdots, A_n)=A_1A_2\cdots A_n$

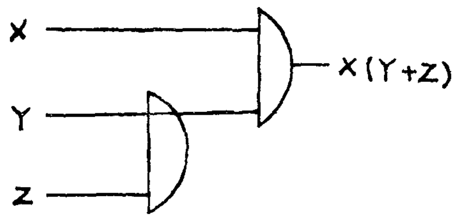


③ $f(X)=\overline{X}$ [Not Gate]

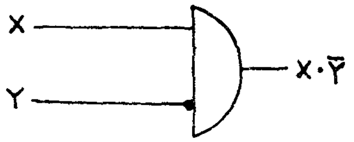


변수 X가 0일 때는 전류가 흐르고 1일 때는 전류가 흐르지 않는 상태를 표시하기로 한다면 위의 것들을 다음과 같이 설명할 수 있다. 즉 ①은 X, Y 중 한쪽만 入力이 있어도 出力이 생기나 ②는 X, Y 모두 入力이 있을 때 한해서 出力이 있고 ③은 入力이 없을 때만 出力이 있음을 나타낸다. 이것들을 이용 조합시키면 다음과 같은 有用한 회로를 구성할 수 있다.

④ $f(X \cdot Y \cdot Z)=X(Y+Z)$



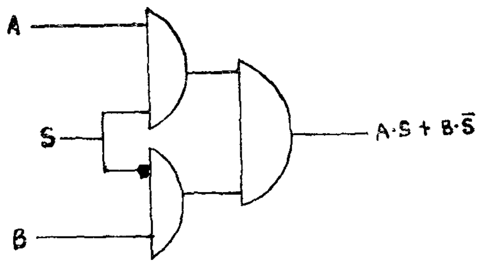
⑤ f(X·Y)=X·$\bar{Y}$〔Inhibition Gate, And-Not Gate〕



이것은 入力 pulse X가 발생하는 것을 그대로 이 게이트를 통과시키려면 Y를 무 pulse로 유지하고 통과를 저지하고 싶을 경우에는 Y에 pulse를 주면 된다(부울 함수의 진치표 참조). 따라서 Y는 pulse X의 게이트 통과를 제어하는 역할을 한다.

⑥ Decording 회로

f=A, S+B, $\bar{S}$(2입력 단일 출력 스윗칭 회로)

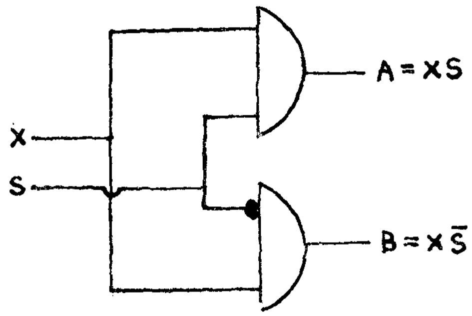


앞에서의 진치표를 보면 S=1일 때는 f=A이고, S=0일 때는 f=B이므로 이 회로는 다음과 같이 성립된다. 출력회로에 A의 pulse를 통과 시키려면 제어 입력 S에 pulse를 보내고 pulse를 통과 시키려면 S에 pulse를 보내지 않으면 된다.

따라서 S는 두 방향에서 오는 신호를 임의로 선택 切換하는 역활을 한다. 이와 반대로 한 방면에서 오는 신호를 전화의 교환대처럼 2회로 중의 어느 한 회로에 연결하고자 하는 경우에는 다음과 같은 부울 함수로 표시되는 decording 회로를 구성한다

A=XS

B=XS



이 회로는 계산기에 있어서 정보의 기억 장치에의 접근을 위해서뿐만 아니라 제어 장치가 계산기 내부의 각 요소에 대하여 필요한 지령을 수행하는 회로를 선택하는데 사용되다

2. Encording 회로

Decording과는 반대로 m방향에서 오는 입력 정보를 m방향의 출력 정보로 내보내는 회로를 만들어 보자.

보기를 들어 8진법의 순환 digit를 2진법으로 엔코딩하는 encorder를 만든다. 각 digit는 다음과 같이 변환하므로 진치표는 아래와 같다.

〈변환〉

8진법	0	1	2	3	4	5	6	7
2진법	0	1	10	11	100	101	110	111

입력(8진수)

I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	A	B	C
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

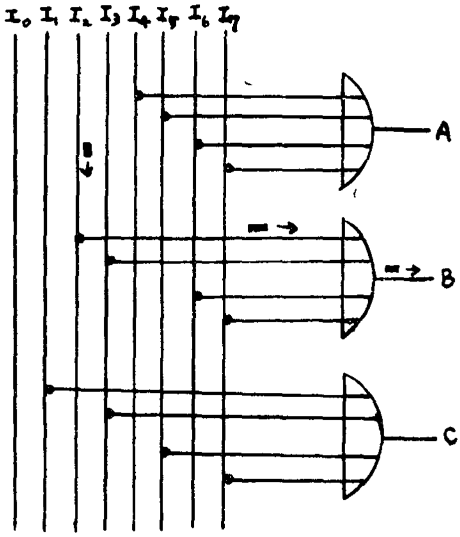
출력 2진수의 각 자리수를 부울 함수로 간략화 하면,

$A=I_4+I_5+I_6+I_7$

$B=I_2+I_3+I_6+I_7$

$C=I_1+I_3+I_5+I_7$

와 같이 되고 논리회로의 diagram은 다음 그림과 같이 된다.



3. 전자회로

부울 대수로써 표시되는 논리적 상태가 논리회로로 대표됨과 같이 논리회로는 구체적 전자회로로 대응된다. 그러나 논리회로를 구체적 전자회로로 만드는 것은 항상 가능한 것은 아니고 가능하다 하더라도 경제성이 검토되어야만 한다.

우리의 최종 목표는 전자회로로써 집합, 논리, 부울 대수를 거쳐 논리회로에까지 도달되었으나 실제 구체적인 전자회로의 제작은 분야가 다르고 정도가 미치지 못하므로 여기서 그치는 것이 이상적이라고 하겠다.

Ⅳ. 結 言

中等學校 數科課程속에 集合에 關한 項目이 들어 있으니 이미 알고 있는 集合의 槪念을 利用하여 이것을 再定義시키고 集合에서 成立하는 모든 公式을 論理公式으로 바꾸어 指導할 수 있을 것이다.

즉, 命題 p의 Universal Set를 1라 하고 T(p)를 p의 extension이라 할 때 T를 命題의 class A에서 集合의 class S로 가는 함수를 생각하면 다음 Lemma가 성립한다.

Lemma i) $T;(A:\sim\wedge\vee)\rightarrow(S:\sim\cap\cup)$는 各演算과 可換이다.

ii) 「$p\rightarrow q$」가 眞$\leftrightarrow T(p)\subset T(q)$

이것에 의하여 5個의 論理記號$\sim\wedge\vee\rightarrow\leftrightarrow$를 定義할 수 있다. 또 (B, f, g)에서

$f: B\rightarrow B(f(x)=x')$

$g: B\times B\rightarrow B(g(x\cdot y)=x\wedge y)$

를 論理記號$\sim\wedge$에 對應시키므로 命題의 集合은 Boolean Algebra가 되고 그 性質을 이어받는다.

그리고 Bool function에 앞에서 論한 回路를 對應시킬 수 있다.

그러나 모든 思考生活에 必須的인 論理를 理解하고 그것에 依하여 電子回路를 理解造作할 수 있는데 論理를 그 自體로써 學生들께 理解시키고 그것에서 습득한 記號와 公式을 論理記號에 公式으로 代置시키는 方法의 하나를 記述한 것이다.